Übungen aus dem Lehrbuch: S. 111/112

2) Von Normalengleichung zu Koordinatengleichung
3) Von Normalenvektor und Punkt zur Koordinatengleichung
4) Punktprobe
5) Von Koordinatengleichung zur Normalengleichung
6) Von Parameterdarstellung zu Normalen-/Koordinatengleichung
10) Koordinatengleichungen und parallele Ebenen
11) Geraden parallel zu Ebenen

Übungen aus dem Lehrbuch: S. 111/112 — Lösungen

2) Koordinatengleichungen sind 'ausmultiplizierte' Normalengleichungen:

a) $0 = \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4x_1 + 5x_2 - x_3 - (4\cdot(-1) + 5\cdot 2 - 5) = 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 1.$

Damit ist $4x_1 + 5x_2 - x_3 = 1$ eine Koordinatengleichung für E.

b) $E:\ 0 = \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_1 - 2x_2 - (-11) \iff x_1 + 2x_2 = 11.$

c) $E:\ 0 = \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5x_1 + x_3 - (-16) \iff 5x_1 + x_3 = -16.$

3) Die Normalengleichung einer Ebene durch den Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ hat die Form

$$0 = \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p})$$

und die Koordinatengleichung

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 (= d)\,.$$

a) Koordinatengleichung der Ebene: $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3(-1) - 2\cdot 2 + 7 = 0.$
b) $8x_2 + 3x_3 = 2.$
c) $7x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0.$

4) Wir bestimmen eine Koordinatengleichung (wie in 4) und überprüfen dann, ob die gegebenen Punkte diese Gleichung erfüllen. Wenn ja, liegen sie in der Ebene, andernfalls nicht.
Als Koordinategleichung für E erhalten wir: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2\cdot 2 - 5 - 2\cdot 7 = -15$

Ergebnisse: $A \notin E$, $B \in E$, $C \in E$, $D \notin E$.

5) Man bestimmt zunächst einen Punkt $P \in E$, indem man in der Koordinatengleichung zwei Koordinaten 0 setzt und die dritte dann bestimmt. Zusammen mit dem Normalenvektor $\vec{n}$, den man aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung zusammensetzt, erhält man dann eine Normalengleichung für E:

a) $x_1 = x_2 = 0 \implies 5x_3 = 10 \iff x_3 = 2$, also $P = (0, 0, 2)$. Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ erhält man die Normalengleichung

$$E:\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0\,.$$

b) $x_2 = x_3 = 0 \implies x_1 = 1$, also $P = (1, 0, 0) \in E$. Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man die Normalengleichung

$$E:\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0\,.$$

c) $x_2 = 0 \implies x_1 = \frac{17}{4}$, also $P = (\frac{17}{4}, 0, 0) \in E$. (Will man Brüche vermeiden, so wähle man $x_2 = -1 \implies x_1 = 5$, also $Q = (5, -1, 0) \in E$.) Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man die Normalengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0\,.$$

d) $x_3 = 1 \implies x_2 = 4$, also $P = (0, 4, 1) \in E$. Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ erhält man die Normalengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0\,.$$

e) Dies ist eine sehr einfache Koordinatengleichung: Die Ebene besteht genau aus den Punkten, deren Koordinatensumme 100 ergibt. Damit ist die Wahl von $P \in E$ völlig unproblematisch.
Schematisches Vorgehen: $x_2 = x_3 = 0 \implies x_1 = 100$, also $P = (100, 0, 0) \in E$. Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man die Normalengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0\,.$$

f) $P = (0, -5, 0) \in E$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, Normalengleichung:

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0\,.$$

(Spätestens hier fragt man sich, was der Sinn einer Normalengleichung sein soll, wenn eine Koordinatengleichung gegeben ist. Der einzige Unterschied zwischen beiden ist, dass in einer Normalengleichung explizit ein Punkt P der Ebene angegeben wird.)

6) Wir berechnen zu zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ der Ebene das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ und erhalten so $\vec{u} \times \vec{v}$ (oder ein passendes Vielfaches davon) als Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene. Zusammen mit dem in der Parameterdarstellung angegebenen Ausgangspunkt P können wir dann eine Normalengleichung $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ angeben und in eine Koordinatengleichung $\vec{n} \bullet \vec{x} = d (= \vec{n} \bullet \vec{p})$ umrechnen.
a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $P = (2, 1, 2) \in E$ ergibt die Normalen- bzw. Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0 \iff 9x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 29\,.$$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P = (6, 9, 1) \in E$ ergibt die Normalen- bzw. Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \iff 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -9\,.$$

c) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = (0, 0, 0) \in E$ ergibt die Normalen- bzw. Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} = 0 \iff 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 0\,.$$

d) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P = (13, 11, 12) \in E$ ergibt die Normalen- bzw. Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}\right] = 0 \iff -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5\,.$$

e) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, $P = (1, 0, 8) \in E$ ergibt die Normalen- bzw. Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = 0 \iff 25x_1 + 3x_2 - 11x_3 = -63\,.$$

f) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P = (0, 0, 0) \in E$ ergibt die Normalen- bzw. Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 26 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} = 0 \iff 26x_1 - 19x_2 + 3x_3 = 0\,.$$

10) a) Ebenen sind parallel, wenn sie linear abhängige Normalenvektoren haben. Wir bestimmen aus den gegebenen Koordinatengleichungen Normalenvektoren der Ebenen und untersuchen, welche davon Vielfache voneinander sind:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = -\vec{n}_2\,.$$

Damit sind $\vec{n}_2$, $\vec{n}_4$ linear abhängig und $E_2 \parallel E_4$. Weiter gibt es keine parallelen Ebenen unter diesen.

b) $F_1 \parallel E_1 \implies \vec{n}_1$ ist Normalenvektor zu F_1, also $2x_1 - x_2 + 3x_3 = d$ eine Koordinatengleichung für F_1. $P = (2,3,7) \in F_1 \implies d = 2\cdot 2 - 3 + 3\cdot 7 = 22$. Also $F_1 :\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 22$.

$F_2 \parallel E_2 \implies \vec{n}_2$ ist Normalenvektor zu F_2 und daher $3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = d$ eine Koordinatengleichung für F_2. $P = (2,3,7) \in F_2 \implies d = 3\cdot 2 + 5\cdot 3 + 3\cdot 7 = 42$. Also $F_2 :\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 42$.

11) Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene, wenn ein Normalenvektor der Ebene auch orthogonal ist zu der Geraden, d. h. zu einem Richtungsvektor der Geraden.

a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $g \parallel E$.

b) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \not\perp \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $g \nparallel E$.