## Übungen (6)

**Wir betrachten ein Dreieck in der Ebene mit den Ecken**

$$\boxed{A = (2,3)\,,\ \ B = (6,7)\,,\ \ C = (7,11).}$$

1) Fertigen Sie parallel zur Lösung der folgenden Aufgabe eine Skizze an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse daran.
   a) Bestimmen Sie für alle drei Höhen die Höhenfußpunkte und die Längen der Höhen.
   b) Stellen Sie fest, welche Höhenfußpunkte auf der jeweiligen Dreiecksseite *zwischen* den Ecken liegen, und welche *außerhalb.*
   c) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks.
2) Aus der Physik übernehmen wir: Ein Körper (mit ebenen Begrenzungsflächen) steht stabil auf einer seiner Begrenzungsflächen, wenn das *Lot* vom *Schwerpunkt* des Körpers auf die Bodenebene seinen Fußpunkt im *Innern* der Auflagefläche hat. Wir wollen zunächst ein 2-dimensionales Beispiel betrachten. Dieses ist realitätsferner, dafür aber einfacher! Wir gehen aus von dem in der ersten Aufgabe gegebenen Dreieck. (Ergänzen Sie Ihre bisherige Skizze!) Stellen Sie fest, auf welcher seiner Seiten das Dreieck stabil stehen kann.

**Wir betrachten ein Tetraeder mit den Ecken**

$$\boxed{A = (0,1,-2)\,,\ \ B = (5,5,6)\,,\ \ C = (3,1,-2)\,,\ \ D = (0,5,-2).}$$

3) a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $C$ von der Kante $g(A,B)$ und daraus die Fläche des Dreiecks $ABC$.
   b) Bestimmen Sie die Oberfläche des Tetraeders.
4) a) Bestimmen Sie alle 4 Höhenfußpunkte des Tetraeders.
   b) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders.
5) Bestimmen Sie die Abstände aller Paare von windschiefen Kanten sowie die Fußpunkte der jeweiligen gemeinsamen Lote.
6) Stellen Sie fest, auf welchen seiner vier Seiten das oben gegebene Tetraeder stabil stehen kann (vgl. Aufgabe 2).

---

Hinweis: Der Ortsvektor des Schwerpunktes eines Dreiecks bzw. eines Tetraeders ist das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der Eckpunkte.

**Übungen (6) — Lösungen**

1) <u>Höhe durch $C$</u>: Die $C$ gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Gerade $g(A,B)$ durch $A, B$; sie hat die Parameterdarstellung

$$X \in g(A,B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Höhenfußpunkt $H$ ist durch zwei Bedingungen gekennzeichnet:
1. $H$ liegt auf der Dreiecksseite $g(A,B)$:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

2. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{CH}$ ist orthogonal zu der Geraden $g(A,B)$, d. h. orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:

$$0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB}.$$

Diese zweite Bedingung stellt eine lineare Gleichung für die eine Unbekannte $r$ dar:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\implies 0 = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = -52 + 32r \iff r = \frac{13}{8}.$$

Damit erhält man den Höhenfußpunkt durch

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}, \; H = \left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right).$$

Da der Parameterwert $r$ für den Höhenfußpunkt $H$ *größer* als 1 ist, liegt $H$ nicht *zwischen* $A$ und $B$, sondern *außerhalb* der Strecke $AB$, und zwar auf der Seite von $B$. Die Länge $h_C$ der Höhe durch $C$ ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, also

$$h_C = |\overrightarrow{CH}| = \frac{3}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12\,.$$

<u>Höhe durch $B$</u>: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Höhenfußpunkt $H$ ist nun gekennzeichnet durch

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -52 + 89r = 0 \iff r = \frac{52}{89}.$$

Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Höhenfußpunkt auf der Dreiecksseite *zwischen* $A$ und $C$. Explizit ergibt sich

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{52}{89}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 438 \\ 683 \end{pmatrix}, \ H = (\frac{438}{89}, \frac{683}{89}) \approx (4,92; 7,67)\,.$$

