



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2008

### Mathematik, Leistungskurs

---

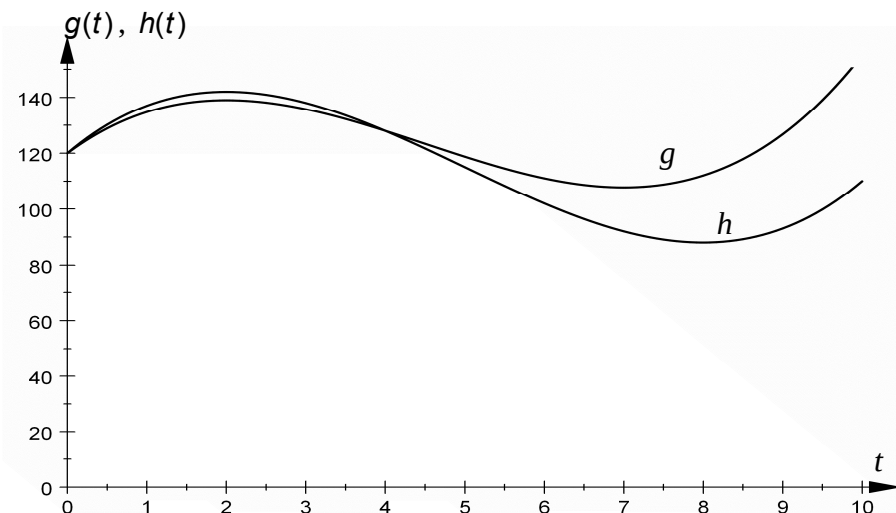
#### Aufgabenstellung:

Zwei Radsportler setzen zur Belastungskontrolle während des Trainings Pulsmessgeräte ein, die die momentane Herzfrequenz der Sportler anzeigen und aufzeichnen. Die aus den ermittelten Werten erstellten Herzfrequenzkurven eines 10-minütigen Trainingsabschnitts können annähernd durch die Graphen der Funktionen  $g$  mit

$$g(t) = 0,5 \cdot t^3 - 6,75 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 120, \quad 0 \leq t \leq 10, \text{ und } h \text{ mit}$$

$$h(t) = 0,5 \cdot t^3 - 7,5 \cdot t^2 + 24 \cdot t + 120, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

dargestellt werden (siehe Abbildung). Dabei wird die Zeit  $t$  in Minuten (min) seit Beginn des Trainingsabschnitts ( $t = 0$ ) und die Herzfrequenz in Schlägen pro Minute (S/min) angegeben.



- a) Der Trainer hatte den Sportlern vorgegeben, ihre Herzfrequenz während des Trainingsabschnitts zwischen 100 S/min und 160 S/min zu halten.

*Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Vorgaben des Trainers eingehalten wurden.*

(11 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- b) *Untersuchen Sie, ob die Zeitpunkte, zu denen die Herzfrequenzen der beiden Sportler während des Trainingsabschnitts jeweils am stärksten abgenommen haben, übereinstimmen.* (9 Punkte)
- c) *Ermitteln Sie die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers in den ersten  $k$  Minuten des Trainingsabschnitts und berechnen Sie diesen Wert für  $k = 10$ .* (8 Punkte)

Die Funktionen  $g$  und  $h$  gehören zur Funktionenschar  $f_a$  mit

$$f_a(t) = 0,5 \cdot t^3 - 1,5 \cdot (a+1) \cdot t^2 + 6 \cdot a \cdot t + 120, t \in \mathbb{R}, a > 0,$$

die im Folgenden betrachtet wird. Es gilt  $g(t) = f_{3,5}(t)$  und  $h(t) = f_4(t)$ .

- d) *Untersuchen Sie den Graphen der Funktion  $f_a$  in Abhängigkeit vom Parameter  $a$  auf Extrempunkte.*  
*Begründen Sie, dass alle Funktionen  $f_a$  mit  $a \geq 5\frac{2}{9}$  eine Nullstelle im Intervall  $[2;10]$  besitzen und somit für eine Beschreibung von Herzfrequenzwerten nicht geeignet sind.* (12 Punkte)
- e) *Zeigen Sie, dass sich die Graphen aller Funktionen  $f_a$  der Funktionenschar in genau zwei Punkten  $S_1(0|120)$  und  $S_2(4|128)$  schneiden.*  
*Ermitteln Sie den Inhalt  $A(a_1; a_2)$  der Fläche, die die Graphen zweier Funktionen  $f_{a_1}$  und  $f_{a_2}$ ,  $a_1 < a_2$ , der Funktionenschar einschließen.*  
*Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die die Funktionen  $f_{3,5}$  und  $f_4$  einschließen und interpretieren Sie das Ergebnis im obenstehenden Sachzusammenhang.* (10 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2008**

