Übungen (7)

1) a) Wir betrachten die Pyramide aus Übung (5), Aufgabe 6 mit den Eckpunkten $A = (3, -4, -1)$, $B = (5, 0, 3)$, $C = (9, 2, -1)$, $D = (7, -2, -5)$ und $E = (0, 5, -4)$. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Bodenebene dieser Pyramide. [Zur Kontrolle: $2x - 2y + z = 13$.]
b) Berechnen Sie mit der Hesse'schen Abstandsformel die Höhe der Pyramide.

2) Wir gehen aus von dem Dreieck von Übungen (6), Aufgabe 1 mit den Eckpunkten $A = (2, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (7, 11)$.
a) Bestimmen Sie Normalenvektoren für die Dreiecksseiten und damit dann Gleichungen für sie.
[Zur Kontrolle: $g(A, B):\ x - y = -1$, $g(A, C):\ 8x - 5y = 1$, $g(B, C):\ 4x - y = 17$.]
b) Berechnen Sie die Längen der drei Höhen des Dreiecks.
c) Berechnen Sie erneut die Höhenfußpunkte.

3) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ sowie $D = (0, 1, 2)$.
   a) Zeigen Sie, dass diese 4 Punkte ein Tetraeder bilden.
   b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene e durch A, B, C.
   c) Bestimmen Sie die Höhe des Tetraeders (e als Boden betrachtet).
   d) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene e', die parallel zur Bodenebene e durch den Schwerpunkt S des Tetraeders verläuft.
   e) Wir 'zersägen' das Tetraeder längs der Ebene e'. Bestimmen Sie die neuen Eckpunkte A', B', C'.

4) a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass gegenüberliegende Kanten eines beliebigen Tetraeders windschief sein müssen.
   b) Bestimmen Sie für das Tetraeder der vorangehenden Aufgabe die Abstände der gegenüberliegenden Kanten.

Übungen (7) — Lösungen

1) a) Da gemäß Übung (5), Aufgabe 6 die Pyramide *senkrecht* (man sagt auch *gerade*) ist, ist der Vektor $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für die Bodenebene $e = e(A,B,C)$. Damit ist auch $\vec{n} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e und eine Gleichung für e hat die Form $2x - 2y + z = d$. Den Wert von d bestimmen wir durch Einsetzen von B in diese Gleichung:

$$B \in e \iff 2 \cdot 5 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = d \iff d = 13\,.$$

Wir erhalten also die als Kontrollergebnis angegebene Gleichung für e:

$$X = (x,y,z) \in e \iff 2x - 2y + z = 13\,.$$

Ohne Verwendung der Vorkenntnisse aus Übung (5) kann man mit Hilfe des Vektorproduktes einen Normalenvektor zur Ebene e ermitteln. Wir wählen zwei beliebige linear unabhängige Richtungsvektoren für e aus, etwa

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und berechnen deren Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir (nach Division durch -12) denselben Normalenvektor $\vec{n}$ und damit dieselbe Gleichung für e wie oben.

b) Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes $E = (0,5,-4)$ von der Ebene e durch A,B,C,D. Dieser berechnet sich nach der Hesse'schen Abstandsformel gemäß

$$d(P,e) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 4 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{27}{\sqrt{9}} = 9\,.$$

2) a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor ist $\vec{n}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und eine Gleichung für $g(A,B)$ daher von der Form $x - y = d$. Setzt man $A = (2,3)$ ein, so erhält man $2 - 3 = d$, also $d = -1$. Eine Gleichung für $g(A,B)$ ist also $x - y = -1$.