Die Länge $h_B$ der Höhe ist

$$|\overrightarrow{BH}| = \left|\begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix}\right| = \frac{12}{89} \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \frac{12}{89}\sqrt{89} \approx 1{,}27\,.$$

Die Ergebnisse für die <u>Höhe durch $A$</u>:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

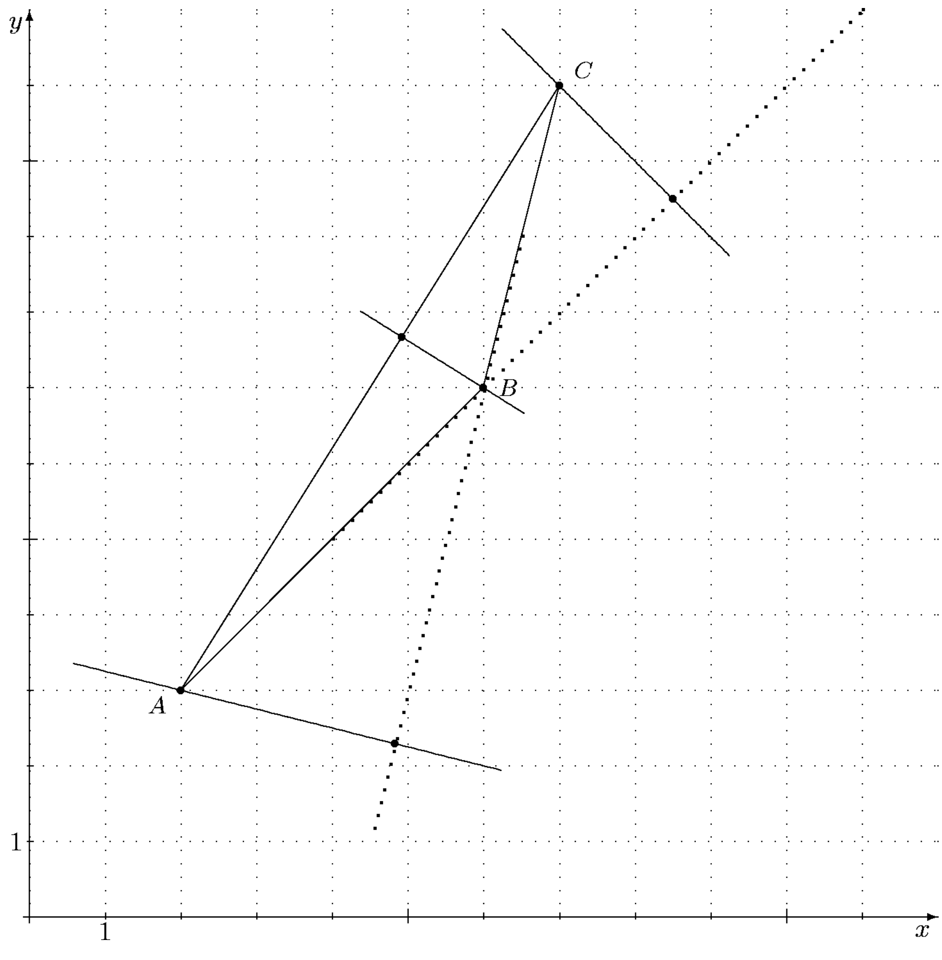
$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff r = -\frac{20}{17},$$

$$\implies H = (\frac{82}{17}, \frac{39}{17}) \approx (4,82; 2,29)$$

$$\implies \overrightarrow{AH} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 48 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{12}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies h_A = \frac{12}{17}\sqrt{17} \approx 2{,}91\,.$$

Da der Parameterwert $r$ negativ ist, liegt der Höhenfußpunkt nicht *zwischen* $B$ und $C$, sondern *außerhalb,* und zwar auf der Seite von $B$.
Skizze:



c) Die Flächenberechnung dient hier nur zur Demonstration der bereits erzielten Ergebnisse. Wir werden später bessere Verfahren kennenlernen.
Die Fläche des Dreiecks ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot d(A,B) \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot |\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}| \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 6\,.$$

