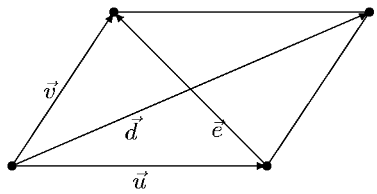
Übungen (5)

1) LS, p. 97: Längen und Abstände

2) LS, p. 105: Eigenschaften des Skalarproduktes

3) Zeigen Sie für ein beliebiges Parallelogramm die Gültigkeit der folgenden *Parallelogrammrelation:*
Die Summe der Längenquadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Längenquadrate der vier Seiten.
Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze bedeutet dies:

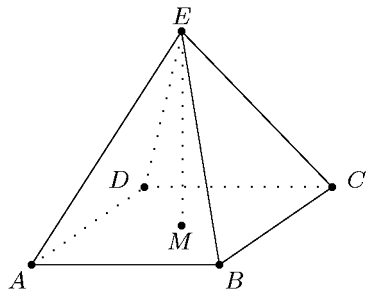
$$|\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 = 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2 \ .$$



4) LS, p. 102f.: Skalarprodukt und Orthogonalität

5) Zeigen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes: Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind.
Tipp: Drücken Sie die Längengleichheit der Diagonalen mit Hilfe des Skalarproduktes aus und vereinfachen Sie.

6) Gegeben sind 5 Punkte $A = (3, -4, -1)$, $B = (5, 0, 3)$, $C = (9, 2, -1)$, $D = (7, -2, -5)$ und $E = (0, 5, -4)$.
a) Zeigen Sie, dass $ABCD$ die Ecken eines Rechtecks sind. Wie lang sind die Seiten?
b) Zeigen Sie, dass die 5 Punkte $ABCDE$ eine *senkrechte quadratische Pyramide* bilden. Dies bedeutet: Die Spitze E liegt *orthogonal* über dem Mittelpunkt der *quadratischen* Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze).
c) Wie hoch ist die Pyramide?



7) LS, p. 101 f.: Winkelberechnungen

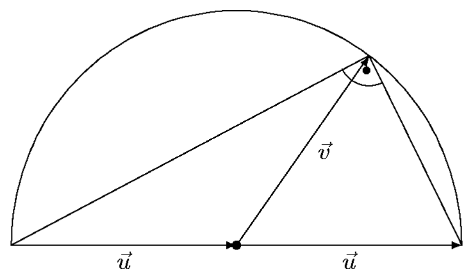
8) für Interessierte: bitte wenden

Für Interessierte

8) a) Begründen Sie für zwei beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ durch geeignete Rechnung mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \iff |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \ .$$

Erläutern Sie den Zusammenhang mit binomischen Formeln.
Formulieren Sie den geometrischen Inhalt dieser Äquivalenz in Worten.
Folgern Sie aus dieser Beziehung die nachfolgenden geometrischen Sachverhalte:
b) Ein Parallelogramm ist genau dann eine *Raute* (d. h. hat 4 gleichlange Seiten), wenn die Diagonalen orthogonal zueinander sind.
c) Ein Dreieck ist genau dann *gleichschenklig,* wenn eine Seitenhalbierende die Gegenseite senkrecht schneidet bzw. wenn eine Mittelsenkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft.
d) Ein Punkt P hat genau dann von zwei verschiedenen Punkten A, B denselben Abstand, wenn er auf der Mittelsenkrechten von A, B liegt. Folgern Sie hieraus: Der Schnittpunkt der drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des *Umkreises.*
e) Folgern Sie aus a) (mit Hilfe nachstehender Skizze) den Satz des *Thales:*
Verbindet man die beiden Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit irgendeinem anderen Punkt des Kreises, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser als Hypotenuse.



f) Formulieren und begründen Sie die *Umkehrung* des Satzes des Thales.