Es ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $8x - 5y = d$ eine Gleichung für $g(A,C)$ und

nach Einsetzen von $A = (2, 3)$ ergibt sich $16 - 15 = d$, also $d = 1$. Die gefundene Gleichung ist daher $8x - 5y = 1$.
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, Gleichung $4x - y = d$, Einsetzen von $B = (6, 7)$ ergibt $24 - 7 = d$, also $d = 17$ und die Gleichung wie angegeben.
b) Berechnung der Abstände der Eckpunkte von den gegenüberliegenden Seiten:

$$\begin{aligned} d(C, g(A,B)) &= \frac{|7 - 11 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,, \\ d(B, g(A,C)) &= \frac{|8 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{64 + 25}} = \frac{12}{\sqrt{89}}\,, \\ d(A, g(B,C)) &= \frac{|8 - 3 - 17|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}}\,. \end{aligned}$$

c) Berechnung der Höhenfußpunkte:
<u>Höhe durch C</u>: Eine Gleichung für $g(A, B)$ ist $x - y + 1 = 0$. Damit gilt für den Höhenfußpunkt H_c:

$$\overrightarrow{H_cC} = r \cdot \vec{n}_c = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r = \frac{7 - 11 + 1}{1^2 + 1^2} = -\frac{3}{2}\,,$$

also $\overrightarrow{OH_c} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{H_cC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit $H_c = (\frac{17}{2}, \frac{19}{2})$.
<u>Höhe durch A</u>: Eine Gleichung für $g(B, C)$ ist $4x - y - 17 = 0$. Damit gilt für den Fußpunkt H_a

$$\overrightarrow{H_aA} = s \cdot \vec{n}_a = s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s = \frac{4 \cdot 2 - 3 - 17}{4^2 + 1^2} = -\frac{12}{17}\,,$$

also

$$\overrightarrow{OH_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{12}{17} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit $H_a = (\frac{82}{17}, \frac{39}{17})$.
<u>Höhe durch B</u>: Eine Gleichung für $g(A, C)$ ist $8x - 5y - 1 = 0$. Damit ergibt sich für den Fußpunkt H_b:

$$\overrightarrow{H_bB} = t \cdot \vec{n}_b = t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t = \frac{8 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 1}{64 + 25} = \frac{12}{89}$$

also

$$\overrightarrow{OH_b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{12}{89} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix},$$

und damit $H_b = (\frac{438}{89}, \frac{683}{89})$.

3) a) Wir lösen zuerst b) und verifizieren dann durch einfaches Einsetzen, dass D die Koordinatengleichung der Bodenebene e nicht erfüllt, also nicht zu e gehört.
b) Da es sich um eine Ebene (Dimension 2) im 3-dimensionalen Raum handelt, kann man mit Hilfe des Vektorproduktes zuerst einen Normalenvektor und daraus

dann eine Normalengleichung bestimmen.
Zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihr Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit ist $\vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e. Eine Koordinatengleichung für e lautet daher $x + 2y - z = d$ und wir bestimmen d durch Einsetzen eines der drei Punkte A, B, C. Wir setzen $A = (2, 1, 0)$ ein und erhalten $2 + 2 = d$. Damit ist $x + 2y - z = 4$ eine Koordinatengleichung für e.
c) Wir benutzen die Hessesche Abstandsformel

$$d(D, e) = \frac{|-2 + 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1{,}63\,.$$

d) Der Schwerpunkt eines Tetraeders ist gegeben durch $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, also $S = (\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Da e' zu $e = e(A, B, C)$ parallel sein soll, haben beide Ebenen dieselben Normalenvektoren, eine Gleichung für e' also auch die Form $x + 2y - z = d'$. Zur Bestimmung von d' setzen wir den Punkt S in diese Gleichung ein:

$$\frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = d' \iff d' = 3\,.$$

Eine Koordinatengleichung für e' ist daher $x + 2y - z = 3$.
e) Wir bestimmen die Schnittpunkte der Ebene e' mit den drei Kanten $g(D, A)$, $g(D, B)$, $g(D, C)$:

$$X = (x, y, z) \in g(D, A) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Ein solcher Punkt X liegt nun in e', wenn er die Koordinatengleichung für e' erfüllt, wenn also gilt

$$x + 2y - z = 3 \iff (2t) + 2 \cdot 1 - (2 - 2t) = 3 \iff 4t = 3 \iff t = \frac{3}{4}\,.$$

Damit ist der gesuchte Schnittpunkt A' gegeben durch

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A' = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})\,.$$

Genauso geht man für die beiden anderen Kanten vor. Man erhält ebenfalls jeweils den Parameterwert $t = \frac{3}{4}$ (wenn man die Parameterdarstellungen in gleicher Weise mit dem Basispunkt D aufstellt). Die gesuchten Punkte sind dann $B' = (\frac{9}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ und $C' = (3, 1, 2)$.
Zusatzfrage: Warum ergibt sich immer derselbe Parameterwert?

