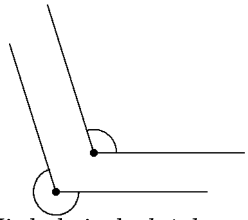
III. Geometrie

4. Grundbegriffe der ebenen Geometrie

a. Punkte und Geraden. Schon seit den alten Griechen sind die Grundobjekte der Geometrie die *Punkte* und *Geraden.* Dies sind idealisierte, abstrahierte Objekte, es sind keine greifbaren Objekte der realen Welt, sondern 'nur' des Denkens. So hat in unserer Vorstellung ein Punkt keinerlei räumliche Ausdehnung, Geraden dehnen sich zwar in einer Richtung unbegrenzt aus, haben aber keine 'Breite', *Ebenen* dehnen sich in zwei Richtungen unbegrenzt aus, haben aber keine 'Höhe'. Eine inhaltliche Definition, was ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene ist, wird *nicht* gegeben. Für den Aufbau der Geometrie sind vielmehr die *Eigenschaften* wichtig, die wir Punkten und Geraden beilegen, und die auch schon bei Euklid zu finden sind (die sog. Postulate). Einige davon lauten in heutiger Formulierung etwa: Durch je zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade, die sog. *Verbindungsgerade.* Dies beinhaltet, dass zwei verschiedene Geraden höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Mit je zwei verschiedenen Punkten einer Ebene gehört auch die Verbindungsgerade vollständig zur Ebene. Wir werden in der Folge mit diesen anschaulich einsichtigen Eigenschaften arbeiten.

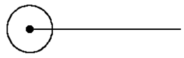
Unter einer *Strecke* verstehen wir den zwischen zwei Punkten liegenden Abschnitt einer Geraden, ein *Strahl* ist eine von einem Punkt ausgehende Halbgerade.



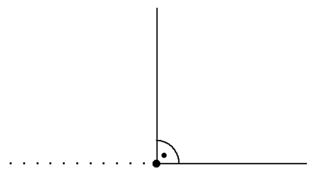
b. Winkel, Parallelität. Ein *Winkel* wird gebildet von zwei vom selben Punkt ausgehenden Strahlen (Halbgeraden), den sog. *Schenkeln* des Winkels. Nun begrenzen die beiden Schenkel *zwei* Sektoren der Ebene, so dass man zur Festlegung des Winkels zusätzlich einen Bogen einzeichnet, der angibt, welcher der beiden Sektoren den Winkel bilden soll.

Für die Einführung eines *Winkelmaßes* legt man zunächst fest: Zwei Winkel sind *gleich groß*, wenn man durch Verschiebung und Drehung die die Winkel bildenden Sektoren zur Deckung bringen kann. Zur Festlegung des Winkelmaßes geht man aus von einem durch seine Gestalt festgelegten Winkel und gibt diesem ein bestimmtes Maß. Man kann z. B. vom sog. *gestreckten Winkel* ausgehen, der dadurch definiert ist, dass seine beiden Schenkel zusammen eine volle Gerade bilden. Diesem gestreckten Winkel gibt man das *Gradmaß* 180^0. (Dies ist historisch bedingt und willkürlich.) Indem man nun diesen Winkel gleichmäßig unterteilt, kann man auch Bruchteile definieren und erhält so ein Gradmaß für Winkel. Statt vom gestreckten Winkel kann man auch vom *Vollwinkel* ausgehen und diesem (da er sich aus zwei gestreckten Winkeln zusammensetzt) das Gradmaß 360^0 geben. Ein weiterer wichtiger Winkel ist der sog. *rechte Winkel*, der definiert ist als Hälfte des gestreckten oder ein Viertel des Vollwinkels. Er hat das Winkelmaß 90^0 und wird meist durch einen Punkt im Winkelbogen gekennzeichnet.

