Übungen aus dem Lehrbuch: S. 120–122

3) Abstände Punkt – Ebene
4) Abstände Punkt – Ebene
6) Werkstatthalle
7) Abstand paralleler Ebenen.
8) Abstand Ebene zu paralleler Gerade
9) Lotfußpunktberechnung
10) Dreieck und (dreiseitige) Pyramide

Übungen aus dem Lehrbuch — Lösungen

3) Wir benutzen die HESSEsche Abstandsformel.
a), b) Wir schreiben die Normalengleichung zunächst explizit als Koordinatengleichung aus und bestimmen die Länge des Normalenvektors:
a) $E:\ 0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1,\ |\vec{n}| = \sqrt{9} = 3.$

Jetzt können wir die Abstände mit Hilfe der HESSEschen Abstandsformel berechnen:

$$d(A,E) = d\big((2,0,2),E\big) = \frac{|2\cdot 2 - 0 + 2\cdot 2 + 1|}{3} = 3$$
$$d(B,E) = d\big((2,1,-8),E\big) = \frac{|2\cdot 2 - 1 + 2\cdot(-8) + 1|}{3} = 4\,,$$
$$d(C,E) = d\big((5,5,5),E\big) = \frac{|2\cdot 5 - 5 + 2\cdot 5 + 1|}{3} = \frac{16}{3}\,.$$

b) $E:\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 16 = 0,\ |\vec{n}| = \sqrt{36} = 6.$

$$d(A,E) = d\big((2,-1,2),E\big) = \frac{|4\cdot 2 - 4\cdot(-1) + 2\cdot 2 - 16|}{6} = 0\,,$$
$$d(B,E) = d\big((2,10,-6),E\big) = \frac{|4\cdot 2 - 4\cdot 10 + 2\cdot(-6) - 16|}{6} = 10\,,$$
$$d(C,E) = d\big((4,6,8),E\big) = \frac{|4\cdot 4 - 4\cdot 6 + 2\cdot 8 - 16|}{6} = \frac{4}{3}\,.$$

Bei c) und d) sind bereits Koordinatengleichungen gegeben. Man muss nur noch die Länge des Normalenvektors bestimmen und dann wie oben weiterrechnen.
c) $E:\ 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 = 0$ und $|\vec{n}| = \sqrt{225} = 15.$

$$d(A,E) = d\big((1,1,-2),E\big) = \frac{|2 - 10 + 11\cdot(-2)|}{15} = 2\,,$$
$$d(B,E) = d\big((5,1,0),E\big) = \frac{|2\cdot 5 - 10|}{15} = 0\,,$$
$$d(C,E) = d\big((1,3,3),E\big) = \frac{|2 - 10\cdot 3 + 11\cdot 3|}{15} = \frac{1}{3}\,,$$

d) $E:\ 6x_1 + 17x_2 - 6x_3 - 19 = 0$ und $|\vec{n}| = \sqrt{361} = 19.$

$$d(A,E) = d\big((2,3,1),E\big) = \frac{|6\cdot 2 + 17\cdot 3 - 6 - 19|}{19} = 2\,,$$
$$d(B,E) = d\big((5,6,3),E\big) = \frac{|6\cdot 5 + 17\cdot 6 - 6\cdot 3 - 19|}{19} = 5\,,$$
$$d(C,E) = d\big((0,0,0),E\big) = \frac{|-19|}{19} = 1\,.$$

Bei e) und f) sind Parameterdarstellungen gegeben. Hier muss man zunächst einen Normalenvektor und dann eine Normalen- bzw. Koordinatengleichung bestimmen.

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Ebenengleichung ist dann $6x_1 + 6x_2 + 7x_3 = d$ und zur Berechnung von d setze man den Punkt $(2, -1, -4) \in E$ ein: $d = 6 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot (-4) = -22$. Also:
$E:\ 6x_1 + 6_x + 7x_3 + 22 = 0$, $|\vec{n}| = \sqrt{121} = 11$.

$$\begin{aligned}
d(A,E) = d\big((4,-1,-1),E\big) &= \frac{|6 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) + 22|}{11} = 3\,, \\
d(B,E) = d\big((-1,2,-4),E\big) &= \frac{|6 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 7 \cdot (-4) + 22|}{11} = 0\,, \\
d(C,E) = d\big((7,3,4),E\big) &= \frac{|6 \cdot 7 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 22|}{11} = 10\,.
\end{aligned}$$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Ebenengleichung $x_1 + x_2 - x_3 = d$ mit $d = 2 + 0 - 2 = 0$. Also:
$E:\ x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
d(A,E) = d\big((0,0,1),E\big) &= \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}58\,, \\
d(B,E) = d\big((5,-7,-8),E\big) &= \frac{|5 - 7 + 8|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46\,, \\
d(C,E) = d\big((9,19,22),E\big) &= \frac{|9 + 19 - 22|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46\,.
\end{aligned}$$