Natürlich kann man auch jede andere Seite mit der dazugehörenden Höhe benutzen, um die Fläche zu berechnen:

$$F = \frac{1}{2} \cdot d(A,C) \cdot h_B = \frac{1}{2} \cdot |\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}| \cdot \frac{12}{89}\sqrt{89} = \frac{1}{2}\sqrt{89} \cdot \frac{12}{89}\sqrt{89} = 6\,,$$
$$F = \frac{1}{2} \cdot d(B,C) \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot |\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}| \cdot \frac{12}{17}\sqrt{17} = \frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot \frac{12}{17}\sqrt{17} = 6\,.$$

Sollten Ihnen hier Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Werten (Kantenvektor, Lotvektor, Parameter $r$, Seitenlänge, Radikand, Fläche) auffallen, so sind diese nicht zufällig und werden demnächst im Unterricht aufgeklärt. Sie führen dann zu einer äußerst einfachen Methode zur vektoriellen Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left| \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |4 \cdot 8 - 4 \cdot 5| = 6\,.$$

2) Wir berechnen den Schwerpunkt $S = (5,7)$ gemäß der Formel $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ und dann die Fußpunkte der *Lote von $S$ auf die Dreiecksseiten.*

<u>Lot von $S$ auf $g(A,B)$</u>: Der Lotfußpunkt $H$ soll auf der Geraden $g(A,B)$ liegen, also $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB}$ mit einer (gesuchten) Zahl $r \in \mathbb{R}$. Da $H$ der Lotfußpunkt von $S$ auf $g(A,B)$ ist, muss $\overrightarrow{SH}$ zu $\overrightarrow{AB}$ orthogonal sein:

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB}) \bullet \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\iff 0 = -28 + 32r \iff r = \frac{7}{8}\,.$$

Da der Parameterwert $r$ zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Lotfußpunkt *zwischen* $A$ und $B$: Das Dreieck kann auf dieser Dreiecksseite stabil stehen.

<u>Lot von $S$ auf $g(B,C)$</u>: $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC}$ und

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 17r \iff r = -\frac{1}{17}\,.$$

Da der Parameterwert negativ ist, liegt der Lotfußpunkt nicht zwischen den Eckpunkten (wenn auch sehr dicht bei der Ecke $B$); auf der Dreiecksseite $BC$ kann das Dreieck nicht stabil stehen. Es kippt zu der Seite, bei der $B$ liegt, (und bleibt dann auf der Dreiecksseite durch $A, B$ stabil liegen).