gestreckter Winkel

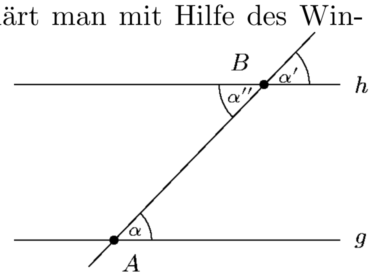


Vollwinkel



rechter Winkel

Mit dem Winkelbegriff eng verbunden ist der Begriff der *Parallelität.* Zwei Geraden nennt man parallel, wenn sie die gleiche *Richtung* haben. Letzteres erklärt man mit Hilfe des Winkelbegriffes etwa so: Zwei Geraden g, h haben dieselbe Richtung, wenn sie in einer Ebene liegen und die Verbindungsgerade zweier Punkte A, B auf g, h die beiden Geraden unter demselben Winkel schneidet. Das bedeutet, dass in nebenstehender Skizze die *Stufenwinkel* α und α' übereinstimmen. Da α' und α'' als *Gegenwinkel* an zwei sich schneidenden Geraden gleich groß sind, stimmen bei Parallelen auch die *Wechselwinkel* α und α'' überein.

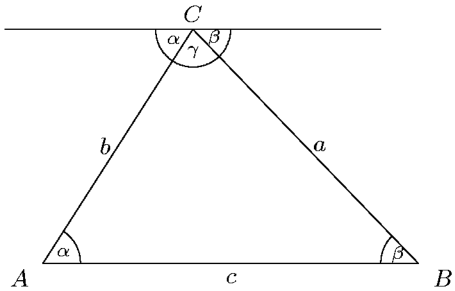


c. Dreiecke. Ein *Dreieck* wird gebildet von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen; dies sind die *Ecken* des Dreiecks. Die Verbindungsstrecken der Ecken sind die *Seiten.* Die Eckpunkte werden üblicherweise entgegen dem Uhrzeigersinn mit den Buchstaben ABC bezeichnet. Die Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, und zwar entsprechend dem Namen der Ecke: α, β, γ zu A, B, C. Schließlich bezeichnet man mit kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c die Längen der den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten (siehe etwa untenstehende Skizze).

Der erste wichtige Satz der Dreiecksgeometrie ist der

Satz über die Winkelsumme:
In jedem beliebigen Dreieck beträgt die Summe aller drei Winkel 180^0.

Dieser Satz basiert darauf, dass zu jeder Geraden und jedem Punkt außerhalb eine Parallele zu der Geraden durch diesen Punkt existiert (euklidisches *Parallelenpostulat*). Legt man durch den Punkt C des Dreiecks eine Parallele zur Seite c, so erhält man das nebenstehende Bild. Aufgrund der Parallelität stimmen die gleichbezeichneten Wechselwinkel überein. Man sieht, dass die drei Winkel zusammen gerade einen gestreckten Winkel bilden, also die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist.



Neben den Winkeln sind die *Seitenlängen* wichtige Daten eines Dreiecks. Dies setzt eine Längenmessung voraus. Grundlage dafür ist die Festlegung einer *Längeneinheit* durch Auswahl einer Einheits*strecke,* d. h. des zwischen zwei verschiedenen Punkten liegenden Abschnitts einer Geraden. Diese Wahl ist völlig willkürlich!

Liegt die Längenmessung fest, so ist der *Kreis* vom *Radius* r mit *Zentrum* M definiert als die Ortslinie aller Punkte P, die von M den festen Abstand r haben.

In jedem Dreieck gibt es außer den Seiten weitere ausgezeichnete Geraden:

a) Seitenhalbierende: Eine Seitenhalbierende ist eine Gerade durch einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. (Alle drei Seitenhalbierenden schneiden sich in *einem* Punkt, den man den *Schwerpunkt* des Dreiecks nennt.)

b) Winkelhalbierende: Eine Winkelhalbierende ist eine Gerade durch einen Eckpunkt, die den Winkel an dieser Ecke halbiert. (Alle drei Winkelhalbierenden schneiden sich in *einem* Punkt, dem Mittelpunkt des *Inkreises.)*

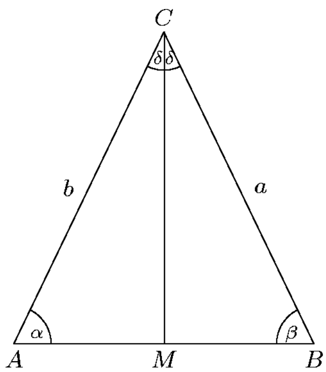
c) Höhen: Eine Höhe ist eine Gerade durch einen Eckpunkt, die im rechten Winkel zur gegenüberliegenden Seite verläuft. (Alle drei Höhen schneiden sich in *einem* Punkt, dem *Höhenschnittpunkt.)*

d) Mittelsenkrechte: Eine Mittelsenkrechte ist eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Seite und senkrecht zu dieser. (Alle drei Mittelsenkrechten schneiden sich in *einem* Punkt, dem Mittelpunkt des *Umkreises.)*

