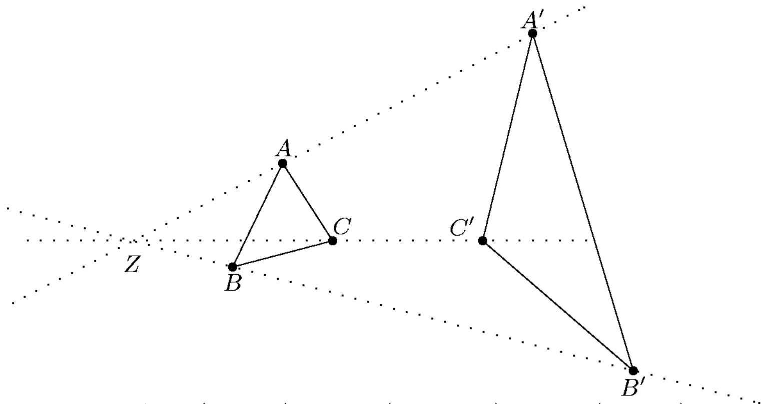
Übungen (3)

1) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) Stellen Sie die Vektoren u, $2u$, $3u$, $\frac{1}{2}u$, $-u$, $-2u$, $-2,5\,u$, $0u$ als Pfeile mit Anfangspunkt $O = (0,0)$ dar. Wo liegen die Endpunkte?
   b) Wo liegen die Endpunkte, wenn man als Anfangspunkt $A = (-1,1)$ wählt?
   c) Gehören die Punkte $X = (2, \frac{5}{2})$ und $Y = (25,13)$ zu dem in b) gefundenen geometrischen Gebilde?

2) Wir betrachten nun die Gerade g durch den Punkt $A = (-2,2,0)$ mit dem Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf der Geraden g liegen: $P = (32,19,-17)$, $Q = (-18,-7,9)$, $R = (8,7,-5)$.

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nennt man *perspektivisch,* wenn sich die drei Verbindungsgeraden einander entsprechender Ecken in *einem* Punkt, dem sog. *Zentrum* Z, schneiden:



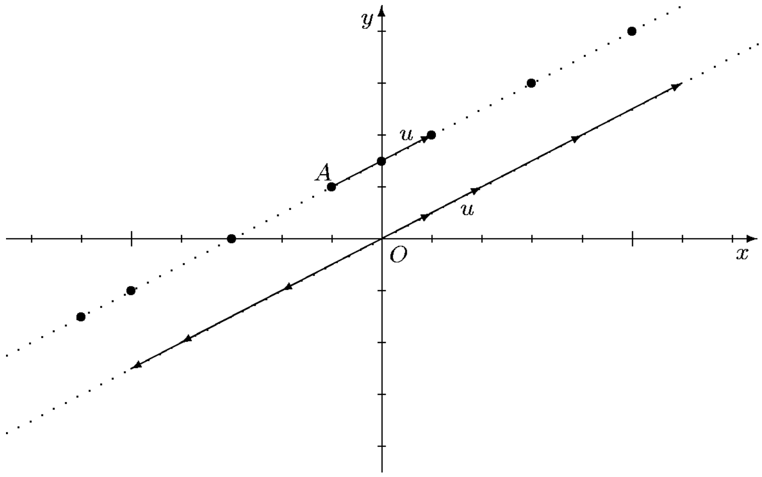
Gegeben sind die Punkte $A = (2,1,0)$, $B = (3,0,-1)$, $C = (4,1,2)$ sowie $A' = (5,4,-3)$, $B' = (2,0,0)$, $C' = (7,2,3)$.

3) a) Zeigen Sie, dass die beiden oben angegebenen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch sind und bestimmen Sie das *Zentrum* Z.
   b) Stellen Sie fest, ob auch die Geraden durch die Schwerpunkte der Dreiecke durch Z verlaufen.

4) a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten der beiden Dreiecke.
   b) Zeigen Sie, dass die so gefundenen drei Schnittpunkte wiederum auf einer Geraden liegen!