## *Mathematik, Leistungskurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Analysis

### **2. Aufgabenstellung**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2008**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen auch unter Einbeziehung gebrochen-rationaler Funktionen
- Untersuchungen von Wirkungen
- Flächenberechnung durch Integration

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modelllösungen

#### Modelllösung a)

Bestimmung der Extrema der Funktion  $g$ :

$$g'(t) = 1,5 \cdot t^2 - 13,5 \cdot t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 7$$

$$g''(t) = 3 \cdot t - 13,5 \Rightarrow g''(2) = -7,5 < 0 \wedge g''(7) = 7,5 > 0$$

(Alternativ: Vorzeichenwechsel der Funktion  $g'$  an den Stellen  $t = 2$ ;  $t = 7$ )

Die Funktion  $g$  besitzt das relative Maximum  $g(2) = 139$  und das relative Minimum

$g(7) = 107,75$ . Beide Werte liegen innerhalb des vorgegebenen Intervalls  $]100;160[$ .

Da auch die Randwerte  $g(0) = 120$  und  $g(10) = 155$  innerhalb dieses Bereichs liegen, wurden die Vorgaben des Trainers vom ersten Sportler eingehalten.

Mit  $h(t) = 0,5 \cdot t^3 - 7,5 \cdot t^2 + 24 \cdot t + 120$  erhält man  $h(8) = 88$ . Der zweite Sportler hat die Vorgaben nicht eingehalten, da er z. B. zur Zeit  $t = 8$  nur eine Herzfrequenz von 88 Schlägen pro Minute hatte.

#### Modelllösung b)

Gesucht ist jeweils die Stelle  $t$ , an der die Änderungsrate  $g'$  bzw.  $h'$  ein negatives Minimum besitzt.

Bestimmung des absoluten Tiefpunkts des Graphen der Funktion  $g'$ :

$$g'(t) = 1,5 \cdot t^2 - 13,5 \cdot t + 21 = 1,5 \cdot (t - 4,5)^2 - 9,375.$$

Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt  $G(4,5 | -9,375)$ .

(Alternativ: Bestimmung des Wendepunkts des Graphen von  $g$  und Untersuchung der Randwerte)

Die Änderungsrate  $g'$  besitzt an der Stelle  $t = 4,5$  ein absolutes Minimum. Außerdem gilt  $g'(4,5) = -9,375 < 0$ , d. h., die Änderungsrate ist negativ. Die Herzfrequenz des ersten Sportlers nimmt 4,5 Minuten nach Beginn des Trainingsabschnitts am stärksten ab.

Entsprechend erhält man für den zweiten Sportler:

Die Änderungsrate  $h'$  mit  $h'(t) = 1,5 \cdot t^2 - 15 \cdot t + 24 = 1,5 \cdot (t - 5)^2 - 13,5$  besitzt an der Stelle  $t = 5$  ein absolutes Minimum und es gilt  $h'(5) = -13,5 < 0$ .

Die Herzfrequenz des zweiten Sportlers nimmt 5 Minuten nach Beginn des Trainingsabschnitts am stärksten ab, die Zeitpunkte stimmen nicht überein.

**Modelllösung c)**

Die mittlere Herzfrequenz  $m(k)$  des ersten Sportlers im Zeitintervall  $[0;k]$  beträgt

$$\begin{aligned} m(k) &= \frac{1}{k} \cdot \int_0^k g(t) dt = \frac{1}{k} \cdot \int_0^k (0,5 \cdot t^3 - 6,75 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 120) dt \\ &= \frac{1}{k} \cdot \left[ 0,125 \cdot t^4 - 2,25 \cdot t^3 + 10,5 \cdot t^2 + 120 \cdot t \right]_0^k \\ &= 0,125 \cdot k^3 - 2,25 \cdot k^2 + 10,5 \cdot k + 120. \end{aligned}$$