Unter den Dreiecken nehmen einige eine Sonderstellung ein. Neben den *rechtwinkligen* Dreiecken (die wir später behandeln werden) sind vor allem die gleichschenkligen zu nennen: Ein Dreieck heißt *gleichschenklig,* wenn es zwei gleichlange Seiten hat. Den Punkt, an dem diese gleichlangen Seiten zusammenstoßen, nennen wir die *Spitze* und die gegenüberliegende dritte Seite die *Basis* des gleichschenkligen Dreiecks. In der nachstehenden Skizze ist C die Spitze und c die Basis.

Gleichschenklige Dreiecke sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden durch die Spitze!

Dies erkennt man durch Vergleich der beiden Teildreiecke: Diese werden durch Spiegelung deckungsgleich, da sie eine Seite (die Winkelhalbierende) gemeinsam haben, im halben Winkel δ übereinstimmen, und weil wegen der Gleichschenkligkeit $a = b$ ist. Die Teildreiecke stimmen also in allen ihren Daten überein. So sind die beiden Winkel α und β identisch. Weiter trifft die Winkelhabierende durch C die gegenüberliegende Seite in deren Mittelpunkt M, und zwar im rechten Winkel. Dies bedeutet außerdem, dass in einem gleichschenkligen Dreieck Höhe, Seiten- und Winkelhalbierende durch C sowie die Mittelsenkrechte von c zusammenfallen!



In den Übungen sollen Sie umgekehrt zeigen, dass ein Dreieck gleichschenklig ist, wenn zwei Winkel übereinstimmen. Genauer gilt:

Satz: Mit den üblichen Bezeichnungen sind für ein Dreieck die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
(i) $a = b$, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig.
(ii) $\alpha = \beta$, d. h. das Dreieck hat zwei gleiche Winkel.
In beiden Fällen ist das Dreieck symmetrisch zur Seitenhalbierenden = Winkelhalbierenden = Mittelsenkrechten = Höhe.

d. Kongruenzsätze. Bei den obigen Symmetrieüberlegungen haben wir bereits einen der Kongruenzsätze benutzt. Man nennt zwei Dreiecke (oder allgemein geometrische Figuren) *kongruent* oder *deckungsgleich,* wenn sie durch Drehung, Verschiebung und evtl. Spiegelung zur Deckung gebracht werden können. Die Kongruenzsätze geben nun Bedingungen an, die garantieren, dass zwei Dreiecke kongruent sind.

Kongruenzsätze: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in folgenden Stücken übereinstimmen:

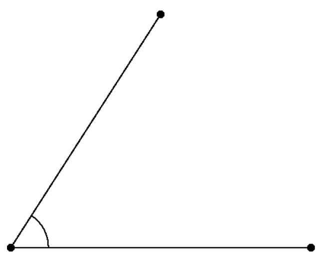
(SWS) Einem Winkel und den beiden *angrenzenden* Seiten.
(WSW) Einer Seite und den beiden *angrenzenden* Winkeln.
(SSS) Drei Seiten.
(SSW) Zwei Seiten und dem der *größeren* Seite *gegenüberliegenden* Winkel.

Existenzsätze: Es gibt ein Dreieck mit vorgegebenen Bestimmungsstücken, wenn in dem jeweiligen Fall die nachfolgende Bedingung erfüllt ist:

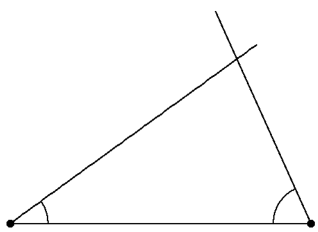
(SWS) Der Winkel ist $< 180^0$.
(WSW) Die Summe der Winkel ist $< 180^0$
(SSS) Die Summe zweier Seitenlängen ist größer als die dritte Seite.
(SSW) Der Winkel liegt der größeren Seite gegenüber.