4) Diese Aufgabe ist wie 3, e),f), man muss lediglich aus den Punkten zwei Richtungsvektoren bestimmen. Dann geht man wie in 3 e),f) vor.
a) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$, wähle als Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Ebenengleichung $3x_1 + 4x_3 = d$, $d = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$. Also
$e(P,Q,R):\ 3x_1 + 4x_3 - 22 = 0$ und $|\vec{n}| = \sqrt{25} = 5$.
[Probe: Alle drei Punkte P, Q, R erfüllen die Koordinatengleichung.]

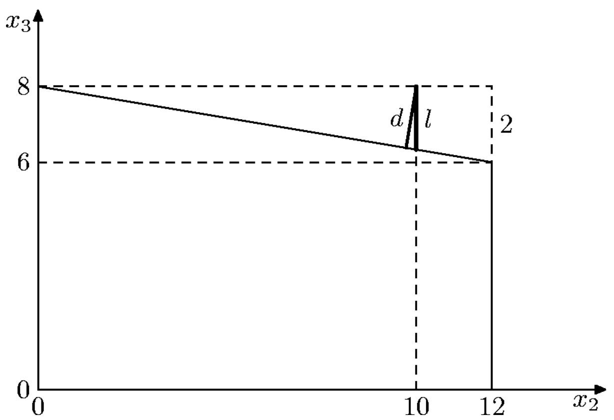
$$\begin{aligned}
d(A,e) = d\big((3,3,-4),e\big) &= \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) - 22|}{5} = \frac{29}{5} = 5{,}8\,, \\
d(B,e) = d\big((-4,-8,-18),e\big) &= \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-18) - 22|}{5} = \frac{106}{5} = 21{,}2\,, \\
d(C,e) = d\big((1,0,19),e\big) &= \frac{|3 + 4 \cdot 19 - 22|}{5} = \frac{57}{5} = 11{,}4\,.
\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, wähle Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ebenengleichung $2x_1 - 2x_2 + x_3 = d$ mit $d = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 6 = 4$. Also:

$e = e(P,Q,R):\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4 = 0$ und $|\vec{n}| = \sqrt{9} = 3$.

$$d(A,e) = d\big((4,4,-4),e\big) = \frac{|2\cdot 4 - 2\cdot 4 - 4 - 4|}{3} = \frac{8}{3}\,,$$
$$d(B,e) = d\big((5,-8,-1),e\big) = \frac{|2\cdot 5 - 2\cdot(-8) - 1 - 4|}{3} = 7\,,$$
$$d(C,e) = d\big((9,19,22),e\big) = \frac{|2\cdot 9 - 2\cdot 19 + 22 - 4|}{3} = 2\,,$$

6) 1. Elementargeometrische Lösung (Ansatz Müller):
Man betrachtet einen Querschnitt parallel zur Vorderseite der Halle durch das Abluftrohr (Schnitt mit der Ebene e: $x_1 = 10$). Dies ergibt folgendes Bild:



Aus dem Strahlensatz ergibt sich für l (Aufgabenteil b)

$$\frac{2}{l} = \frac{12}{10} \iff l = \frac{5}{3} \approx 1{,}67\,.$$

Für die Berechnung von d benutzen wir, dass das kleine rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse l und einer Kathete d ähnlich ist zu dem großen Dreieck (mit den Katheten 2 und 12 und der Hypotenuse $\sqrt{4+144} = 2\sqrt{37}$). Also gilt

$$\frac{d}{l} = \frac{12}{2\sqrt{37}} \iff d = \frac{6l}{\sqrt{37}} = \frac{10}{\sqrt{37}} \approx 1{,}64$$

2. Lösung mit Mitteln der Vektorrechnung (ohne Ausnutzung der Besonderheiten des gegebenen kartesischen Koordinatensystems).
a) Berechnet werden soll der Abstand des Punktes $R = (10,10,8)$ von der Dachebene e. Diese ist gegeben durch drei Punkte $A = (0,0,8)$ (hinten links), $B = (0,12,6)$ (hinten rechts) und $C = (20,0,8)$ (vorne links). Damit wird die Aufgabenstellung a) identisch mit den Fragestellungen von Aufgabe 4 und wir gehen genauso wie dort vor.
Bestimmung eines Normalenvektors mit Hilfe des Vektorproduktes: Korr.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ -240 \end{pmatrix}, \quad \text{wähle daher } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung einer Koordinatengleichung für die Dachebene e:

$$e: \ x_2 + 6x_3 = d\,, \quad A = (0,0,8) \in e \implies d = 0 + 6 \cdot 8 = 48\,.$$