Die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers im gesamten Trainingsabschnitts beträgt

$$m(10) = 125.$$

**Modelllösung d)**

Bestimmung der Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'_a(t) &= 1,5 \cdot t^2 - 3 \cdot (a+1) \cdot t + 6 \cdot a = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2 \cdot (a+1) \cdot t + 4 \cdot a = 0 \\ &\Leftrightarrow t = a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a} = a+1 \pm \sqrt{a^2 - 2a+1} \\ &\Leftrightarrow t = a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2} = a+1 \pm |a-1| \\ &\Leftrightarrow t = 2 \vee t = 2a \end{aligned}$$

Die Stellen  $t = 2$  bzw.  $t = 2a$  sind mögliche Extremstellen des Graphen von  $f_a$ .

Mit  $f''_a(t) = 3 \cdot t - 3 \cdot (a+1)$  folgt  $f''_a(2) = -3 \cdot (a-1)$  und  $f''_a(2a) = 3 \cdot (a-1)$ .

In Abhängigkeit von  $a$  kann man folgende Fälle unterscheiden:

1) Für alle  $0 < a < 1$  gilt  $f''_a(2) = -3 \cdot (a-1) > 0$  und  $f''_a(2a) = 3 \cdot (a-1) < 0$ .

Der Graph der Funktion  $f_a$  besitzt für alle  $0 < a < 1$  den relativen Tiefpunkt

$P_a(2 | 6a + 118)$  und den relativen Hochpunkt  $Q_a(2a | -2a^3 + 6a^2 + 120)$ .

2) Für  $a = 1$  gilt  $f''_1(2) = 0$  und  $f'''_1(2) = 3$ .

Der Graph der Funktion  $f_1$  besitzt den Sattelpunkt  $SP(2 | 124)$ .

3) Für alle  $a > 1$  gilt  $f''_a(2) = -3 \cdot (a-1) < 0$  und  $f''_a(2a) = 3 \cdot (a-1) > 0$ .

Der Graph der Funktion  $f_a$  besitzt für alle  $a > 1$  den relativen Hochpunkt

$P_a(2 | 6a + 118)$  und den relativen Tiefpunkt  $Q_a(2a | -2a^3 + 6a^2 + 120)$ .

(Alternativ: Vorzeichenwechsel von  $f'_a$  an den Stellen  $t = 2$  bzw.  $t = 2a$ )

Für alle  $a > 0$  gilt  $f_a(2) = 6a + 118 > 0$  und es gilt  $f_a(10) = 470 - 90 \cdot a < 0 \Leftrightarrow a > 5\frac{2}{9}$ ,

d. h.  $f_a(10) < 0$  für alle  $a > 5\frac{2}{9}$ .

Damit folgt, dass die Funktion  $f_a$  für alle  $a > 5\frac{2}{9}$  eine Nullstelle im Intervall  $[2;10]$  besitzt.

### Modelllösung e)

Bestimmung der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen  $f_{a_1}$  und  $f_{a_2}$  der Funktionenschar mit  $a_1 \neq a_2$ :

$$f_{a_1}(t) = f_{a_2}(t)$$

$$\Leftrightarrow -1,5 \cdot (a_1 + 1) \cdot t^2 + 6 \cdot a_1 \cdot t - (-1,5 \cdot (a_2 + 1) \cdot t^2 + 6 \cdot a_2 \cdot t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -1,5 \cdot (a_1 - a_2) \cdot t \cdot (t - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4$$

Die Graphen aller Funktionen  $f_a$  schneiden sich in den Punkten  $S_1(0 | 120)$  und  $S_2(4 | 128)$ .

Ermittlung des Flächeninhalts  $A(a_1; a_2)$  des eingeschlossenen Flächenstücks:

$$\begin{aligned} A(a_1; a_2) &= \left| \int_0^4 (f_{a_2}(t) - f_{a_1}(t)) dt \right| = \left| \int_0^4 (-1,5 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t^2 + 6 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t) dt \right| \\ &= \left| \left[ -0,5 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t^3 + 3 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t^2 \right]_0^4 \right| = |16 \cdot (a_2 - a_1)| = 16 \cdot (a_2 - a_1) \quad (\text{da } a_1 < a_2) \end{aligned}$$

Für  $a_1 = 3,5$  und  $a_2 = 4$  ( $a_1, a_2 < 5\frac{2}{9}$  vgl. Teilaufgabe d)) erhält man die Flächenmaßzahl

$$A(3,5; 4) = 16 \cdot 0,5 = 8.$$

Die Flächenmaßzahl gibt den Unterschied der Gesamtzahl der Herzschläge beider Sportler in den ersten vier Minuten des Trainingsabschnitts an. Die Anzahl aller Herzschläge im Zeitintervall  $[0;4]$  ist bei beiden Sportlern annähernd gleich, der Unterschied beträgt (lt. Modellrechnung) lediglich 8 Schläge.