Diese beiden Sätze sieht man besten ein, indem man versucht, ein solches Dreieck aus den gegebenen Stücken zu *konstruieren.*
Im Fall SWS zeichnet man zuerst den gegebenen Winkel und trägt auf beiden Schenkeln die gegebenen Seitenlängen ab. Damit liegen dann alle drei Punkte fest, und es gibt immer ein derartiges Dreieck (wenn der gegebene Winkel $< 180^0$ ist).

(SWS)

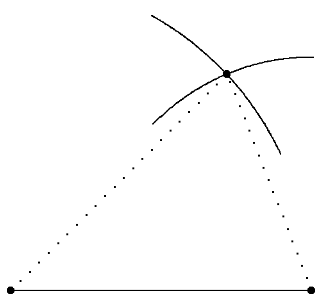


(WSW)

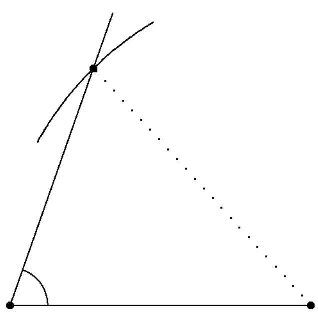


Im Fall WSW zeichnet man zunächst die eine Seite und trägt dann an beiden Endpunkten die angrenzenden Winkel ab. Ist deren Summe kleiner als 180^0, so schneiden sich die beiden Geraden in dem dritten Eckpunkt des Dreiecks. (Ist die Winkelsumme $\geq 180^0$, so kann es nach dem Winkelsummensatz kein derartiges Dreieck geben.)
Behandeln Sie den Fall SSS als Übung.

(SSS)

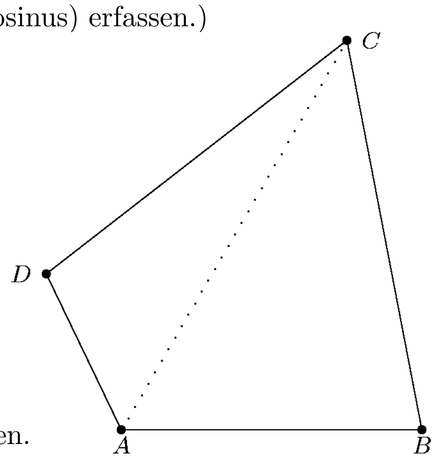


(SSW)

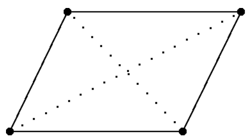


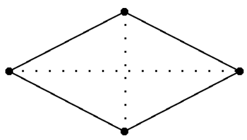
Im Fall $\overline{\text{SSW}}$ benötigt man die zusätzliche Bedingung, dass der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. Auch dies erkennt man an der entsprechenden Konstruktion: Man geht aus von einer Seite und dem angrenzen Winkel. Man schlägt um den anderen Eckpunkt einen Kreis mit der vorgegebenen Seitenlänge als Radius. Ist diese Seitenlänge größer als die andere, so trifft der Kreis den freien Schenkel des gegenüberliegenden Winkels in genau einem Punkt. (Ist sie jedoch kürzer, so kann der Kreis den freien Schenkel des Winkels in zwei, einem oder keinem Punkt treffen. Es gibt also *kein* derartiges Dreieck oder aber auch möglicherweise *zwei* nicht kongruente mit denselben Daten! Die genauen Bedingungen für die Existenz eines derartigen Dreiecks kann man erst mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus) erfassen.)

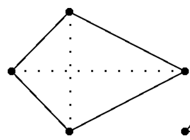
e. Vierecke. Unter einem (ebenen) *Viereck* wollen wir eine Folge von vier in einer Ebene liegenden Punkten $ABCD$ verstehen, von denen keine drei auf einer Geraden liegen und deren *Seiten,* das sind die Verbindungsstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$, sich nicht überkreuzen. Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind die *Diagonalen* des Vierecks. Da sich ein Viereck aus zwei Dreiecken ABC und ACD zusammensetzt, ist die Summe der *Innenwinkel* eines Vierecks 360^0.

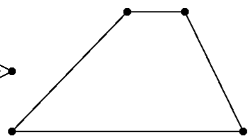


Unter den Vierecken gibt es einige ausgezeichnete:
Ein *Rechteck* ist ein Viereck mit 4 rechten Winkeln.
Ein *Quadrat* ist ein Rechteck mit 4 gleichlangen Seiten.
Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck mit 2 Paaren paralleler Seiten.
Eine *Raute* ist ein Parallelogramm mit 4 gleichlangen Seiten.
Ein *Trapez* ist ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten.
Ein *Drachenviereck* ist ein Viereck mit zwei Paaren benachbarter gleichlanger Seiten.


