Übungen (1)

1) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

a) $\left[\begin{array}{rrrl} x & +\,2y & +\,z & = 1 \\ x & +\,4y & +\,3z & = 1 \\ 2x & -\,2y & +\,z & = 7 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrl} 2x & +\,y & -\,2z & = -6 \\ & y & +\,z & = 0 \\ 3x & & -\,2z & = 1 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrl} 3x & +\,4y & +\,2z & = 0 \\ x & +\,y & +\,z & = 0 \\ 4x & +\,4y & & = 0 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrl} -x & +\,y & +\,z & = 0 \\ x & -\,y & +\,z & = 2 \\ x & +\,y & & = 1 \end{array}\right]$.

2) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

a) $\left[\begin{array}{rrrrl} 4x & +\,3y & -\,3z & -\,8u & = -10 \\ x & -\,y & +\,z & +\,4u & = 13 \\ -4x & -\,2y & +\,z & +\,3u & = -3 \\ 3x & -\,y & -\,2z & -\,7u & = -6 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & -\,y & +\,z & -\,u & = 0 \\ x & +\,y & -\,z & -\,u & = 6 \\ x & -\,y & -\,z & +\,u & = -2 \\ 2x & +\,y & -\,2z & +\,3u & = 0 \end{array}\right]$.

3) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\left[\begin{array}{rrrl} x & -\,y & +\,z & = 6 \\ 2x & +\,4y & -\,z & = -3 \\ -x & -\,2y & +\,3z & = 9 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrl} 3x & -\,y & +\,z & = 1 \\ -2x & +\,4y & -\,z & = -2 \\ x & +\,3y & & = -1 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrl} 2x & +\,3y & -\,4z & = -2 \\ -x & +\,4y & +\,z & = -10 \\ x & +\,y & +\,5z & = 0 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrl} x & -\,y & +\,2z & = 9 \\ -x & +\,2y & -\,z & = 6 \\ & y & +\,z & = 4 \end{array}\right]$,

e) $\left[\begin{array}{rrrl} 4x & -\,2y & +\,z & = 2 \\ -12x & +\,6y & -\,3z & = -6 \\ -8x & +\,4y & -\,2z & = -4 \end{array}\right]$, f) $\left[\begin{array}{rrrl} -x & +\,y & -\,z & = -4 \\ 3x & +\,y & +\,2z & = 3 \\ -4x & -\,4y & +\,2z & = 6 \end{array}\right]$.

Bestimmen Sie – wenn möglich – Parameterdarstellungen für die Lösungsmengen. Was stellen die Lösungsmengen geometrisch dar?

4) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und die Lösungsanzahl der folgenden Gleichungssysteme. Bestimmen Sie ggf. eine Parameterdarstellung für die Lösungsmenge.

a) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & +\,y & +\,z & & = 3 \\ & y & +\,z & +\,u & = 3 \\ x & -\,y & -\,z & +\,u & = 0 \\ x & +\,2y & +\,2z & +\,u & = 6 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & +\,y & +\,z & & = 3 \\ & y & +\,z & +\,u & = 3 \\ x & -\,y & -\,z & +\,u & = 0 \\ x & -\,2y & +\,2z & +\,u & = -2 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & +\,y & +\,z & +\,u & = 10 \\ -x & +\,2y & & & = 3 \\ & -2y & +\,3z & & = 5 \\ & & 3z & -\,4u & = -7 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rrrrl} x & -\,y & +\,z & -\,u & = 1 \\ 2x & +\,y & -\,2z & +\,3u & = 10 \\ -x & -\,2y & +\,3z & -\,4u & = -9 \\ 3x & & -\,z & +\,2u & = 11 \end{array}\right]$.