Damit haben wir die Koordinatengleichung $e: \ x_2 + 6x_3 - 48 = 0$ und als Länge des Normalenvektors $|\vec{n}| = \sqrt{37}$. Gemäß der HESSE-Formel ist der Abstand

$$d = d(R,e) = d((10,10,8),e) = \frac{|10 + 6 \cdot 8 - 48|}{\sqrt{37}} = \frac{10}{\sqrt{37}}\,.$$

b) Die gesuchte Länge l ist der Abstand des Punktes R vom Schnittpunkt S der durch das Abluftrohr laufenden Gerade mit der Dachebene e. Man stellt daher eine Parameterdarstellung für die Gerade g durch das Rohr auf und setzt diese in die gefundene Ebenengleichung ein.
Sei g die Gerade durch den Punkt R mit 'lotrechter' Richtung, also parallel zur x_3-Achse. Die Richtung der x_3-Achse wird durch den dritten Einheitsvektor $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Also:

$$X \in g \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OR} + r \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 + r \end{pmatrix}.$$

Schnittpunktsbedingung für Punkte $X \in g$:

$$0 = x_2 + 6x_3 - 48 = 10 + 6(8 + r) - 48 = 10 + 6r \iff r = -\frac{5}{3}\,.$$

Damit gilt

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad l = |\overrightarrow{RS}| = |\frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}| = \frac{5}{3}\,.$$

7) a) Wir kennen zu beiden Ebenen Normalenvektoren und diese sind linear abhängig:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n}_E\,.$$

Damit sind die Ebenen parallel: $E \parallel F$.
Der Abstand paralleler Ebenen ist der Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene von der anderen Ebene. Wähle $Q = (6,-5,0) \in F$ und berechne

$$d(E,F) = d((6,-5,0),E) = \frac{\left|\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}} \approx 6{,}35\,.$$

b) Hier sind die gegebenen Normalenvektoren sogar gleich, die Ebenen also parallel und der Abstand

$$d(E,F) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

c) Die Koeffizienten der Koordinaten in einer Koordinatengleichung ergeben zusammen einen Normalenvektor für die jeweilige Ebene:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = -\vec{n}_E\,.$$

Diese sind Gegenvektoren zueinander, also linear abhängig, und die Ebenen folglich parallel.
Zur Abstandsberechnung bestimmt man zunächst einen Punkt P in einer Ebene: Man setze in der Ebenengleichung zwei der Koordinaten 0 und berechnet die dritte:

$$(x_1, 0, 0) \in E \iff 4x_1 = 25 \iff x_1 = \frac{25}{4}\,, \; P = (\frac{25}{4}, 0, 0) \in E\,.$$

Damit gemäß HESSE-Formel

$$d(E,F) = d(P,F) = \frac{|-4 \cdot \frac{25}{4} - 14|}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{39}{13} = 3\,.$$

d) Die Normalenvektoren der Ebenen

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\vec{n}_E$$

sind linear abhängig und die Ebenen daher parallel. Es ist $P = (\frac{9}{4}, 0, 0) \in E$ und daher

$$d(E,F) = d(P,F) = \frac{|-6 \cdot \frac{9}{4} - \frac{9}{2}|}{\sqrt{81}} = 2\,.$$

e) Um die Parallelität der beiden Ebenen nachzuweisen, berechnen wir zunächst aus den Richtungsvektoren mit Hilfe des Vektorproduktes Normalenvektoren und arbeiten dann wie oben weiter.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -19 \end{pmatrix} = \vec{n}_E\,, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ -95 \end{pmatrix} = \vec{n}_F = 5\vec{n}_E\,.$$

Damit sind die Ebenen parallel und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$ ein gemeinsamer Normalenvektor.
Mit den Punkten $P = (2, 5, -1) \in E$ und $Q = (1, -3, 0) \in F$ berechnen wir den Abstand der Ebenen

$$d(E,F) = \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{16+64+361}} = \frac{49}{21} = \frac{7}{3}\,.$$

f) Wieder berechnen wir Normalenvektoren

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_E\,.$$

Damit sind E und F parallel und $\vec{n}_E$ ein gemeinsamer Normalenvektor. Mit $P = (2,3,5) \in E$ und $Q = (1,3,7) \in F$ berechnen wir den Abstand der Ebenen

$$d(E,F) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9}} = 0\,.$$

Dies bedeutet, die beiden Ebenen sind identisch!

