Vermischte Übungen aus dem Lehrbuch: S. 133ff.

21) Geschnittener Würfel

Lösung:

a) Wir entnehmen der Skizze die Koordinaten der Punkte bzgl. des gegebenen Koordinatensystems:

$$A = (4,2,4)\,,\; B = (4,4,1)\,,\; C = (0,4,2)\,,\; D = (0,?,4)\,.$$

Zur Bestimmung von $D \in e$ ermitteln wir zunächst eine Koordinatengleichung für e:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \implies \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \perp e\,,$$

$$C = (0,4,2) \in e \implies x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 32 \text{ Gleichung für } e\,.$$

Bestimmung von D:

$$D = (0, x_2, 4) \in e \iff 6x_2 + 4 \cdot 4 = 32 \iff x_2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \implies D = (0, \frac{8}{3}, 4)\,.$$

b) Die Koordinatenebenen haben als Normalenvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x_2-x_3-Ebene, Bezeichnung e_{23}), $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x_1-x_3-Ebene e_2) und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (x_1-x_2-Ebene e_3). Dies ergibt die Winkel mit der

$$\begin{aligned} x_2\text{-}x_3\text{-Ebene: } \angle(e, e_{23}) &= \arccos(\frac{1}{\sqrt{53}}) \approx 82{,}1^0\,, \\ x_1\text{-}x_3\text{-Ebene: } \angle(e, e_{13}) &= \arccos(\frac{6}{\sqrt{53}}) \approx 34{,}5^0\,, \\ x_1\text{-}x_2\text{-Ebene: } \angle(e, e_{23}) &= \arccos(\frac{4}{\sqrt{53}}) \approx 56{,}7^0\,. \end{aligned}$$

c) Als Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen erhält man jeweils die Komplementwinkel zu 90^0, da jede Koordinatenachse zugleich senkrecht auf der komplementären Koordinatenebene steht: $\vec{e}_1 \perp e_{23}$ etc. Dies ergit als Winkel zwischen e und der

$$\begin{aligned} x_1\text{-Achse:} &\quad 90^0 - 82{,}1^0 = 7{,}9^0\,, \\ x_2\text{-Achse:} &\quad 90^0 - 34{,}5^0 = 55{,}5^0\,, \\ x_3\text{-Achse:} &\quad 90^0 - 56{,}7^0 = 33{,}3^0\,. \end{aligned}$$

d) $D = (0, \frac{8}{3}, 4)$ ergibt die Kantenvektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix},\; \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die Innenwinkel

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA}) = \arccos(\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{148}{9}}}) = \arccos(\frac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{148}}) = 84{,}8^0$$

$$\beta = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arccos(\frac{3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}) \approx 78{,}4^0$$

$$\gamma = \angle(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \arccos(\frac{-2}{\sqrt{\frac{52}{9}}\cdot\sqrt{17}}) \approx 101{,}6^0$$

$$\delta = \angle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \arccos(\frac{-\frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{52}{9}}\cdot\sqrt{\frac{148}{9}}}) \approx 95{,}2^0\,.$$

d) Wir versenden das Vektorprodukt zur Berecnung der Fläche.

$$F(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}| = \sqrt{53}\,,$$

$$F(ACD) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}| = \frac{1}{2}|\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 8 \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}| = \frac{2}{3}|\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}| = \frac{2}{3}\sqrt{53}$$

Die Fläche des Vierecks beträgt somit $\frac{5}{3}\sqrt{53} \approx 12{,}1$.