Übungen (5) — Lösungen

3) $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{e} = \vec{v} - \vec{u}$, also

$$\begin{aligned}\left|\vec{d}\right|^2 + |\vec{e}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{v}-\vec{u}) \bullet (\vec{v}-\vec{u}) \\ &= \vec{u}\bullet\vec{u} + 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{v}\bullet\vec{v} \;+\; \vec{u}\bullet\vec{u} - 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{v}\bullet\vec{v} \\ &= 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2\end{aligned}$$

5) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ benachbarte Kantenvektoren des Parallelogramms, dann sind $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ Diagonalvektoren und es gilt:

$$\begin{aligned}&|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \iff |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 \iff (\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b}) \\ &\iff |a|^2+|b|^2+2\cdot\vec{a}\bullet\vec{b} = |a|^2+|b|^2-2\cdot\vec{a}\bullet\vec{b} \iff \vec{a}\bullet\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}\,.\end{aligned}$$

6) a) Wegen $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD} = 8+8-16 = 0$$

sind die Kantenvektoren dieses Parallelogramms orthogonal; es liegt also ein Rechteck vor. Wegen

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+16} = 6\,,\ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

haben die Rechtecksseiten die *gleiche* Länge 6; es liegt sogar ein Quadrat vor.
b) Dass E nicht zur Bodenebene gehört, folgt aus dem unten berechneten (positiven) Abstand.
Da die Grundfläche nach dem in a) Bewiesenen ein Quadrat ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt M des Quadrates zur Spitze E orthogonal ist zur Bodenebene. Wir berechnen M als Mittelpunkt zwischen AC und erhalten $M = (6,-1,-1)$. Da $\vec{u},\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Bodenebene sind, genügt es zu zeigen, dass $\overrightarrow{ME}$ orthogonal zu $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$ ist:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix}-6\\6\\-3\end{pmatrix},\ \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix} \\ &\implies \overrightarrow{ME}\bullet\vec{u} = -12+24-12 = 0\,,\ \overrightarrow{ME}\bullet\vec{v} = -24+12+12 = 0\,.\end{aligned}$$

c) Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix}-6\\6\\-3\end{pmatrix}$,
also $\sqrt{36+36+9} = 9$.

7) **Aufgabe 101/7:**

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{74}} \implies \alpha = \arccos(\dfrac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{74}}) \approx 110{,}8^0.$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{0}{\dots} \implies \alpha = 90^0 \ (\vec{a} \perp \vec{b}).$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{33}{\sqrt{97}\sqrt{34}} \implies \alpha = \arccos(\dfrac{33}{\sqrt{97}\sqrt{34}}) \approx 54{,}9^0.$

d) $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{34}} \implies \alpha \approx 65{,}6^0.$

e) $\cos\alpha = \dfrac{19}{\sqrt{35}\sqrt{35}} = \dfrac{19}{35} \implies \alpha \approx 57{,}1^0.$

f) $\alpha = 90^0$, denn $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.

Aufgabe 101/8:

a) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Also

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{17} \approx 4{,}12\,,\ \ b = |\vec{b}| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\,,\ \ c = |\vec{c}| = \sqrt{13} \approx 3{,}61\,.$$

Bei der Berechnung der Winkel beachte man, dass die Vektoren von dem jeweiligen Eckpunkt ausgehend gebildet werden:

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\vec{c}, \vec{b}) = \arccos\,(\frac{2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}}) \approx 78{,}7^0\,,$$
$$\beta = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle(-\vec{c}, \vec{a}) = \arccos\,(\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{17}}) \approx 42{,}3^0\,,$$
$$\gamma = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle(-\vec{b}, -\vec{a}) = \arccos\,(\frac{6}{2\sqrt{2}\sqrt{17}}) \approx 59^0\,.$$

Natürlich hätte man den dritten Winkel mit dem Winkelsummensatz berechnen können. (So haben wir eine kleine Kontrolle: Die Winkelsumme ergibt tatsächlich 180^0.)

b) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$. Also

$$a = |\vec{a}| = 7\sqrt{5} \approx 15{,}65\,,\ \ b = |\vec{b}| = 2\sqrt{17} \approx 8{,}25\,,\ \ c = |\vec{c}| = 3\sqrt{13} \approx 10{,}82\,.$$