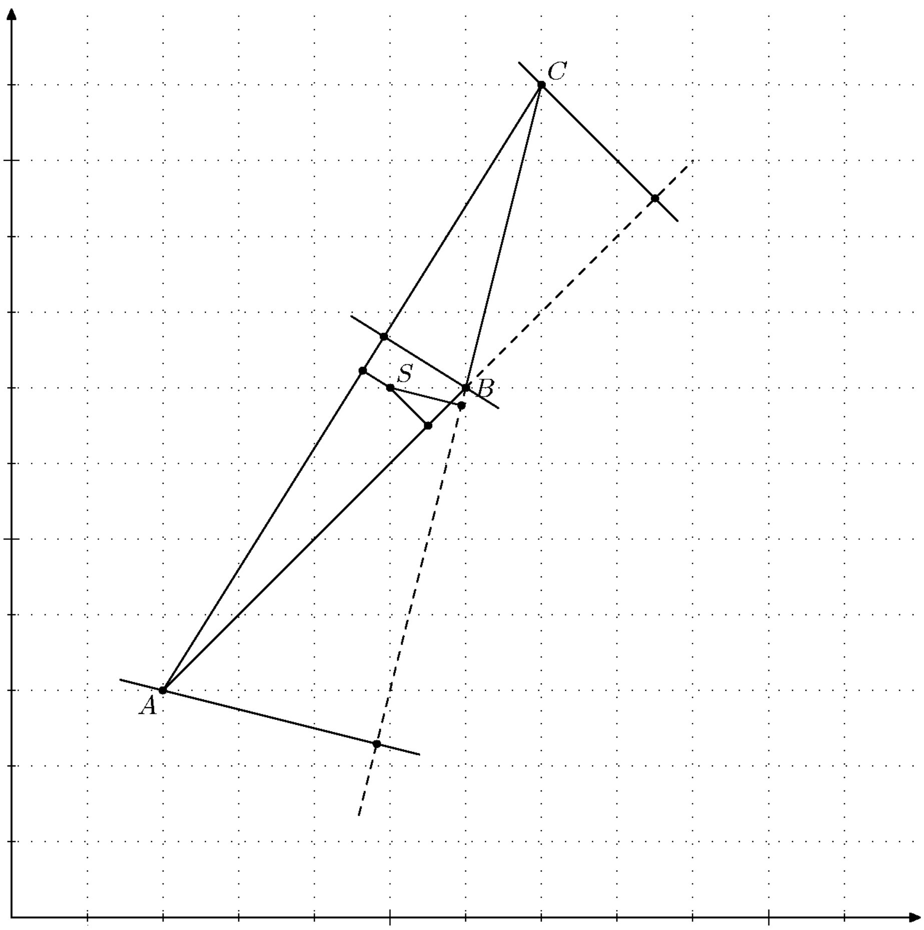
<u>Lot von $S$ auf $g(A,C)$</u>: $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC}$ und

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}) + r\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = -47 + 89r \iff r = \frac{47}{89}\,.$$

Wieder liegt der Lotfußpunkt des Schwerpunktes *zwischen* den Eckpunkten und wieder ist das Dreieck auf dieser Seite standfest.
[In diesem letzten Fall braucht man nichts zu rechnen, wenn man die anschaulich einsichtige Tatsache beweist: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Ecken, so gilt dies erst recht für den Fußpunkt des Schwerpunktlotes. Wenn man dies zu beweisen versucht, findet man eine allgemeingültige Beziehung zwischen Höhenfußpunkt, Fußpunkt der Schwerpunktlotes und Seitenmittelpunkt: Der Lotfußpunkt liegt *zwischen* Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Für die Parameterwerte $r_H$ des Höhenfußpunktes, $r_L$ des Lotfußpunktes und $r_M = \frac{1}{2}$ des Mittelpunktes bedeutet dies:

$$r_L = r_H + \frac{2}{3}(r_M - r_H) = r_H + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} r_H = \frac{1}{3} r_H + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(r_H + 1)\,.$$

Vergleichen Sie diese Formel mit den Ergebnissen für $r_H$ aus Aufgabe 1) und für $r_L$ in Aufgabe 2). ]
Hier nun die Skizze mit den Lotfußpunkten vom Schwerpunkt $S$ auf die Dreiecksseiten. Sie erkennen, dass nur das Lot von $S$ auf die Seite $g(B,C)$ nicht zwischen den Eckpunkten liegt und das Dreieck auf dieser Seite nicht stabil steht, sondern über die Ecke $B$ auf die Seite $g(A,B)$ umkippt.




An dieser Skizze lassen sich auch die für die Lotfußpunkte des Schwerpunktes gefundenen Parameterwerte nachmessen.

3) a) Diese Aufgabe ist wie Aufgabe 1, jedoch mit einem Dreieck im Raum.