4) a) Sei $ABCD$ ein beliebiges Tetraeder und angenommen, die Kanten $g(A, B)$, $g(C, D)$ wären nicht windschief. Dann lägen beide Geraden und mit ihnen die 4 Punkte A, B, C, D in einer Ebene; Widerspruch zur Definition eines Tetraeders.
b) Der Abstand zweier Geraden ist der kürzeste Abstand der Punkte dieser Geraden. Dieser wird angenommen für die Punkte der Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht zu beiden Geraden verläuft.
1. Abstand zwischen $g_1 = g(A, B)$ und $g_2 = g(C, D)$:
Gesucht sind $P \in g(A, B)$ und $Q \in g(C, D)$ mit $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$.

$$P \in g(A, B) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$Q \in g(C, D) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Gesucht sind nun $r, s \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff -8 + 16s + 4r = 0 \ \wedge \ -4s - 3r = 0$$

$$\iff 4s + r = 2 \ \wedge \ 4s + 3r = 0 \iff r = -1 \ \wedge \ s = \frac{3}{4}.$$

Damit erhält man $P = (1, 2, 1)$ und $Q = (1, 1, 2)$. [Man überprüft leicht, dass $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tatsächlich zu beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ senkrecht ist.]
Der Abstand der beiden Geraden beträgt nun

$$d(g_1, g_2) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}.$$

2. Abstand zwischen $g_3 = g(A, C)$ und $g_4 = g(B, D)$:

$$P \in g(A, C) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$Q \in g(B, D) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff -7 + 19s = 0 \ \wedge \ -4r = 0 \iff r = 0 \ \wedge \ s = \frac{7}{19}.$$

Damit erhält man $P = A$ und $Q = (\frac{36}{19}, \frac{7}{19}, \frac{2}{19})$ und als Abstand der Geraden

$$d(g_3, g_4) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{19}\sqrt{38} \approx 0{,}65\,.$$

3. Abstand zwischen $g_5 = g(A, D)$ und $g_6 = g(B, C)$:

$$P \in g(A, D) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$Q \in g(B, C) \iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff -3 + 11s - 4r = 0 \ \wedge\ -4 + 4s - 8r = 0 \iff s = \frac{1}{9} \ \wedge\ r = -\frac{4}{9}\,.$$

Damit erhält man $P = (\frac{26}{9}, 1, -\frac{8}{9})$ und $Q = (\frac{28}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{3})$ sowie als Abstand der beiden Geraden

$$d(g_5, g_6) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{2}{9}\sqrt{18} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}94\,.$$

Ich empfehle dringend, bei derartigen Rechnungen am Ende zur Kontrolle zu überprüfen, ob der gefundene Abstandsvektor $\overrightarrow{PQ}$ bzw. ein glattes Vielfaches davon (hier $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$) tatsächlich orthogonal zu den gewählten Richtungsvektoren der beiden Geraden ist (hier $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$). Dies ist sehr schnell durchgeführt und deckt evtl. Rechenfehler auf.

b′) Lösung von b) unter Verwendung von Vektorprodukt und Abstandsformel windschiefer Geraden (siehe Skript). Wir bestimmen einen gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ zu den beiden windschiefen Geraden als Vektorprodukt von zwei Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ der beiden Geraden, wir wählen je einen Punkt P bzw. Q auf den Geraden und berechnen damit den Abstand:

$$d = \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}\,.$$

1. Abstand zwischen $g_1 = g(A, B)$ und $g_2 = g(C, D)$: Dann wählen wir

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorprodukt erhalten wir

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und damit dann

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -8\,, \quad |\vec{n}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,, \quad d = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

2. Abstand zwischen $g_3 = g(A,C)$ und $g_4 = g(B,D)$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 8\,, \quad d = \frac{8}{\sqrt{152}} = \frac{2}{19}\sqrt{38}$$

3. Abstand zwischen $g_5 = g(A,D)$ und $g_6 = g(B,C)$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -8\,, \quad d = \frac{8}{\sqrt{72}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$