Übungen (3) — Lösungen

1) Skizzen zu a) – b):



a) Alle Endpunkte liegen auf einer Geraden g durch den Punkt O. Dabei gibt der Vektor u die Richtung dieser Geraden an, man nennt ihn daher *einen Richtungsvektor* von g.
b) Wieder ergibt sich eine Gerade, jetzt jedoch durch A statt O; wieder ist u Richtungsvektor der Geraden.
c) Damit X zu der Geraden aus b) gehört, muss der Vektor $\overrightarrow{AX}$ dieselbe Richtung (aber nicht notwendig Orientierung) wie u haben. Dies bedeutet, dass $\overrightarrow{AX}$ ein *Vielfaches* ru von u sein muss ($r \in \mathbb{R}$). Aus der Skizze bzw. der nachfolgenden Rechnung entnimmt man $r = 3/2$: X liegt auf der Geraden aus b).

$$\overrightarrow{AX} = ru \iff \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} .$$

Zwei Spaltenvektoren stimmen genau dann überein, wenn sie in *allen* ihren Koordinaten übereinstimmen. Damit ist die letztgenannte Vektorgleichung nichts anderes als das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} & 2r &=& 3 \\ \wedge & r &=& \frac{3}{2} \end{array}$$

mit der offensichtlichen Lösung $r = 3/2$.
Genauso geht man für Y vor, wobei man auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} & 2r &=& 26 \\ \wedge & r &=& 12 \end{array}$$

geführt wird, welches offensichtlich unlösbar ist. Es gibt also kein derartiges r: Y liegt nicht auf der Geraden.

2)

$$\overrightarrow{AP} = rv \iff \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rrcl} & 34 &=& 2r \\ \wedge & 17 &=& r \\ \wedge & -17 &=& -r \end{array} \iff r = 17 ,$$

also liegt P auf g. Genauso zeigt man, dass R zu g gehört: $\overrightarrow{AR} = 5v$. Für Q hingegen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} & -16 &=& 2r \\ \wedge & -9 &=& r\ , \\ \wedge & 9 &=& -r \end{array}$$

welches offenbar unlösbar ist: Q liegt nicht auf der Geraden g.

3) a) Parameterdarstellungen der drei Verbindungsgeraden entsprechender Dreieckspunkte:

$$g(A,A'):\ x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$g(B,B'):\ x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}),$$

$$g(C,C'):\ x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Schnittpunkt von $g(A,A')$ und $g(B,B')$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3r + s = 1 \\ 3r = -1 \\ -3r - s = -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 3r = -1 \\ -1 + s = 1 \\ 1 - s = -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = -\frac{1}{3} \\ s = 2 \\ -s = -2 \end{bmatrix} \iff r = -\frac{1}{3} \wedge s = 2$$

Wir erkennen, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Dies bedeutet, dass sich die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Den Schnittpunkt Z erhalten wir, indem wir $s = 2$ in die Parameterdarstellung von $g(B,B')$ einsetzen:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man muss nun zeigen, dass die Gerade $g(C,C')$ ebenfalls durch $Z = (1,0,1)$ verläuft. Dies ist der Fall, wenn für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $t = -1$ eine Lösung; alle drei Geraden schneiden sich in dem einen Punkt $Z = (1,0,1)$.

b) Die Schwerpunkte der beiden Dreiecke sind (siehe oben) $S = (3, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ sowie $S' = (\frac{14}{3}, 2, 0)$. Z liegt auf der Geraden $g(S,S')$, wenn $\overrightarrow{SZ}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors $\overrightarrow{SS'}$ ist:

$$\overrightarrow{SZ} = r\overrightarrow{SS'} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist unlösbar; Z und die beiden Schwerpunkte liegen nicht auf einer Geraden.

4) Man erhält $S_1 = (17/7, 4/7, -3/7)$ als Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit $g(A', B')$, $S_2 = (8, 1, 6)$ als Schnittpunkt von $g(A, C)$ mit $g(A', C')$ und schließlich $S_3 = (11/3, 2/3, 1)$ als Schnittpunkt von $g(B, C)$ mit $g(B', C')$. Diese drei Punkte S_i liegen auf einer Geraden, da die beiden Vektoren

$$\overrightarrow{S_2S_1} = \begin{pmatrix} -39/7 \\ -3/7 \\ -45/7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix} -13/3 \\ -1/3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vielfache voneinander sind (Faktor 7/9).