Wir bestimmen im Dreieck $ABC$ den Fußpunkt $H$ der Höhe durch $C$. Also gilt:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ muss gelten

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -15 + 105r \iff r = \frac{1}{7}$$

und daher

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}, \; H = (\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{6}{7}).$$

Der gesuchte Abstand ist daher die Länge der entsprechenden Höhe

$$d(C, g(A,B)) = h_C = \left|\overrightarrow{CH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{7}\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{7}\sqrt{21}.$$

Als Fläche des Dreiecks ergibt sich somit

$$F = \frac{1}{2}\cdot d(A,B)\cdot h_C = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|\cdot\frac{4}{7}\sqrt{21} = \frac{1}{2}\sqrt{105}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{21} = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42.$$

b) Zur Bestimmung der Oberfläche des Tetraeders muss man die obige Rechnung noch dreimal durchführen. Dies ist nur dann sinnvoll, wenn man die Berechnung von Lotfußpunkten auf Geraden üben will, denn es gibt andere, direktere Methoden zur Flächenberechnung mit Hilfe des *Vektorproduktes* (siehe später):

$$F = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 12\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = 6\sqrt{5}.$$

Man kann die nachfolgend angegebenen Dreiecksflächen als Kontrollergebnisse benutzen. Es bezeichne $F(ABC)$ die Fläche des Dreiecks $ABC$:

$$F(ABC) = 6\sqrt{5}, \quad F(ABD) = 4\sqrt{41}, \quad F(ACD) = 6, \quad F(BCD) = 20\sqrt{2}.$$

Die Oberfläche ist dann die Summe dieser Dreiecksflächen, ungefähr 73,31.

4) a) Spitze $D$, Bodenfläche $ABC$: Der Höhenfußpunkt heiße $H$; er gehört zur Ebene durch $ABC$, also

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\overrightarrow{DH}$ zur Ebene durch $ABC$ orthogonal sein soll, muss gelten

$$0 = \overrightarrow{DH} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{DH} \bullet \overrightarrow{AC}\,.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekannten Parameterwerte $r, s$:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{DA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -16 + 105r + 15s \\ 0 &= \overrightarrow{DA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = 15r + 9s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Gleichungssystems ist $r = \frac{1}{5}$, $s = -\frac{1}{3}$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \; H = (0, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5})\,.$$

Die Höhe des Tetraeders ist der Abstand der Spitze vom Lotfußpunkt, hier also der Abstand von $D$ und $H$:

$$\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{DH}\right| = \frac{8}{5}\sqrt{5} \approx 3{,}58\,.$$

Spitze $C$, Bodenfläche $ABD$: Es gilt für den Höhenfußpunkt $H$ auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für $r, s$ lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = -15 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = 16r + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = \frac{15}{89}$, $s = -\frac{15}{89}$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{15}{89}\overrightarrow{AB} - \frac{15}{89}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{15}{89}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{15}{89}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{75}{89} \\ 1 \\ -\frac{58}{89} \end{pmatrix}$$

und der Höhenfußpunkt dann $H = (\frac{75}{89}, 1, -\frac{58}{89})$.

Die Höhe des Tetraeders ist der Abstand der Spitze vom Lotfußpunkt, hier also der Abstand von $C$ und $H$:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} \frac{75}{89} \\ 1 \\ -\frac{58}{89} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{24}{89}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{CH}\right| \approx \frac{24}{89}\sqrt{89} = 2{,}54\,.$$

<u>Spitze $B$, Bodenfläche $ACD$</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt $H$ auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für $r, s$ lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = -15 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -16 + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = \frac{5}{3}$, $s = 1$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und der Höhenfußpunkt dann $H = (5, 5, -2)$.
<u>Spitze $A$, Bodenfläche $BCD$</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt $H$ auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen für $r, s$ lauten dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC} = -90 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = -89 + 74r + 89s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = \frac{89}{125}$, $s = \frac{51}{125}$. Der Ortsvektor des Höhenfußpunktes ist daher

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{89}{125}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{51}{125}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{192}{125} \\ \frac{269}{125} \\ -\frac{74}{25} \end{pmatrix}$$

und der Höhenfußpunkt dann $H = (\frac{192}{125}, \frac{269}{125}, -\frac{74}{25})$.
b) Das Volumen eines Tetraeders ist Grundfläche mal Höhe geteilt durch 3. (Diese Formel werden wir evtl. bei der Wiederholung der Integralrechnung begründen.) Mit der in der vorangehenden Aufgabe berechneten Fläche $F$ des Dreiecks $ABC$

sowie dem Fußpunkt $H = (0, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5})$ der Tetraederhöhe durch $D$ erhalten wir als Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot |\overrightarrow{DH}| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{8}{5}\sqrt{5} = 16\,.$$