5) Lösen Sie die nachfolgenden linearen Gleichungssysteme. Überlegen Sie sich vor der Rechnung, welche Möglichkeiten es für den Rang r gibt und was dies für die Lösbarkeit bzw. Lösungsanzahl bedeutet.

a) $\left[\begin{array}{rrrl} 6x & -\,3y & +\,2z & = -6 \\ -3x & +\,9y & +\,4z & = 18 \\ & 12y & +\,8z & = 24 \\ 3x & -\,6y & +\,6z & = 12 \end{array}\right]$, b) $\left[\begin{array}{rrrl} x & +\,y & +\,2z & = 5 \\ -3x & -\,4y & +\,z & = -1 \\ 2x & -\,y & -\,z & = 0 \\ x & -\,2y & -\,3z & = 2 \end{array}\right]$,

c) $\left[\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& y &-& z &-& u &=& -1 \\ x &-& y &+& z &+& u &=& 3 \\ -3x &+& 3y &-& 3z &-& 3u &=& -7 \end{array}\right]$, d) $\left[\begin{array}{rcrcrcrcr} x &-& y &+& z &-& u &=& 3 \\ 2x &+& y &-& z &+& u &=& 9 \\ -x &+& 3y &-& 2z &-& u &=& 0 \end{array}\right]$,

e) $\left[\begin{array}{rcrcrcr} x &-& y &+& z &=& 4 \\ 2x &+& 3y &-& z &=& -1 \end{array}\right]$, f) $\left[\begin{array}{rcrcr} x &+& y &=& 5 \\ z &-& u &=& 3 \\ y &+& z &=& 4 \end{array}\right]$, g) $\left[\begin{array}{rcrcrcrcr} x &-& 2y &-& 3z &+& u &=& 4 \\ 2x &+& y &-& z &+& 2u &=& -2 \\ 3x &-& y &-& 4z &+& 3u &=& 3 \end{array}\right]$,

h) $\left[\begin{array}{rcrcrcr} x &-& 2y &-& 2z &=& 2 \\ x &+& 2y &+& z &=& 1 \\ 2x &+& 3y &+& 3z &=& 4 \\ x &+& 3y &+& z &=& 0 \end{array}\right]$, i) $\left[\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x &-& y &+& z & & &=& -2 \\ 4x &+& 2y &-& 2z & & &=& 6 \\ & & 7y &-& 5z &+& 4w &=& 2 \end{array}\right]$.

6) Auf einer Kleinkunstbühne tritt ein Rechenkünstler auf. Er fordert die Zuschauer auf, sich drei Zahlen (x, y, z) zu denken und ihm nur die Summen (A, B, C) von je zweien dieser Zahlen zu nennen. Er nennt dann unmittelbar die drei gedachten Zahlen.
a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das der Rechenkünstler lösen muss. Lösen Sie es für
1) $A = 6$, $B = 9$, $C = 11$,
2) $A = 13$, $B = 17$, $C = 18$.
b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für *beliebige* A, B, C und ermitteln Sie so eine Lösungs*formel* zur Bestimmung von x, y, z.
c) Der Rechenkünstler verrät seinen 'Trick': Er addiert $A+B+C$ und halbiert das Ergebnis. Von diesem Wert subtrahiert er dann jeweils eine der Zahlen A, B, C und erhält dabei die drei gedachten Zahlen x, y, z. Vergleichen Sie mit Ihrer Lösungsformel aus b).
d) Der Rechenkünstler ändert die Fragestellung. Die Zuschauer sollen von den gedachten Zahlen (x, y, z) je zwei addieren und die dritte subtrahieren. Wie berechnet man jetzt aus den mitgeteilten Ergebnissen P, Q, R die gedachten Größen?

Übungen (1) — Lösungen

1) Alle Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind jeweils:
a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Wieder sind alle Gleichungssysteme eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind:
a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3) a), c) und f) sind eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für a), $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ für c) und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für f).

b) Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung $0 = 0$ ist selbstverständlich erfüllt. Die übrigen Gleichungen löst man 'von unten nach oben' auf. Die erste dabei aufzulösende Gleichung $10y - z = -4$ enthält *zwei* Variable, man kann daher auswählen, nach welcher man auflösen will. Hier bietet sich z an.

