Übungen aus dem Lehrbuch: S. 130–132

4) Schnittpunkt und -winkel von Geraden
5) Schnittwinkel von Geraden in der Ebene
6) Winkel zwischen den Kanten eines Körpers
7) Winkel zwischen Gerade und Ebene
8) Schnittpunkt und -winkel von Gerade und Ebene
9) Dreiseitige Pyramide
12) Sturmgefährdete Fichte
13) Winkel zwischen Ebenen

Übungen aus dem Lehrbuch: S. 130–132 — Lösungen

4) a) Schnittpunktsbestimmung mit dem Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist eindeutig: $s = 1$ liefert den Schnittpunkt $S = (3, 1, 6)$.
Die Berechnung des Schnittwinkels ist unabhängig vom berechneten Schnittpunkt, sie hängt nur von den beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Geraden ab. Da es sich um den Schnittwinkel zweier Geraden handelt, ist der Winkel spitz und daher in der folgenden Formel im Zähler der Betrag zu nehmen:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{10}{11}} \implies \alpha = \arccos(\sqrt{\frac{10}{11}}) \approx 17{,}5^0\,.$$

b) Schnittpunktsberechung:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -10 & -12 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist eindeutig: $s = 2$ liefert den Schnittpunkt $S = (10, 8, 15)$.
Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos(\frac{17}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{129}}) \approx 30{,}2^0\,.$$

c) Schnittpunktsberechung:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -1 & -2 \\ 9 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -16 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & -50 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist eindeutig: $s = 5$ liefert den Schnittpunkt $S = (5, 16, 10)$.
Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos(\frac{18}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{14}}) \approx 59{,}7^0\,.$$

d) Schnittpunktsberechung:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 6 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & -8 & -8 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 6 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist eindeutig: $s = 1$ liefert den Schnittpunkt $S = (4, 5, 6)$.
Schnittwinkel der Geraden:

$$\alpha = \arccos(\frac{|-9|}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{6}}) \approx 65{,}2^0\,.$$

5) Hier ist keine Schnittpunktsberechnung erforderlich. Ein Schnittwinkel von 0^0 zwischen den Richtungsvektoren bedeutet, dass die Geraden parallel sind (Identität eingeschlossen).

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \alpha = \arccos(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}}) \approx 78{,}7^0$.

b) Vorsicht: Hier sind keine Parameterdarstellungen, sondern Normalengleichungen für die Geraden (in der Ebene!) gegeben. Man kennt also Normalenvektoren zu beiden Geraden. Der Winkel zwischen den Geraden ist aber gleich dem Winkel zwischen den Lotgeraden, also kann man genauso rechnen wie in a):
$\alpha = \arccos(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}) = \arccos(\frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}}) \approx 40{,}6^0$.

c) Hier ist von einer Geraden ein Richtungs- und von der anderen Geraden (in der Ebene) ein Normalenvektor gegeben. Man berechnet nun den (spitzen) Winkel β zwischen der einen Geraden (Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$) und der Lotgeraden zur anderen (in Richtung des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$). Der gesuchte Winkel zwischen den beiden gegebenen Geraden ist dann $\alpha = 90^0 - \beta$:

$$\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - \arccos(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}) = 90^0 - \arccos(\frac{|-19|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{50}}) \approx 90^0 - 60{,}1^0 = 29{,}9^0 .$$

d) Wie bei c): $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\alpha = 90^0 - \arccos(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}) = 90^0 - \arccos(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}) \approx 90^0 - 71{,}6^0 = 18{,}4^0 .$$

Alternativ:

$$\alpha = \arcsin(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}) \approx 18{,}4^0 .$$

6) Hier sind die Winkel zwischen den Kanten eines Körpers gefragt, nicht zwischen Geraden. Es kommt daher (wie bei einem Dreieck) auf die Orientierung der Richtungsvektoren an! Die gesuchten Winkel können stumpf sein!
Wir bestimmen die Mittelpunkte aus den in der Skizze angegebenen Eckpunkten bzw. den daraus zu entnehmenden Kantenlänge des Quaders:

$$A = (3, 0, 2)\,,\ B = (6, 4, 2)\,,\ C = (3, 8, 2)\,,\ D = (0, 4, 2)\,,\ E = (3, 4, 0)\,,\ F = (3, 4, 4)\,.$$

Zur Winkelberechnung benötigen wir die Kantenvektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\,,\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\,,\ \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{FC}\,,$$
$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{EC}\,,\ \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{FD}\,,\ \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{ED}\,.$$

Winkelberechnung:

a) $$\alpha = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \arccos(\frac{-7}{25}) \approx 106{,}3^0$$

b) $$\beta = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \angle\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \arccos(\frac{7}{25}) \approx 73{,}7^0$$

Elementargeometrisches Argument: $ABCD$ ist ein Parallelogramm, also ergänzen sich benachbarte Winkel zu 180^0.

c) $$\gamma = \angle(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \angle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \arccos(\frac{4}{\sqrt{20}\sqrt{13}}) \approx 75{,}6^0$$

d) $$\delta = \angle(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) = \angle\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \arccos(\frac{5}{13}) \approx 67{,}4^0$$

e) $$\epsilon = \angle(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}) = \angle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \arccos(\frac{12}{20}) \approx 53{,}1^0$$

f) $$\varphi = \angle(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \angle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \arccos(\frac{16}{\sqrt{20} \cdot 5}) \approx 44{,}3^0$$

7) Ist $\vec{u}$ Richtungsvektor einer Gerade und $\vec{n}$ Normalenvektor einer Ebene e, so ist der Schnittwinkel von Gerade und Ebene gegeben durch $\alpha = \arcsin(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|})$. Hier ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene und der Winkel daher

$$\alpha = \arcsin(\frac{11}{\sqrt{6}\sqrt{38}}) \approx 46{,}8^0 .$$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor zur Ebene. Dieser ist identisch mit dem obigen Richtungsvektor der Geraden, also sind Gerade und Ebene orthogonal zueinander, der Winkel ist 90^0.