8) a) Eine Gerade g ist parallel zu einer Ebene e, wenn ein Normalenvektor der Ebene auch Normalenvektor zu der Gerade ist, wenn also ein Normalenvektor $\vec{n}_e$ von e orthogonal ist zu einem Richtungsvektor $\vec{u}_g$ von g: $\vec{n}_E \bullet \vec{u}_g = 0$.

Die Gerade $g = g(A,B)$ hat als Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die Ebene e hat als Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wir verifizieren

$$\vec{n} \bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0\,.$$

b) Der Abstand einer Ebene zu einer parallelen Geraden ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes $P \in g$ von der Ebene e:

$$d(g,e) = d(A,e) = d((0,2,0),e) = \frac{|3 \cdot 2|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \approx 1{,}6\,.$$

9) a) Die Gerade g hat die Richtung eines Normalenvektors von e. Aus der Koordinatengleichung von e entnehmen wir: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von e. Damit erhalten wir als Parameterdarstellung von g:

$$X \in g \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) Zur Schnittpunktsberechnung setze die Parameterdarstellung von g in die Ebenengleichung ein:

$$3(-1+3r) + 4(7+4r) = 0 \iff 25r = -25 \iff r = -1\,.$$

Also gilt

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ Q = (3,-4,3)$$

und

$$d(P,e) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-1)\vec{n}| = \sqrt{25} = 5\,.$$

c) Abstandsberechnung ohne Lotfußpunkt direkt mit der HESSEschen Abstandsformel:

$$d(P,e) = \frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 7|}{|\vec{n}|} = \frac{25}{5} = 5\,.$$

10) a) Die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ haben alle dieselbe Länge $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$: Das Dreieck ist also gleichseitig.
Zur Flächenberechnung kann man elementargeometrische Überlegungen an gleichseitigen Dreiecken (siehe Formelsammlung, S. 43) verwenden oder man benutzt die Kenntnisse über das Vektorprodukt:

Die Länge des Vektorproduktes $\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

Also ist die Fläche F des Dreiecks ABC gegeben durch

$$F = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\,.$$

Wir berechnen

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Dreiecksfläche

$$F = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,.$$

b) Wir bestimmen eine Koordinatengleichung für die Ebene $e = e(A,B,C)$: Wir haben bereits $\vec{u}\times\vec{v} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnet, also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e und eine Gleichung hat folgende Gestalt: $x_1 + x_2 + x_3 = d$. $B = (3,5,0) \in e \implies d = 3+5 = 8$, also ist $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ eine Koordinatengleichung für e. [Probe: Alle Punkte A, B, C haben Koordinatensumme 8, erfüllen also diese Gleichung.]
Gemäß der HESSE-Formel ergibt sich als Abstand des Koordinatenursprungs von e:

$$d(O,e) = \frac{|d|}{|\vec{n}|} = \frac{8}{\sqrt{3}}\,.$$

c) Die Pyramide hat ein Dreieck als Grundfläche, ist also ein Tetraeder. Das Volumen einer Pyramide (Tetraeder, Kegel) ist immer durch

$$V = \frac{1}{3}\cdot\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}$$

gegeben. Die Höhe ist hier der Abstand der Spitze O vom Boden e, also laut b) $h = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Als Volumen erhalten wir also

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3}\,.$$

Alternativ verwenden wir nun das *Spatprodukt:* Das Volumen des von den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spates ist $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}|$. Diese Volumen reduziert sich bei einer Pyramide mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ und bei einer Dreiecksgrundfläche mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, also:

$$\boxed{\text{Volumen des Tetraeders } ABCD\text{: } V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}|.}$$

Hier konkret (mit $D = O$):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{6} \cdot |\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}| = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}\,.$$

Beachten Sie, dass bei diesem Weg keine Irrationalitäten ($\sqrt{3}$) auftreten.
d) Der gesuchte Fußpunkt F ist Schnittpunkt der Ebene e mit der Lotgeraden zu e durch O. Die Lotgerade ist die Gerade durch O senkrecht zu e, also mit Richtungssvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$X \in g = g(O, \vec{n}) \iff \overrightarrow{OX} = r\vec{n} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ r \end{pmatrix}.$$

Setze nun diese Parameterdarstellung in die Ebenengleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ ein und bestimme r:

$$r + r + r = 8 \iff r = \frac{8}{3}\,.$$

Also erhalten wir

$$\overrightarrow{OF} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3})\,.$$

Damit erhält man als Abstand

$$d(O, e) = d(O, F) = |\overrightarrow{OF}| = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau der in b) ermittelte Wert. (Zur Erinnerung: $\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$.)