LS p. 102, Aufgabe 11

11 Ein Viereck hat die Eckpunkte O(0|0|0), P(2|3|5), Q(5|5|6), R(1|4|9).
Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Innenwinkel des Vierecks.

Dieses Viereck enthält *überstumpfe* Innenwinkel (= Winkel $> 180^0$). Die Untersuchung eines solchen Vierecks erfordert zusätzliche Überlegungen, die an dieser Stelle unvorbereitet und offenbar nicht beabsichtigt waren, denn:
1. Es ist die erste Aufgabe im Lehrbuch zur „Vermessung" eines *Vier*ecks.
2. Das im Lösungsheft angegebene Ergebnis

11 $\overline{OP} = 13$; $\overline{PQ} = 15$; $\overline{QR} = \sqrt{521} \approx 22{,}8$; $\overline{RO} = 3$
$\sphericalangle POR \approx 48{,}2°$; $\sphericalangle OPQ \approx 131{,}8°$; $\sphericalangle RQP \approx 154{,}9°$; $\sphericalangle ORQ \approx 25{,}1°$ f

enthält nur Winkel unter 180^0. Diese sind aber falsch.
3. Mehr noch: Keines der angegebenen Ergebnisse ist für die gestellte Aufgabe korrekt.
4. Die Ergebnisse können aber auch nicht zu einer anderen Aufgabenstellung gehören, denn die Angaben im Lösungsheftes sind in sich widersprüchlich: Es gibt kein Viereck mit den angegebenen Winkeln und Seitenlängen (entweder ist $|\overrightarrow{RO}| = 3$ zu klein oder die letzten beiden Winkel müssen ausgetauscht werden).

Lösung:
Hier nun die Lösung der formulierten Aufgabe mit den zusätzlichen Überlegungen.
Wie schon im Unterricht besprochen, muss bei der Angabe eines Vierecks die *Reihenfolge* der Eckpunkte *vorgegeben* werden.
Wir gehen von der (alphabetischen bzw. im Aufgabentext gegebenen) Reihenfolge $OPQR$ aus. Die Formulierung des Ergebnisses zeigt, dass dies wohl so intendiert war.
Seitenlängen: Deren Berechnung ist problemlos:

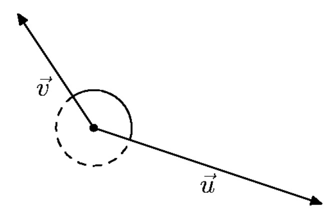
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{38} \approx 6{,}24\,,$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14} \approx 3{,}74\,,$$

$$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{26} \approx 5{,}1\,,$$

$$\left|\overrightarrow{RO}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}9\,.$$

Die Winkelproblematik: Diese beruht darauf, dass zwei Vektoren grundsätzlich *zwei* Winkel bestimmen:

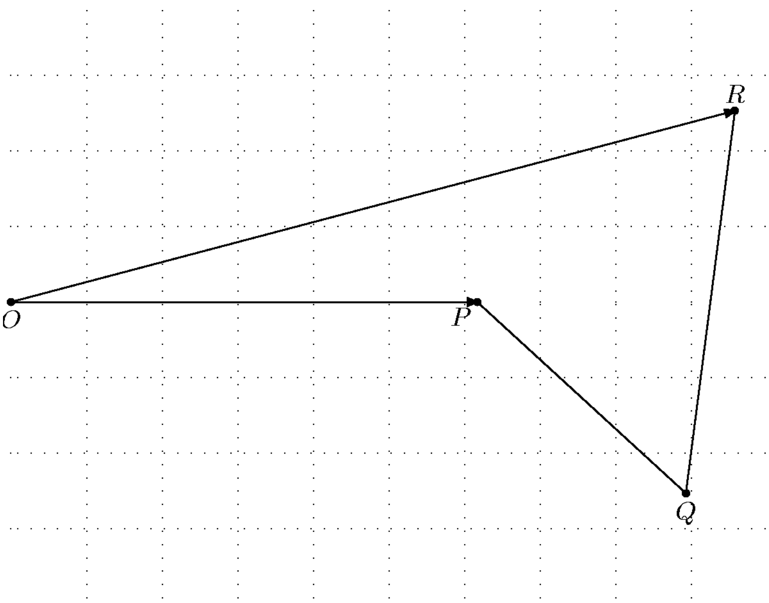


Definitionsgemäß versteht man unter dem Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aber den kleineren der beiden Winkel (oben mit einem durchgezogenen Winkelbogen gekennzeichnet). Dieser liegt folglich zwischen 0^0 und 180^0:

$$0^0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^0\,.$$

Da in einem *Drei*eck alle Innenwinkel $< 180^0$ sind (die Winkelsumme insgesamt beträgt nur 180^0), treten bei Dreiecksberechnungen die hier besprochenen Probleme nicht auf.

In (ebenen) Vierecken können jedoch auch überstumpfe Innenwinkel auftreten, wie folgende Skizze zeigt:



Zugleich zeigt dieses Beispiel, dass die Angabe der Reihenfolge der Eckpunkte notwendig ist. Bei einer anderen Reihenfolge (etwa $OQPR$ oder $OQRP$) erhält man andere Vierecke mit anderen Maßen (Seitenlängen, Winkel).