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\vec{c}, \vec{b}) = \arccos\,(\frac{-30}{2\sqrt{17} \cdot 3\sqrt{13}}) \approx 109{,}7^0\,,$$
$$\beta = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle(-\vec{c}, \vec{a}) = \arccos\,(\frac{147}{3\sqrt{13} \cdot 7\sqrt{5}}) \approx 29{,}7^0\,,$$
$$\gamma = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle(-\vec{b}, -\vec{a}) = \arccos\,(\frac{98}{2\sqrt{17} \cdot 7\sqrt{5}}) \approx 40{,}6^0\,.$$

Aufgabe 101/9:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}$.

Damit ist das Dreieck gleichschenklig und folglich die gegenüberliegenden Winkel gleich: $\gamma = \alpha$. Man muss also nur einen Winkel berechnen:

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos\left(\frac{16}{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2}}\right) \approx 50{,}8^0 .$$

Damit ist $\gamma = \alpha = 50{,}8^0$ und $\beta = 180^0 - 2\alpha = 78{,}5^0$.

b) $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{DE}| = 2\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{DF}| = 2\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{EF}| = 2\sqrt{5}$.

Wieder liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor und folglich genügt die Berechnung von

$$\varphi = \delta = \angle(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \arccos\left(\frac{4}{4\sqrt{10}}\right) \approx 71{,}6^0 .$$

Es ergibt sich $\epsilon = \angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = 180^0 - 2 \cdot \delta = 36{,}9^0$.

8) a) Es gilt

$$\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \iff 0 = (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 \iff |\vec{u}| = |\vec{v}| .$$

In Worten bedeutet dies: Zwei Vektoren sind genau dann gleich lang, wenn ihr Summenvektor senkrecht zum Differenzvektor ist.
Es handelt sich hierbei offenbar um die dritte binomische Formel für das Skalarprodukt

$$(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 .$$

b) Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die linear unabhängigen Kantenvektoren eines Parallelogramms. Dann sind $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ die Diagonalenvektoren und diese sind genau dann orthogonal, wenn die Kantenvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang sind, also eine Raute vorliegt.

c) Sind $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ zwei Seitenvektoren eines Dreiecks, so ist $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{BC}$ Richtungsvektor der dritten Seite und $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{AM_{BC}}$ Richtungsvektor der Seitenhalbierenden. Dann gilt gemäß a)

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v} \text{ gleich lang } &\iff \vec{v} - \vec{u} \perp \vec{u} + \vec{v} \iff \vec{v} - \vec{u} \perp \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ &\iff \text{Dreiecksseite} \perp \text{Seitenhalbierende} \\ &\iff \text{Mittelsenkrechte} = \text{Seitenhalbierende} \\ &\iff \text{Mittelsenkrechte trifft gegenüberliegende Ecke.} \end{aligned}$$

d) Dies ist eine Umformulierung von c), denn ein Punkt C hat von 2 Punkten A, B genau dann den gleichen Abstand, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Nach c) ist dies genau dann der Fall, wenn C auf der Mittelsenkrechten von A, B liegt.
Ist M der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten, so hat M von A, B und von B, C, also von allen drei Punkten denselben Abstand. Damit ist M Mittelpunkt des Umkreises und die dritte Mittelsenkrechte verläuft auch durch M.
e) Da der Punkt P auf dem Kreis liegt, sind die eingezeichneten Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang, also sind die Vektoren $\vec{v} + \vec{u}$ und $\vec{v} - \vec{u}$, dies sind gerade die Kantenvektoren des Dreiecks, orthogonal zueinander.
f) Es gilt umgekehrt:

> Die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke mit fester Hypotenuse liegen auf einem Kreis.

Begründung: Wenn die Kantenvektoren $\vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{u} - \vec{v}$ des Dreiecks orthogonal sind, dann sind nach a) die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang, d. h. der Eckpunkt hat vom Mittelpunkt der Hypotenuse denselben Abstand wie die Endpunkte der Hypotenuse. Also liegt der Punkt auf dem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.