Parallelogramm


Raute


Drachenviereck


Trapez

Zwischen den genannten speziellen Vierecken gibt es die folgenden logischen Zusammenhänge: (Man kann die nachfolgenden Pfeile lesen als '*ist auch ein*'.):

$$\begin{array}{ccc} \text{Quadrat} & \longrightarrow & \text{Rechteck} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Raute} & \longrightarrow & \text{Parallelogramm} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Drachenviereck} & & \text{Trapez} \end{array}$$

Aus den Kongruenzsätzen für Dreiecke kann man die folgenden geometrischen Tatsachen ableiten:
1) Jede Diagonale in einem Parallelogramm zerlegt dieses in zwei kongruente Dreiecke (WSW: Diagonale als gemeinsame Seite, Übereinstimmung der Winkel wegen Parallelität). Daher sind in einem Parallelogramm einander gegenüberliegende Seiten gleichlang, einander gegenüber liegende Winkel gleich groß und die Diagonalen halbieren sich gegenseitig. Ein Parallelogramm ist punktsymmetrisch zum Diagonalenschnittpunkt, d. h. dreht man es um diesen Punkt um 180^0, so geht es in sich über.
2) Ein Drachenviereck ist aus zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zusammengesetzt. Daher schneiden sich die Diagonalen rechtwinklig. Die Diagonale durch die Spitzen dieser gleichschenkligen Dreiecke ist eine Symmetrielinie des Drachenvierecks.
3) In einer Raute gelten alle Eigenschaften eines Parallelogramms *und* eines Drachenvierecks.

f. Flächeninhalte. Grundlage der Flächenberechnung ist die Festlegung einer Flächeneinheit. Man vereinbart als *Flächeneinheit* den Flächeninhalt des *Einheitsquadrates,* also des

Quadrates der Kantenlänge 1. Allgemein werden Flächeninhalte bestimmt, indem man das gegebene Flächenstück mit Einheitsquadraten (oder bekannten Teilen davon) ausfüllt (sofern dies möglich ist) und abzählt. Dies führt zu:

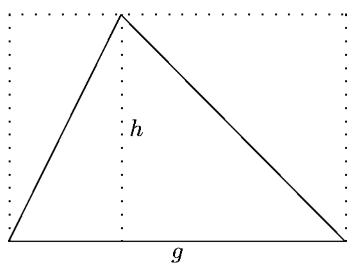
$$\text{Fläche eines Rechtecks mit den Kantenlängen } a, b: \quad A = a \cdot b\,.$$

Diese Flächenformel lässt sich zwar aus der Festlegung der Flächeneinheit ableiten, wobei jedoch Schwierigkeiten auftreten, wenn die Kantenlängen nicht *kommensurabel* ('gemeinsam messbar') sind, d. h. nicht ganzzahlige Vielfache einer gemeinsamen Länge sind. Wir werden daher diese Rechtecksformel zur Grundlage unserer Flächenberechnungen machen. Grundlagen unserer Flächenberechnungen sind damit die folgenden drei elementaren Prinzipien:

1. Rechtecksfläche = Produkt der Kantenlängen. (Dies ist im Kern die Definition des Flächeninhalts.)
2. Zerschneidet man Flächenstücke, so addieren sich die Einzelflächeninhalte zum Gesamtflächeninhalt.
3. Deckungsgleiche (kongruente) Flächenstücke haben denselben Flächeninhalt.

