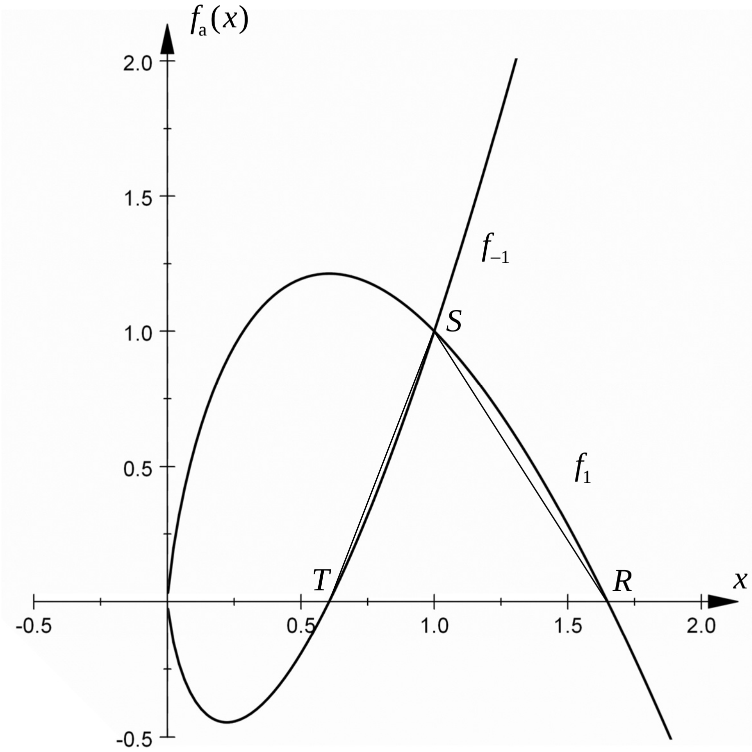
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = 2x \cdot (0{,}5 - a \cdot \ln x)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 2x \cdot (0{,}5 - \ln x)$ und $f_{-1}(x) = 2x \cdot (0{,}5 + \ln x)$.
(Die Aufgabenstellungen der Teilaufgaben a), b) und c) können statt für f_1 und f_{-1} auch allgemein für f_a, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bearbeitet werden.)



a) *Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und das Verhalten der Funktionen f_1 und f_{-1} an den Rändern des Definitionsbereichs an.*

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen f_1 und f_{-1}. (11 Punkte)

Name: ____________________

b) *Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} auf Extrem- und Wendepunkte und geben Sie, falls möglich, deren Koordinaten an.* (13 Punkte)

c) *Bestimmen Sie durch Integration eine Stammfunktion der Funktionen f_1 und f_{-1}.*

[Zur Kontrolle: $F_a(x) = 0{,}5x^2 \cdot (1 + a - 2a \cdot \ln x)$] (6 Punkte)

d) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} begrenzen mit der x-Achse zwischen den Achsenschnittpunkten T und R (siehe Abbildung auf Seite 1) ein Flächenstück.
Der Inhalt dieses Flächenstücks kann annähernd durch den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten T, R und S (S ist Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_{-1}) bestimmt werden.

Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung des Flächeninhalts der Dreiecksfläche vom Inhalt des oben beschriebenen Flächenstücks. (10 Punkte)

e) Der Punkt $P_u(u \mid f_1(u))$ mit $0 < u \le e^{0,5}$ auf dem Graphen der Funktion f_1 bestimmt zusammen mit dem Koordinatenursprung $O(0 \mid 0)$ und dem Punkt $Q_u(-u \mid f_1(u))$ ein Dreieck P_uOQ_u. Dieses Dreieck bildet die Querschnittsfläche eines geraden Kreiskegels mit Kegelspitze O.

Zeigen Sie, dass durch $V(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (u^3 - 2 \cdot u^3 \cdot \ln u)$ das Volumen V(u) des Kreiskegels bestimmt wird. Ermitteln Sie den Wert von u $(0 < u \le e^{0,5})$, für den das Kegelvolumen maximal wird. (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen auch unter Einbeziehung gebrochen-rationaler Funktionen
   - Integrationsregel für die partielle Integration
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Für die Teilaufgaben a), b) und c) werden die Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter *a* angegeben. Konkrete Lösungen für $a = -1$ oder $a = 1$ werden als gleichwertig anerkannt.