Winkelberechnung: Wir bestimmen zunächst einmal die Winkel *ohne* Berücksichtigung der genannten Problematik, d. h. wir berechnen für jeden Eckpunkt die Winkel zwischen den von diesen Ecken ausgehenden Kantenvektoren. Unsere Ergebnisse sind dann zwangsläufig Winkel zwischen 0^0 und 180^0.

$$\alpha = \angle ROP = \angle(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP}) : \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{98}\sqrt{38}} = \frac{59}{\sqrt{98}\sqrt{38}} \implies \alpha = 14{,}8^0$$

$$\beta = \angle OPQ = \angle(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ}) : \cos\beta = \frac{\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{38}\sqrt{14}} = \frac{-17}{\sqrt{38}\sqrt{14}} \implies \beta = 137{,}48^0$$

$$\gamma = \angle PQR = \angle(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}) : \cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{26}} \implies \gamma = 54{,}79^0$$

$$\delta = \angle QRO = \angle(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RO}) : \cos\delta = \frac{\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1\\-4\\-9\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\sqrt{98}} = \frac{19}{\sqrt{26}\sqrt{98}} \implies \delta = 67{,}89^0$$

Dass dies nicht die korrekten *Innenwinkel* sein können, erkennt man daran, dass die Winkelsumme *nicht* 360^0 ergibt. Dies müsste aber der Fall sein, da man das Viereck durch eine geeignete Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen kann (in unserem obigen Beispiel die Linie PR), in denen jeweils die Winkelsumme 180^0 beträgt.

Es bleibt aber die Frage, wo der überstumpfe Winkel liegt. Dazu berechnen wir die Winkelsumme ($14{,}8^0 + 137{,}48^0 + 54{,}79^0 + 67{,}89^0 = 274{,}96^0$) und stellen als Fehlbetrag zu 360^0 einen Winkel $\Delta\theta = 85{,}04^0$ fest. Es muss also einer der berechneten Winkel ein *Außenwinkel* sein. Ist $0^0 < \epsilon < 180^0$ der berechnete Außenwinkel, so ist der Innenwinkel notwendig $\epsilon' = 360^0 - \epsilon$. Dies vergrößert die Winkelsumme um den Betrag $\Delta\theta = \epsilon' - \epsilon = 360^0 - 2\epsilon$. Der gesuchte Außenwinkel ϵ berechnet sich also durch

$$\Delta\theta = 360^0 - 2\epsilon \iff \epsilon = 180^0 - \frac{\Delta\theta}{2} = 180^0 - \frac{85{,}04^0}{2} = 137{,}48^0\,.$$

Wir erkennen: Der Winkel β ist kein Innenwinkel, sondern ein Außenwinkel des Vierecks. Der korrekte Innenwinkel ist $\beta' = 360^0 - \beta = 360^0 - 137{,}48^0 = 222{,}52^0$.

Die obige Skizze stellt das Viereck maßstabsgerecht (mit korrekten Winkeln und Längen) dar. Messen Sie einmal nach (Längeneinheit 1cm).

Affines Koordinatensystem: Man kann die relative Lage der Eckpunkte zueinander auch ohne Winkelberechnung mit den Mitteln der affinen Geometrie erkennen: Man wählt eine Parameterdarstellung der Ebene, etwa zu den Eckpunkten OPR, also O als Ausgangspunkt und $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OR}$ als Richtungsvektoren:

$$X \in e \iff \overrightarrow{OX} = r\vec{u} + s\vec{v} = r\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OR} = r\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}.$$

Man untersucht nun, wo der Punkt Q in Relation zu den anderen drei Punkten liegt. Dazu setzen wir Q für X ein und bestimmen die zugehörigen Parameter r, s (womit dann auch gezeigt ist, dass Q in der Ebene $e = e(O, P, R)$ liegt):

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen wie üblich mit dem Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 6 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|r} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 13 & -13 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|r} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

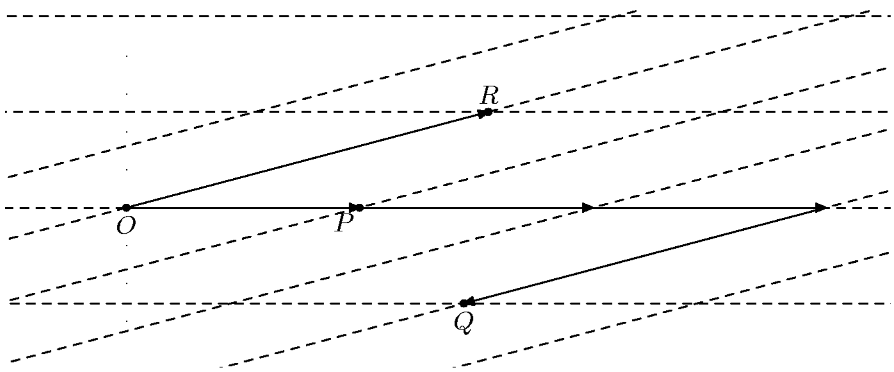
Offenbar ist das Gleichungssystem lösbar, d. h. $Q \in e$ und wir erhalten

$$5s = -5 \iff s = -1\,, \quad 2r - 1 = 5 \iff r = 3\,.$$

Dies bedeutet

$$\overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}\,.$$

Nun kann man eine Zeichnung des Vierecks $OPQR$ wie folgt erstellen:



Man erkennt, dass die Lage der Punkte zueinander genau die ist, die in der Skizze auf S. 2 maßstabsgerecht gezeichnet wurde. Man erkennt außerdem, dass das Viereck $OPQR$ bei P einen überstumpfen Innenwinkel haben muss.