Aus diesen einfachen Grundprinzipien ergeben sich die nachfolgenden Flächenformeln für *geradlinig* begrenzte Flächenstücke. (Die Flächenberechnung für krummlinig begrenzte Flächenstücke ist Gegenstand der *Integralrechnung,* die an unserem Kolleg im 4. Semester behandelt wird.)

$$\text{Fläche eines Dreiecks mit der Grundlinie } g \text{ und Höhe } h: \quad A = \frac{g \cdot h}{2}\,.$$

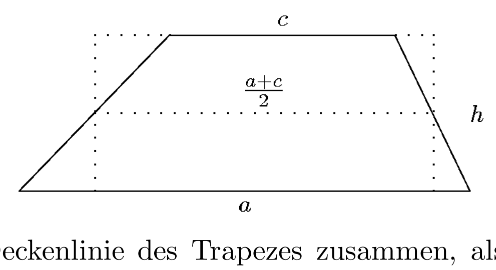


Zur Begründung dieser Formel ergänzt man das Dreieck zu einem Rechteck mit derselben Grundlinie und Höhe (siehe Skizze). Die dabei hinzugenommenen Dreiecke sind *kongruent* zu den rechtwinkligen Teildreiecken. Die Fläche des Rechtecks ist also doppelt so groß wie die Dreiecksfläche. Da die Rechtecksfläche $g \cdot h$ ist, ist die Formel bewiesen.

Neben dem Dreieck ist noch die Flächenberechnung eines Trapezes von Nutzen. Wir betrachten ein paralleles Seitenpaar des Trapezes, die wir als *Grund-* und Deckenlinie ansehen, sowie deren Abstand als zugehörige *Höhe.* Dann berechnet man die Fläche eines Trapezes als Produkt der Höhe mit dem *Durchschnitt* der Längen von Grund- und Deckenlinie, also der *durchschnittlichen* Breite. Mit den Bezeichnungen der nachfolgenden Skizze gilt:

$$\text{Fläche eines Trapezes mit parallelen Seiten } a, c \text{ und Höhe } h: \quad A = \frac{a+c}{2} \cdot h\,.$$

Zur Begründung ziehen wir zu Grund- und Deckenlinie zwei senkrechte Linien durch die Mittelpunkte der beiden anderen Seiten. So entsteht ein Rechteck, das dieselbe Fläche hat wie das Trapez, da die abgeschnittenen bzw. hinzugenommenen Dreiecke auf den beiden Seiten jeweils kongruent sind. (Begründen Sie dies genau mit geeigneten Kongruenzsätzen.) Aus dieser Kongruenz ergibt sich auch, dass Boden- und Deckenseite des Rechtecks zusammengenommen genauso lang sind wie Grund- und Deckenlinie des Trapezes zusammen, also gleich $a + c$. Damit hat das Rechteck die Breite $\frac{a+c}{2}$ und dieselbe Höhe h wie das Trapez, so dass sich die behauptete Flächenformel ergibt.

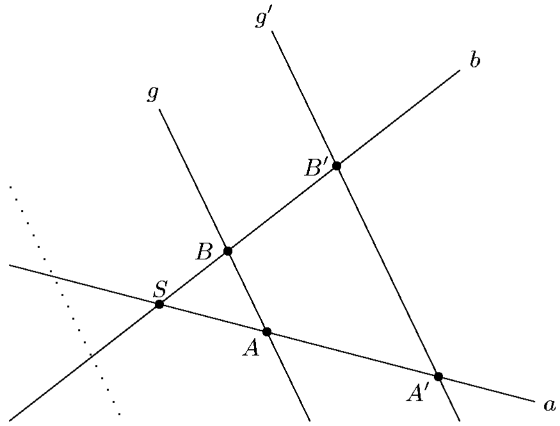


Auf ein *Parallelogramm* angewendet ($a = c$) erhält man dann als Fläche das Produkt aus einer Seitenlänge a mit der zugehörigen Höhe h:

$$\text{Fläche eines Parallelogramms mit Grundlinie } a \text{ und Höhe } h: \quad A = a \cdot h\,.$$

g. Der Strahlensatz, ähnliche Dreiecke. Ein weiteres wichtiges Resultat der Elementargeometrie ist der sog. Strahlensatz. Er sagt etwas aus über Streckenverhältnisse.

Strahlensatz: *Gegeben sind zwei Geraden a und b, die sich in einem Punkt S schneiden. Weiter sind zwei Parallelen g und g' gegeben, die die Geraden jeweils in 2 Punkten A, B bzw. A', B' (verschieden von S) schneiden.*



Dann gilt: In den beiden Dreiecken SAB und $SA'B'$ stimmen die Längenverhältnisse einander entsprechender Seiten überein:

$$\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

(Es sei ausdrücklich betont, dass der Satz entsprechend seiner Formulierung auch gilt, wenn die eine Parallele g' etwa die gestrichelt skizzierte Lage hat!).