Modelllösung a)

$f_{\mathrm{a}}(x) = 2x \cdot (0{,}5 - a \cdot \ln x) = x - 2a \cdot x \cdot \ln x$

maximaler Definitionsbereich: $ID_{f_{\mathrm{a}}} = \,]\,0;+\infty\,[$

Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs:

$\lim\limits_{x\to 0} f_{\mathrm{a}}(x) = \lim\limits_{x\to 0} x - 2a \cdot \lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \ln x) = 0$

für $x \to +\infty$ gilt: $f_{\mathrm{a}}(x) = 2x \cdot (0{,}5 - a \cdot \ln x) \to -\infty$ für $a > 0$ und $f_{\mathrm{a}}(x) \to +\infty$ für $a < 0$

Bestimmung der Nullstellen:

$f_{\mathrm{a}}(x) = 2x \cdot (0{,}5 - a \cdot \ln x) = 0$ für $\ln x = \dfrac{1}{2a}$ (da $0 \notin ID_{f_a}$), d. h., $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2a}}$ ist einzige Nullstelle.

Modelllösung b)

Untersuchung der Graphen auf Extrempunkte:

$f_{\mathrm{a}}'(x) = 2 \cdot (0{,}5 - a \cdot \ln x) + 2x \cdot (-a \cdot \dfrac{1}{x}) = -2a \cdot \ln x + 1 - 2a$ und $f_{\mathrm{a}}''(x) = -\dfrac{2a}{x}$

notwendiges Kriterium: $f_{\mathrm{a}}'(x_{\mathrm{E}}) = 0$

$f_{\mathrm{a}}'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1-2a}{2a} = \dfrac{1}{2a} - 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2a}-1}$; $x = e^{\frac{1}{2a}-1}$ ist mögliche Extremstelle.

hinreichendes Kriterium: $f_a'(x_E) = 0$ und $f_{\mathrm{a}}''(x_{\mathrm{E}}) \neq 0$ (alternativ: VZW von f_{a}' an der Stelle x_{E})

$f_{\mathrm{a}}''(x) = -\dfrac{2a}{x} < 0$ für alle $a > 0$ (da $x > 0$) und $f_a''(x) = -\dfrac{2a}{x} > 0$ für alle $a < 0$ (da $x > 0$)

Der Graph von f_{a} besitzt den relativen Extrempunkt $E_{\mathrm{a}}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2a}-1} \mid 2a \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2a}-1})$. Für alle $a > 0$ ist E_{a} ein relativer Hochpunkt, für alle $a < 0$ ist E_{a} ein relativer Tiefpunkt.

Untersuchung der Graphen auf Wendepunkte:

notwendiges Kriterium: $f_{\mathrm{a}}''(x_{\mathrm{W}}) = 0$

Da $f_{\mathrm{a}}''(x) = -\dfrac{2a}{x} \neq 0$ für alle $x \in \,]\,0;+\infty\,[$ besitzt der Graph von f_{a} keine Wendepunkte.

Modelllösung c)

Bestimmung einer Stammfunktion F_a der Funktion f_a:

$$F_a(x) = \int (x - 2a \cdot x \cdot \ln x)\,dx = 0{,}5x^2 - 2a \cdot \int x \cdot \ln x\,dx$$

Durch partielle Integration mit $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = x \Rightarrow v(x) = 0{,}5x^2$ erhält man

$$\begin{aligned} F_a(x) &= 0{,}5x^2 - 2a \cdot (0{,}5x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot 0{,}5x^2\,dx) \\ &= 0{,}5x^2 - 2a \cdot (0{,}5x^2 \cdot \ln x - 0{,}5 \cdot 0{,}5x^2) \\ &= 0{,}5x^2 \cdot (1 + a - 2a \cdot \ln x) \end{aligned}$$

Modelllösung d)

Nullstellen der Funktion f_{-1} bzw. f_1 sind $x_T = e^{-0{,}5}$ bzw. $x_R = e^{0{,}5}$

Schnittpunkt S der Graphen von f_{-1} und f_1:

$f_{-1}(x) = f_1(x) \Leftrightarrow 4x \cdot \ln x = 0 \Rightarrow\ x = 1$ ist die einzige Schnittstelle der Graphen.