Wieder fallen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Werten auf und, obwohl Grundfläche und Höhe irrational sind ($\sqrt{5}$!), ist das Volumen eine ganze Zahl. Auch dies ist wieder kein Zufall, wie wir bei der Behandlung des Vektorproduktes sehen werden:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} \cdot \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 4 = 16\,. \end{aligned}$$

5) Zwei Kanten sind genau dann windschief, wenn sie nicht in einer Ebene liegen, und dies bedeutet, wenn sie alle 4 Ecken des Tetraeders enthalten.
Abstand $g(A, B)$ zu $g(C, D)$: Wir betrachten auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt:

$$X \in g(A, B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$Y \in g(C, D) \iff \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun die Punkte, für die $\overrightarrow{XY}$ orthogonal ist zu beiden Geraden, d. h. zu beiden Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AC} - r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AB} = \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 15 - 105r + s \cdot 1$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{CD} = \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -9 - r \cdot 1 + s \cdot 25$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir $r = \frac{6}{41}$, $s = \frac{15}{41}$.
Ortsvektoren der Fußpunkte des gemeinsamen Lotes:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \frac{6}{41}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{6}{41} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{41} \\ \frac{65}{41} \\ -\frac{34}{41} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OC} + \frac{15}{41}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{15}{41} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{78}{41} \\ \frac{101}{41} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Abstand der Geraden ist die Länge des gemeinsamen Lotvektors

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 48 \\ 36 \\ -48 \end{pmatrix} = \frac{12}{41}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{XY}\right| = \frac{12}{41}\sqrt{41} \approx 1{,}87\,.$$

<u>Abstand $g(A,C)$ zu $g(B,D)$:</u> Wir betrachten auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt:

$$X \in g(A,C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y \in g(B,D) \iff \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun die Punkte, für die $\overrightarrow{XY}$ orthogonal ist zu beiden Geraden, d. h. zu beiden Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} - r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AC} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 15 - 9r - 15s$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{BD} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = -89 + 15r + 89s$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir $r = 0$, $s = 1$. Die Fußpunkte sind also $A$ und $D$. Ihr Abstand ist $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$.

<u>Abstand $g(A,D)$ zu $g(B,C)$:</u> Wir betrachten auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt:

$$X \in g(A,D) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y \in g(B,C) \iff \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun die Punkte, für die $\overrightarrow{XY}$ orthogonal ist zu beiden Geraden, d. h. zu beiden Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} - r\overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{AD} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 - 16r - 16s$$

$$0 = \overrightarrow{XY} \bullet \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = -90 + 16r + 84s$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir $r = -\frac{3}{34}$, $s = \frac{37}{34}$. Ortsvektoren der Fußpunkte des gemeinsamen Lotes:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} - \frac{3}{34}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{34}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{17} \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + \frac{37}{34}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{37}{34}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{17} \\ \frac{11}{17} \\ -\frac{46}{17} \end{pmatrix}.$$

Abstand der Geraden ist die Länge des gemeinsamen Lotvektors

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{12}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{XY}\right| = \frac{12}{17}\sqrt{17} \approx 2{,}91\,.$$

6) Wir berechnen den Schwerpunkt $S$ des Tetraeders gemäß $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ und erhalten $S = (2, 3, 0)$ und bestimmen dann die Lotfußpunkte von $S$ aus auf die vier Begrenzungsflächen des Tetraeders.
Seitenfläche $ABC$: Der Lotfußpunkt heiße $H$; er gehört zur Ebene durch $ABC$, also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