Man kann die obigen Gleichungen wie folgt umformen:

$$\frac{|SA'|}{|SB'|} = \frac{|SA|}{|SB|}, \quad \frac{|SA'|}{|A'B'|} = \frac{|SA|}{|AB|}, \quad \frac{|SB'|}{|A'B'|} = \frac{|SB|}{|AB|}.$$

Man schreibt dies oft kürzer in Form mehrgliedriger Proportionen:

$$|SA'| : |SB'| : |A'B'| = |SA| : |SB| : |AB|$$

In dieser Form werden die Längenverhältnisse *innerhalb* der beiden Dreiecke gebildet, und der Strahlensatz sagt aus, dass in beiden Dreiecken die Längenverhältnisse der Seiten übereinstimmen. Man nennt zwei Dreiecke *ähnlich,* wenn in ihnen die Seitenverhältnisse dieselben sind. Man kann dann den Strahlensatz folgendermaßen formulieren:

Strahlensatz: *Zwei Dreiecke, die dieselben Winkel haben, sind ähnlich.*

Man führt diese Form auf die erste Version zurück, indem man die beiden Dreiecke an einem Winkel zur Deckung bringt. Man erhält dann die obige Strahlensatzfigur (der gemeinsame Winkel liegt bei S) und damit die behauptete Aussage.

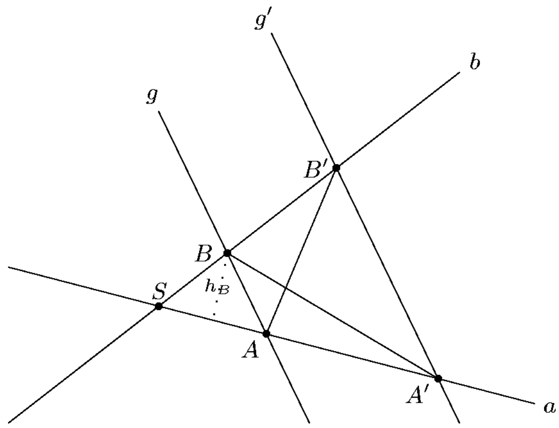
h. Beweis des Strahlensatzes. Schon die Griechen hatten einen Beweis des Strahlensatzes, und zwar auf der Basis der Kongruenzsätze. Dieser Beweis erfordert aber, dass die Längen $|SA|$ und $|SA'|$ *kommensurabel* sind, d. h. dass eine Längeneinheit existiert, von der *beide* Längen $|SA|, |SA'|$ (ganzzahlige) Vielfache sind. Ein Beweis, der die Probleme der Griechen umgeht, basiert auf geeigneten Flächenvergleichen.

Wir bezeichnen mit h_A bzw. h_B die Länge der Höhe, die durch A bzw. B verläuft und auf dem anderen Strahl b bzw. a senkrecht steht. Weiter bezeichne $F(ABC)$ den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC. Die Dreiecke $A'B'B$ und $A'B'A$ haben den gleichen Flächeninhalt, da sie die gleiche Grundseite $A'B'$ und wegen der Parallelität von g, g' gleichlange Höhen haben. Entfernt man diese flächengleichen Dreieck aus dem großen Dreieck $SA'B'$, so erhält man wieder flächengleiche Dreiecke, nämlich die Dreiecke SAB' und $SA'B$. In diesen sind h_A bzw. h_B Höhen und es gilt

$$\frac{1}{2}|SA'|\cdot h_B = F(SA'B) = F(SAB') = \frac{1}{2}\cdot|SB'|\cdot h_A$$

Berechnet man die Fläche von SAB auf zwei Weisen, so erhält man

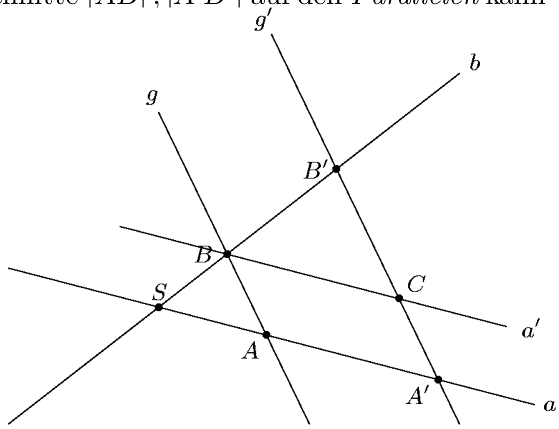
$$\frac{1}{2}\cdot|SA|\cdot h_B = F(SAB) = \frac{1}{2}\cdot|SB|\cdot h_A\,.$$