$$10y - z = -4 \iff z = 10y + 4\,.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass y beliebige Werte annehmen kann, dann jedoch $z = 10y + 4$ gewählt werden muss, z ist also durch y bestimmt. Man löst nun die noch verbleibende Gleichung nach der noch *verbleibenden* Variablen x auf (nicht etwa nach z oder y!):

$$3x - y + (10y + 4) = 1 \iff 3x = -9y - 3 \iff x = -3y - 1\,.$$

Die Lösungsvektoren haben also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit beliebigem } y \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher unendlich. Indem man den Lösungsvektor zerlegt in die Vielfachen von y und die 'y-freien' Teile, erhält man die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R})\,.$$

Die Lösungsmenge ist die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 0 \mid 4)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

d) ist unlösbar, denn die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right).$$

Die letzte Gleichung enthält einen Widerspruch $0 = -11$, so dass keine Lösung existieren kann.

e) Hier reduziert sich das Gleichungssystem durch Gauß-Elimination auf eine einzige Gleichung, die erste: $4x - 2y + z = 2$. Diese kann man nun nach einer der drei Variablen auflösen, z. B.

$$4x - 2y + z = 2 \iff z = -4x + 2y + 2\,.$$

Dies zeigt, dass x *und* y beliebig gewählt werden können, während z dann gleich $-4x+2y+2$ sein muss, damit das Gleichungssystem erfüllt ist. Die Lösungsvektoren sind daher von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R})\,.$$

Dies stellt eine Parameterdarstellung einer *Ebene* dar: Die Lösungsmenge ist die Ebene durch den Punkt $(0 \mid 0 \mid 2)$ mit den (linear unabhängigen) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) a) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$. In der letzten Nullzeile steht auch auf der rechten Seite 0: Das Gleichungssystem ist lösbar. Die Auflösung ‘von unten nach oben’ ergibt der Reihe nach

$$\begin{aligned} &3u = 3 \iff u = 1\,, \\ &y + z + 1 = 3 \iff y = 2 - z\,, \\ &x + (2 - z) + z = 3 \iff x = 1\,. \end{aligned}$$

und damit die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})\,.$$

Die Lösungsmenge ist damit eine *Gerade,* und zwar durch den Punkt $(1 \mid 2 \mid 0 \mid 1)$ mit *Richtungsvektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b),c) Hier ist der Rang jeweils $r = 4$, so dass beide Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für b) und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ für c).

d) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 2$, die Anzahl der freien Parameter daher $n - r = 4 - 2 = 2$, die Lösungsmenge also eine *Ebene.* Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L} : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

5) Zunächst die Vorüberlegungen vor Beginn der Gauß-Umformungen.
a),b),h): Es ist $n = 3$, $m = 4$ und folglich $r \leq n = 3 < m = 4$. $r < m$ bedeutet, dass am Ende der Gauß-Umformungen mindestens eine Nullzeile in der Koeffizientenmatrix auftritt. Es muss also mindestens eine Bedingung für die Lösbarkeit überprüft werden.
c),d),f),g),i): Hier ist $n = 4$, $m = 3$ und folglich $r \leq m = 3 < n = 4$. $r < n$ bedeutet, dass das System – wenn es lösbar ist (!) – unendlich viele Lösungen haben muss, da mindestens ein freier Parameter in der Darstellung der Lösungsmenge auftritt. Diese 5 Gleichungssysteme sind also auf keinen Fall eindeutig lösbar!
Dieselben Überlegungen gelten auch für e), denn auch hier ist $r < n$, da $m = 2$, $n = 3$ und $r \leq 2$ ist.
Im folgenden sind die Gaußumformungen und die sich daraus ergebenden Ergebnisse aufgelistet:

a) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ -3 & 9 & 4 & 18 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 3 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 15 & 10 & 30 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 3 = n$, also gibt es genau eine

Lösung; diese ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 26 & 45 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist *unlösbar.* Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$.
c)
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & -3 & -7 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & -10 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist wiederum *unlösbar.* Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.

