Übungen (2)

1) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1)$, $B = (-2, -3)$ und $C = (4, -1)$.
a) Skizzieren Sie diese drei Punkte in einem Koordinatensystem.
b) Verschieben Sie das Dreieck ABC um den Vektor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eckpunkte A', B', C' des verschobenen Dreiecks.
c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnung durch eine entsprechende Rechnung.
d) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, sowie die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$. Was stellen Sie fest?

2) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$ im Raum. Berechnen Sie die Vektoren

$$\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{BC}\,,\ \overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})\,,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\,.$$

3) Es seien A, B und C drei beliebige Punkte. Zeigen Sie auf der Basis der Definition von Vektoraddition und skalarer Multiplikation:
a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$,
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
d) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

4) Es sei $O = (0, 0, 0)$ der Koordinatenursprung eines fest gewählten Koordinatensystems. Überprüfen Sie die folgenden einfachen, aber nützlichen Beziehungen zwischen Ortsvektoren und formulieren Sie ihre Bedeutung in Worten:
a) $A = (a_1, a_2, a_3) \implies \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,
c) Ist $v = \overrightarrow{AB}$, so gilt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + v$ und $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - v$.

5) a) Zeigen Sie, daß für 4 beliebige Punkte A, B, C, D die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Ein Viereck $ABCD$ mit diesen Eigenschaften heißt *Parallelogramm*.
b) Bestimmen Sie einen vierten Punkt D so, daß er mit den drei Punkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ ein Parallelogramm bildet.

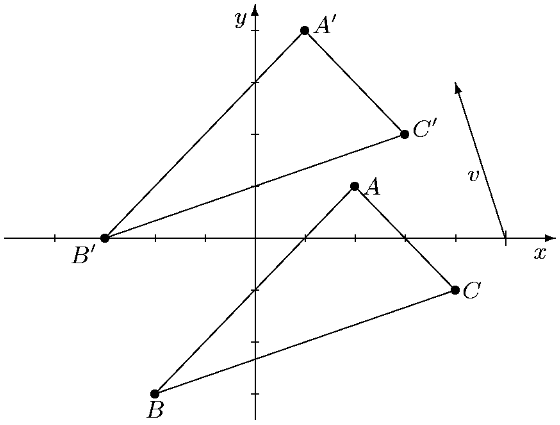
6) a) Zeigen Sie, daß für *beliebige* Punkte die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$$

b) Erläutern Sie an einer geeigneten Skizze, warum der Punkt M *Mittelpunkt* zwischen A und B genannt wird.
c) Welche Bedeutung für Ortsvektoren hat die zweite Eigenschaft in der Äquivalenz von a), wenn man darin für P den Koordinatenursprung O wählt?
d) Berechnen Sie mittels c) die Seitenmitten des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$.

Übungen (2) — Lösungen

1) Skizze zu a), b):



c) Die Eckpunkte des verschobenen Dreiecks sind charakterisiert durch

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man muß also die Endpunkte von Pfeilen bestimmen, wenn der Anfangspunkt und der Vektor gegeben sind. Nun gilt (mit den Bezeichnungen $v = \binom{v_1}{v_2}$, $A = (a_1, a_2)$ und entsprechend für A'):

$$v = \overrightarrow{AA'} \iff \binom{v_1}{v_2} = \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} v_1 &= a_1' - a_1 \\ \wedge\ v_2 &= a_2' - a_2 \end{aligned}.$$

Damit lassen sich die Koordinaten a_i' von A' sofort berechnen:

$$a_1' = a_1 + v_1\,, \quad a_2' = a_2 + v_2\,.$$

Mit den konkret gegebenen Punkten erhält man so

$$A' = (1, 4)\,, \quad B' = (-3, 0) \quad \text{und} \quad C' = (3, 2)\,.$$

d) Man stellt fest

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'B'}\,,\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{B'C'} \text{ und } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{C'A'}\,.$$

Bei Verschiebung ändern sich zwar die Punkte, nicht aber die Vektoren!

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$ (Nullvektor). (Zu den letzten beiden Gleichungen siehe auch die nächste Aufgabe.)