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sup>1</sup>
	Der Prüfling	
1	berechnet die 1. Ableitung $g'$ und die möglichen Extremstellen des Graphen von $g$ .	3 (I)
2	bestimmt die relativen Extrema der Funktion $g$ .	2 (II)
3	berechnet die Randwerte $g(0)$ und $g(10)$ .	2 (I)
4	gibt einen Funktionswert $h(t)$ mit $t \in [0;10]$ an, der nicht im vorgegebenen Intervall $]100;160[$ liegt.	2 (I)
5	gibt an, dass die Vorgaben des Trainers vom ersten Sportler eingehalten und vom zweiten Sportler nicht eingehalten wurden.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt die Koordinaten der absoluten Tiefpunkte der Graphen der Ableitungen $g'$ und $h'$ .	4 (II)
2	beschreibt den Zusammenhang zwischen der Abnahme der Herzfrequenz und der Änderungsrate $g'$ bzw. $h'$ .	3 (II)
3	gibt die Zeitpunkte $t = 4,5$ und $t = 5$ an, zu denen die Herzfrequenzen der beiden Sportler am stärksten abgenommen haben.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt den Ansatz $\frac{1}{k} \cdot \int_0^k g(t) dt$ .	3 (III)
2	bestimmt die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers im Zeitintervall $[0; k]$ .	3 (II)
3	berechnet die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers im gesamten Trainingsabschnitt $[0;10]$ .	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

<sup>1</sup> AFB = Anforderungsbereich

**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet die 1. Ableitung $f'_a$ .	2 (I)
2	bestimmt die möglichen Extremstellen des Graphen der Funktion $f_a$ in Abhängigkeit von $a$ .	2 (II)
3	ermittelt durch Fallunterscheidung die Extrempunkte des Graphen der Funktion $f_a$ .	5 (III)
4	zeigt, dass die Funktion $f_a$ für alle $a > 5\frac{2}{9}$ eine Nullstelle im Intervall $[2;10]$ besitzt.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe e)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	zeigt, dass sich die Graphen aller Funktionen $f_a$ in den Punkten $S_1(0   120)$ und $S_2(4   128)$ schneiden.	2 (II)
2	ermittelt den Ansatz $\left  \int_0^4 (f_{a_2}(t) - f_{a_1}(t)) dt \right $ und bestimmt den Flächeninhalt $A(a_1; a_2)$ der eingeschlossenen Fläche.	4 (II)
3	berechnet die Maßzahl der von den Graphen der Funktionen $f_{3,5}$ und $f_4$ eingeschlossenen Fläche.	2 (I)
4	interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		



**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	berechnet die 1. Ableitung ...	3 (I)			
2	bestimmt die relativen ...	2 (II)			
3	berechnet die Randwerte ...	2 (I)			
4	gibt einen Funktionswert ...	2 (I)			
5	gibt an, dass ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe a)</b>	<b>11</b>			

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	ermittelt die Koordinaten ...	4 (II)			
2	beschreibt den Zusammenhang ...	3 (II)			
3	gibt die Zeitpunkte ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe b)</b>	<b>9</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt den Ansatz ...	3 (III)			
2	bestimmt die mittlere ...	3 (II)			
3	berechnet die mittlere ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>8</b>			

**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	berechnet die 1. Ableitung ...	2 (I)			
2	bestimmt die möglichen ...	2 (II)			
3	ermittelt durch Fallunterscheidung ...	5 (III)			
4	zeigt, dass die ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>12</b>			

**Teilaufgabe e)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	zeigt, dass sich ...	2 (II)			
2	ermittelt den Ansatz ...	4 (II)			
3	berechnet die Maßzahl ...	2 (I)			
4	interpretiert das Ergebnis ...	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe e)</b>		<b>10</b>			

<b>Summe insgesamt</b>		<b>50</b>			
------------------------	--	-----------	--	--	--

**Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.**