d)
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar (keine Nullzeile). Der Rang ist $r = 3$, die Dimension des Lösungsraumes daher $d = n - r = 1$: Die Lösungsmenge ist eine *Gerade.* Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R})\,.$$

e)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem hat den Rang $r = 2 = m$; es ist lösbar; die Dimension des Lösungsraumes ist $d = n - r = 3 - 2 = 1$, die Lösungsmenge also eine *Gerade.* Als Parameterdarstellung erhalten wir:

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ -9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R})\,.$$

f) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Hier bestand die Gaußumformung aus einem simplen Zeilentausch. Der Rang ist $r = 3 = m$; das System ist lösbar und die Lösungsmenge ist $d = n - r = 1$-dimensional. Eine Parameterdarstellung für die Gerade ist

$$\mathbb{L}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

g) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses System ist unlösbar. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.
Gleiches gilt für i).
h) dagegen ist lösbar; der Rang ist $r = 3$. Wegen $r = n$ ist die Lösung eindeutig: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6) Das zu lösende Gleichungssystem lautet $\begin{bmatrix} x + y & & = A \\ x & + z & = B \\ & y + z & = C \end{bmatrix}$. Dieses Gleichungssystem soll für die angegebenen Werte von A, B, C bzw. für beliebige A, B, C gelöst werden. Dazu verwendet man das Gauß'sche Eliminationsverfahren. Da die Umformungsschritte im Gauß-Verfahren *unabhängig* von der rechten Seite sind, können wir alle drei Aufgaben auf einmal erledigen, indem wir in der Matrixform *mehrere* rechte Seiten gleichzeitig behandeln:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 1 & 0 & 1 & 9 & 17 & B \\ 0 & 1 & 1 & 11 & 18 & C \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & B-A \\ 0 & 1 & 1 & 11 & 18 & C \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 13 & A \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 4 & B-A \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 22 & C+B-A \end{array}\right)$$

Jetzt muss man die Gleichungen für die verschiedenen rechten Seiten von unten nach oben auflösen:
1) $2z = 14 \iff z = 7, \quad -y + 7 = 3 \iff y = 4, \quad x + 4 = 6 \iff x = 2;$
2) $2z = 22 \iff z = 11, \quad -y + 11 = 4 \iff y = 7, \quad x + 7 = 13 \iff x = 6.$
Diese beiden Rechnungen sind natürlich überflüssig, wenn wir nun die Aufgabe bei *beliebiger* rechter Seite lösen. Dies ist möglich, da die Koeffizientenmatrix den Rang 3 hat! Die Auflösung ergibt:

$$2z = C + B - A \iff z = \frac{C + B - A}{2},$$
$$-y + \frac{C + B - A}{2} = B - A \iff y = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} - \frac{A}{2} + A - B = \frac{C - B + A}{2},$$
$$x + \frac{C - B + A}{2} = A \iff x = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{A + B - C}{2}.$$

Setzt man die speziellen Werte aus 1) und 2) in diese Auflösungsformeln ein, so ergeben sich die oben konkret berechneten Lösungen.
c) Die Formeln des Rechenkünstlers sind leichter zu verwenden, aber mit den eben berechneten Formeln gleichwertig. Zum Beispiel

$$z = \frac{A+B+C}{2} - A = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - A = -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{C+B-A}{2}\,.$$

Genauso überprüft man die Formeln für y und z.

Für d) lautet das Gleichungssystem $\left[\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & P \\ x & - & y & + & z & = & Q \\ -x & + & y & + & z & = & R \end{array}\right]$ und Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 1 & -1 & 1 & Q \\ -1 & 1 & 1 & R \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 0 & -2 & 2 & Q-P \\ 0 & 2 & 0 & R+P \end{array}\right).$$

Die Auflösung ist wieder möglich (Rang 3) und ergibt

$$y = \frac{P+R}{2}\,,\ z = \frac{Q+R}{2}\,,\ x = \frac{P+Q}{2}\,.$$

Die *gedachten* Zahlen x, y, z erhält man also, indem man je zwei der *genannten* Zahlen P, Q, R mittelt.