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene. Der Schnittwinkel ist folglich

$$\alpha = \arcsin(\frac{0}{\ldots}) = 0^0 .$$

$\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$ bedeutet: Normalenvektor der Ebene und Richtungsvektor der Geraden sind orthogonal, also die Gerade parallel zur Ebene, der Winkel ist 0.

8) Schnittpunktsberechnung durch Einsetzen der Parameterdarstellung der Gerade in eine Koordinaten- oder Normalengleichung der Ebene. Diese muss ggf. mit dem Vektorprodukt ermittelt werden. Winkelberechnung wie in Aufgabe 7.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n} \bullet \vec{u} = 22$

$22t = 22 \iff t = 1 \implies S = (4, 3, -1)\,,$

$\alpha = \arcsin(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}) = \arcsin(\frac{22}{\sqrt{26}\sqrt{27}}) \approx 56{,}1^0\,.$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{n} \bullet \vec{u} = 7\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = -41\,,$

$7t - 41 = -27 \iff t = 2 \implies S = (4, 12, -13)\,,$

$\alpha = \arcsin(\frac{7}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{75}}) \approx 10{,}2^0\,,$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n} \bullet \vec{u} = 2\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 12\,,$

$2t + 12 = 0 \iff t = -6 \implies S = (0, 6, -6)\,,$

$\alpha = \arcsin(\frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}) \approx 28{,}1^0\,.$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u} \ (!)\,, \ \vec{n} \bullet \vec{u} = 46\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 55\,,$

$46t + 55 = 9 \iff t = -1 \implies S = (3, -6, -1)\,,$

$\alpha = 90^0$ da $\vec{u} = \vec{n}$, also $g \perp E$

e) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n} \bullet \vec{u} = 6\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 51\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 33$

$6t + 51 - 33 = 0 \implies t = -3 \implies S = (6, 0, 9)\,,$

$\alpha = \arcsin(\frac{6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{42}}) \approx 24{,}5^0$

f) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ 13 \end{pmatrix},$

$\vec{n} \bullet \vec{u} = -80\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -5\,, \ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 25\,,$

$-80t - 5 = 25 \iff t = -\frac{3}{8} \implies S = (-\frac{1}{2}, -\frac{7}{8}, \frac{5}{8})\,,$

$\alpha = \arcsin(\frac{|-80|}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{619}}) \approx 29{,}7^0\,,$

g) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$

$$\vec{n} \bullet \vec{u} = 2\,,\ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\,,\ \vec{n} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,,$$

$$2t - 2 = 3 \iff t = -\frac{5}{2} \implies S = (-\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})\,,$$

$$\alpha = \arcsin(\frac{2}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{6}}) \approx 9^0\,.$$

9) a) Wir bestimmen einen Normalenvektor zur Ebene $e = e(A, B, C)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix},\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp e\,.$$

Die Rechnung ist überflüssig, wenn man beachtet, dass die 3 Punkte in der x_1, x_2-Ebene liegen, also jeder Normalenvektor die Richtung der x_3-Achse haben muss. Die Winkel:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \alpha = \angle(g(A, D), e) = \arcsin(\frac{4}{\sqrt{21}}) \approx 60{,}8^0\,.$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \alpha = \angle(g(B, D), e) = \arcsin(\frac{4}{\sqrt{33}}) \approx 44{,}1^0\,.$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \alpha = \angle(g(C, D), e) = \arcsin(\frac{4}{\sqrt{17}}) \approx 76^0\,.$$

b) Wieder bestimmen wir einen Normalenvektor, diesmal zu $e' = e(A, B, D)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp e'\,.$$

Die Winkel:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \angle(g(A, C), e') = \arcsin(\frac{|-8|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{17}}) \approx 43{,}3^0\,.$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \angle(g(B, C), e') = \arcsin(\frac{|-8|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{17}}) \approx 25{,}7^0\,.$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \alpha = \angle(g(C, D), e') = \arcsin(\frac{8}{17}) \approx 28{,}1^0\,.$$

12) Wir bestimmen eine Gleichung der Hangeebene $e = e(O, A, B)$. Berechnung eines Normalenvektors:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -26 \end{pmatrix} \implies \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp e\,.$$

Der Befestigungspunkt am Baum ist $C = (0,0,5)$ (hierbei unterstellen wir, dass in dem ‘passenden’ Koordinatensystem die dritte Koordinate die Vertikale angibt). Dann sind Richtungsvektoren der beiden Seile

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und die Winkel sind:

$$\alpha = \arcsin(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}) = \arcsin(\frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{34}}) \approx 50{,}1^0 \,,$$
$$\beta = \arcsin(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}) = \arcsin(\frac{14}{\sqrt{5}\sqrt{45}}) \approx 41{,}8^0 \,.$$

13) Der Schnittwinkel zweier Ebenen mit Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{n}'$ ist

$$\alpha = \arccos(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}) \,.$$

a) $\alpha = \arccos(\frac{30}{\sqrt{26}\sqrt{37}}) \approx 14{,}7^0$,

b) $\alpha = \arccos(\frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{51}}) \approx 55{,}5^0$,

c) $\alpha = \arccos(\frac{|-71|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{173}}) \approx 45{,}4^0$,

d) $\alpha = \arccos(\frac{|-9|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{22}}) \approx 70{,}8^0$.