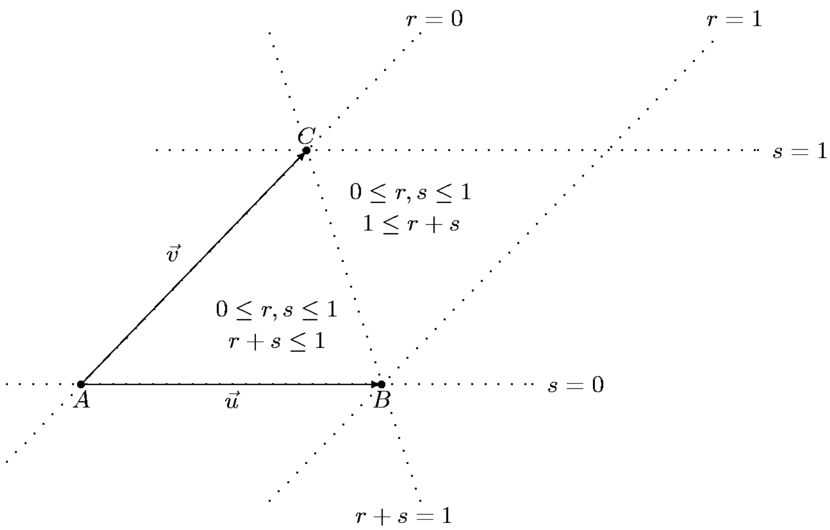
Da $SH$ zur Ebene durch $ABC$ orthogonal sein soll, muss gelten

$$0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{SH} \bullet \overrightarrow{AC}\,.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekannten Parameterwerte $r, s$:

$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 15s$$
$$0 = \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 15r + 9s\,.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 3/10$, $s = 1/6$. Beide Parameterwerte liegen zwischen 0 und 1, daher liegt der zugehörige Punkt $H$ innerhalb des *Parallelogramms,* das von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ bestimmt wird (siehe Skizze).



Die Frage der Aufgabenstellung ist aber, ob $H$ innerhalb des *Dreiecks* $ABC$ liegt. Dazu muss zusätzlich gelten: $r + s \leq 1$. (Begründung: Auf der Geraden durch $B$ und $C$ liegen die Punkte $X$, für die die Parameterwerte zusammen genau 1 ergeben; die Punkte mit $r+s < 1$ liegen ganz auf einer Seite der Geraden $g(B,C)$, und zwar bei $A$.) Insgesamt:

$$H \text{ liegt } \textit{im} \text{ Dreieck } ABC \iff r,s \geq 0 \text{ und } r+s \leq 1\,.$$

Für die oben gefundenen Werte $r = 3/10$ und $s = 1/6$ sind beide Bedingungen erfüllt: Der Lotfußpunkt $H$ liegt *im* Dreieck $ABC$; das Tetraeder kann auf dieser Seite stabil stehen.

<u>Seitenfläche $ABD$</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt $H$ auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für $r,s$ lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16r + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 26/89$, $s = 37/178$. Es gilt für diese Werte $r,s \geq 0$ und $r+s \leq 1$, also liegt wieder der Lotfußpunkt $H$ *in* dem entsprechenden Seitendreieck $ABD$: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

<u>Seitenfläche $ACD$</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt $H$ auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}) + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für $r,s$ lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = -6 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = -8 + 16s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 2/3$, $s = 1/2$. Es gilt für diese Werte zwar wieder $r,s \geq 0$, aber nun ist $r + s > 1$, also liegt der Lotfußpunkt $H$ *außerhalb* des entsprechenden Seitendreiecks $ACD$: Auf dieser Seite kann das Tetraeder nicht stabil stehen.

<u>Seitenfläche $BCD$</u>: Es gilt für den Lotfußpunkt $H$ auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für $r,s$ lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC} = -62 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{SB} \bullet \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = -63 + 74r + 89s\,. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 107/250$, $s = 44/125$. Wegen $r,s \geq 0$ und $r+s \leq 1$, liegt der Lotfußpunkt $H$ wieder *in* dem entsprechenden Seitendreieck $BCD$: Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.