Bildet man nun die Quotienten, so erhält man $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$. Damit stimmen die Längenverhältnisse der von S ausgehenden Abschnitte auf beiden Strahlen überein. Daraus ergibt sich sofort, dass auch die anderen einander entsprechenden Abschnitte auf den beiden Strahlen in demselben Längenverhältnis stehen.

Die zweite Aussage über das Verhältnis der Abschnitte $|AB|$, $|A'B'|$ auf den *Parallelen* kann man durch Anwendung der ersten Aussage auf eine andere Strahlensatzfigur folgern. Man zeichne dazu eine Parallele a' zu a durch B. Diese trifft g' in einem Punkt C. Wir betrachten nun B' als Zentrum einer neuen Strahlensatzfigur mit den Strahlen b und g' sowie den Parallelen a und a'. Dann gilt nach dem bewiesenen Teil des Strahlensatzes

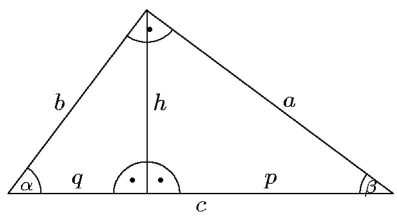
$$\frac{|B'S|}{|BS|} = \frac{|B'A'|}{|CA'|}\,.$$



Wegen der Parallelität von g, g' und a, a' bildet $BAA'C$ ein Parallelogramm, so dass $|CA'| = |BA|$ ist. Damit folgt dann die noch ausstehende Behauptung

$$\frac{|B'S|}{|BS|} = \frac{|B'A'|}{|BA|}\,.$$

i. Rechtwinklige Dreiecke. Rechtwinklige Dreiecke haben definitionsgemäß einen rechten Winkel. Dessen Schenkel nennt man die *Katheten* und die gegenüberliegende Seite die *Hypotenuse* des rechtwinkligen Dreiecks. Nach dem Winkelsummensatz ergänzen sich die beiden anderen Winkel zu 90^0. Daraus ergibt sich dann die wichtige Tatsache:



> Zerlegt man ein beliebiges *rechtwinkliges* Dreieck durch die Höhe auf der Hypotenuse in zwei Teildreiecke, so sind die beiden Teildreiecke *untereinander* und zum *Gesamt*dreieck *ähnlich.*

Begründung: Alle drei Dreiecke sind rechtwinklig, außerdem enthält jedes mindestens einen der Winkel α *oder* β. Wegen $\alpha + \beta = 90^0$ kommen dann aber in jedem Dreieck *beide* Winkel α und β vor. Alle drei Dreiecke haben folglich dieselben Winkel und sind damit *ähnlich.*

Dies bedeutet, dass für alle drei Dreiecke die Verhältnisse einander entsprechender Seiten übereinstimmen. Die nebenstehende Tabelle enthält die einander entsprechenden Seiten der Dreiecke. Es gelten also mit den Bezeichnungen der Skizze die folgenden Proportionen

	Seitenlänge gegenüber		
Dreieck	α	β	90^0
links	h	q	b
rechts	p	h	a
gesamt	a	b	c

$$h : q : b = p : h : a = a : b : c\,.$$

Dies ergibt insbesondere

$$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} \iff h^2 = p \cdot q \quad \text{(Höhensatz des Euklid)},$$
$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c} \iff a^2 = p \cdot c \quad \text{(Kathetensatz des Euklid)},$$
$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c} \iff b^2 = q \cdot c \quad \text{(Kathetensatz des Euklid)}.$$

Der wohl berühmteste Satz über rechtwinklige Dreiecke ist der

Satz des Pythagoras: *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Längenquadrate der Katheten gleich dem Längenquadrat der Hypotenuse. Liegt etwa c dem rechten Winkel gegenüber, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$.*

Man erhält ihn unmittelbar aus dem Euklid'schen Kathetensatz:

$$a^2 = p \cdot c\,,\; b^2 = q \cdot c \implies a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c = c^2\,.$$