Schnittpunkt $S(1\,|\,1)$

Flächeninhalt des Dreiecks RST:

Länge der Dreiecksseite $\overline{TR} = e^{0{,}5} - e^{-0{,}5}$; Höhe des Dreiecks RST $h = 1$

Flächeninhalt des Dreiecks $A_{RST} = 0{,}5 \cdot (e^{0{,}5} - e^{-0{,}5}) \cdot 1 \approx 0{,}52$ [FE]

Inhalt des von f_{-1} und f_1 eingeschlossenen Flächenstücks:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{e^{-0{,}5}}^{1} f_{-1}(x)dx \right| + \left| \int_{1}^{e^{0{,}5}} f_1(x)dx \right| = \left| \left[F_{-1}(x) \right]_{e^{-0{,}5}}^{1} \right| + \left| \left[F_1(x) \right]_{1}^{e^{0{,}5}} \right| \\ &= \left| \left[x^2 \cdot \ln x \right]_{e^{-0{,}5}}^{1} \right| + \left| \left[x^2 \cdot (1 - \ln x) \right]_{1}^{e^{0{,}5}} \right| = \left| -(e^{-0{,}5})^2 \cdot (-0{,}5) \right| + \left| (e^{0{,}5})^2 \cdot (1 - 0{,}5) - 1 \right| \\ &= 0{,}5 \cdot e^{-1} + 0{,}5 \cdot e - 1 \approx 0{,}54 \quad [\text{FE}] \end{aligned}$$

$$\frac{A - A_{RST}}{A} \approx \frac{0{,}02}{0{,}54} \approx 0{,}037$$

Die Abweichung beträgt ca. 3,7 %.

Modelllösung e)

Volumen des Kreiskegels:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \text{ mit } r = u \text{ und } h = f_1(u)\,; \quad D_V =]0\,; e^{0,5}]$$

$$V(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot u^2 \cdot 2u \cdot (0,5 - \ln u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (u^3 - 2 \cdot u^3 \cdot \ln u)$$

Bestimmung des Maximums:

$$V'(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (u^2 - 6u^2 \cdot \ln u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot u^2 \cdot (1 - 6 \cdot \ln u) = 0 \text{ für } 6 \cdot \ln u = 1 \text{ (da } 0 \notin ID_V\text{)}$$

$u = e^{\frac{1}{6}}$ ist die einzige mögliche Extremstelle

Mit $V''(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (-4u - 12u \cdot \ln u)$ gilt $V''(e^{\frac{1}{6}}) = -2\pi \cdot e^{\frac{1}{6}} < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum $V(e^{\frac{1}{6}})$.

Da $\lim\limits_{u \to 0} V(u) = \lim\limits_{u \to 0}(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (u^3 - 2 \cdot u^3 \cdot \ln u)) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\lim\limits_{u \to 0} u^3 - 2 \cdot \lim\limits_{u \to 0}(u^3 \ln u)) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0 - 2 \cdot 0) = 0$

und $V(e^{0,5}) = 0$ gilt, erhält man für $u = e^{\frac{1}{6}} \approx 1,18$ das absolute Maximum des Kegelvolumens

$$V(e^{\frac{1}{6}}) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (e^{0,5} - \frac{1}{3} \cdot e^{0,5}) \approx 1,15 \quad [VE].$$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt den maximalen Definitionsbereich an.	3 (I)
2	gibt das Verhalten der Funktionsgraphen an den Rändern des Definitionsbereichs (in Abhängigkeit von a) an.	4 (I)
3	bestimmt die Nullstelle (in Abhängigkeit von a).	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die 1. und 2. Ableitung.	4 (I)
2	untersucht die Graphen auf Extrempunkte.	4 (II)
3	gibt die Koordinaten des Hoch- bzw. Tiefpunkts (in Abhängigkeit von a) an.	2 (I)
4	untersucht die Graphen auf Wendepunkte.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt durch Anwendung geeigneter Integrationsverfahren eine Stammfunktion.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks *RST*.	4 (II)
2	berechnet den Flächeninhalt des von f_{-1} und f_1 eingeschlossenen Flächenstücks.	4 (I)
3	berechnet die prozentuale Abweichung.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass durch die Formel das Kegelvolumen $V(u)$ gegeben ist.	4 (III)
2	bestimmt das Maximum der Funktion V.	4 (II)
3	gibt den Wert von u an, für den das Kegelvolumen maximal wird.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt den maximalen …	3 (I)			
2	gibt das Verhalten …	4 (I)			
3	bestimmt die Nullstelle …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die 1. …	4 (I)			
2	untersucht die Graphen …	4 (II)			
3	gibt die Koordinaten …	2 (I)			
4	untersucht die Graphen …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt durch Anwendung …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Flächeninhalt …	4 (II)			
2	berechnet den Flächeninhalt …	4 (I)			
3	berechnet die prozentuale Abweichung.	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass durch …	4 (III)			
2	bestimmt das Maximum …	4 (II)			
3	gibt den Wert …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.