3) Gemäß der Definition der Vektorsumme gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Insbesondere gilt dann $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = o$ und damit ist $\overrightarrow{QP}$ der Gegenvektor zu $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$. Daraus ergibt sich dann:
a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = o$.
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
d) Hier kann man die beiden Seiten der Behauptung nicht einfacher darstellen; vielmehr formt man die Vektorgleichung unter Verwendung der Rechengesetze für Vektoren *äquivalent* um, z. B. indem man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ addiert:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ \iff & \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nun tatsächlich wahr (nach Definition der Vektoraddition), also auch die ursprüngliche Behauptung.

4) a) Es gilt (siehe Skript S. 2) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \\ a_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Dies bedeutet, daß die Koordinaten des Ortsvektors mit denen des Punktes übereinstimmen.
b) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$. Unter Verwendung von a) bedeutet dies, daß die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ die Differenz der Koordinaten von End- und Anfangspunkt sind.
c) Die Behauptungen dieses Aufgabenteils erhält man aus b) durch einfache Äquivalenzumformungen (Addition/Subtraktion eines Vektors auf beiden Seiten der Gleichung):

$$v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \iff v + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - v\,.$$

Man erhält also die Koordinaten des Endpunktes B, indem man die Koordinaten des Verbindungsvektors $v = \overrightarrow{AB}$ zu den Koordinaten des Anfangspunktes A addiert.
Entsprechend erhält man die Koordinaten des Anfangspunktes A, indem man die Koordinaten des Verbindungsvektors v von den Koordinaten des Endpunktes subtrahiert.

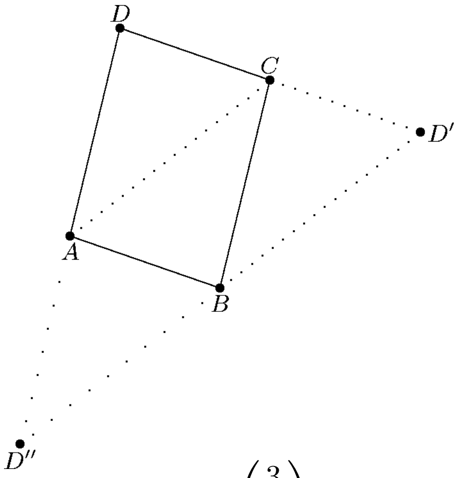
5) a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, womit die erste Äquivalenz bewiesen ist. Weiter gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Anmerkung: Wir werden noch sehen, daß die hier gewählte vektorielle Charakterisierung von Parallelogrammen mit der üblichen geometrischen gleichwertig ist, die besagt: *Ein Parallelogramm ist ein Viereck $ABCD$ mit zwei Paaren paralleler Seiten.*

b) Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von D, je nachdem welchem der drei Punkte A, B, C er in dem entstehenden Parallelogramm gegenüberliegen soll. Wenn D der dem Punkt B gegenüberliegende vierte Punkt eines Parallelogramms $ABCD$ sein soll, muß gelten

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\,.$$



Für die Ortsvektoren der vier Punkte muß dann gelten

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $D = (3, 2, 3)$. Die anderen Möglichkeiten wären $D' = (5, 0, 1)$ (gegenüber von A) und $D'' = (1, 0, -3)$ (gegenüber von C).

6) a) beweist man durch geeignete Äquivalenzumformungen (Addition desselben Vektors auf beiden Seiten einer Gleichung oder skalare Multiplikation beider Seiten mit derselben Zahl $r \neq 0$):

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \iff \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$
$$\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = (1 - \frac{1}{2})\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

b) Die erste Eigenschaft $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ bedeutet, daß der Punkt M auf halbem Wege zwischen A und B liegt, also der *Mittelpunkt* zwischen A und B ist.
c) Wählt man in der zweiten Eigenschaft P speziell als Koordinatenursprung O, so erhält man die folgende Beziehung zwischen den Ortsvektoren von A, B und M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\,.$$

Dies bedeutet, daß der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ des Mittelpunktes M zwischen A und B das arithmetische Mittel der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ von A und B ist. Man bestimmt also die Koordinaten des Mittelpunktes M von A und B, indem man die Koordinaten von A und B addiert und dann halbiert.
d) Seien A', B', C' die dem jeweiligen Eckpunkt gegenüberliegenden Seitenmittelpunkte. Unter Verwendung der eben formulierten Regel berechnet man die Koordinaten der Mittelpunkte wie folgt:

$$A' = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad B' = (3, 1, 1), \quad C' = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\,.$$