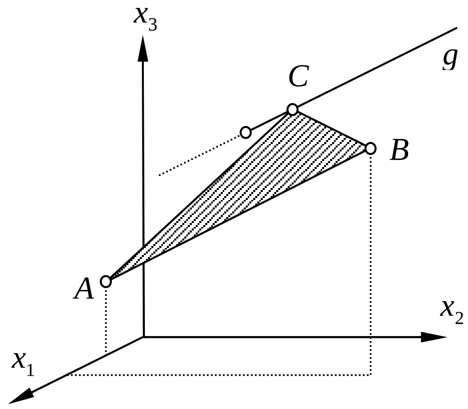
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Von einem Dreieck ABC sind die Punkte $A(1|0|1)$ und $B(2|4|3)$ gegeben. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wo der Punkt C liegen muss, damit das Dreieck ABC rechtwinklig bzw. gleichschenklig wird.



a) *Berechnen Sie den Punkt C auf der Geraden* $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$, *für den das Dreieck ABC rechtwinklig wird, mit dem rechten Winkel bei A.* (6 Punkte)

b) Es werden jetzt die Punkte C gesucht, für die das Dreieck ABC gleichzeitig gleichschenklig und rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei A wird. (Die Punkte C müssen nicht auf g liegen.)

Beschreiben Sie die Lage aller solcher Punkte C.

Beschreiben Sie detailliert einen Weg, wie Sie die Koordinaten eines dieser Punkte C berechnen können. Die Rechnung muss nicht ausgeführt werden. (10 Punkte)

Name: ____________________

c) $\overline{AB}$ soll die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks *ABC* sein. Alle diese Punkte *C* liegen in einer bestimmten Ebene *E*.

Beschreiben Sie die Lage dieser Ebene E und ermitteln Sie eine Gleichung von E.

[Zur Kontrolle: $E: x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13{,}5$]

Nun soll untersucht werden, ob auf den Geraden

$$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ r,s,t \in \mathbb{R},$$

solche Punkte *C* liegen, für die das Dreieck *ABC* gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$ wird.

Bestimmen Sie für jede der Geraden g_1, g_2 und g_3 diese Punkte C.

Beschreiben Sie die unterschiedlichen Fälle, die in Abhängigkeit von der Lage der Geraden bei der Bestimmung der Punkte C auftreten können. (17 Punkte)

d) Die Ebene *F* sei durch die Punkte $P(2|1|17)$, $Q(1|3|1)$, $R(6|2|0)$ gegeben.

Gesucht werden alle Punkte *C* der Ebene *F*, für die das Dreieck *ABC* gleichschenklig wird mit dem Scheitelpunkt *A*.

(1) *Begründen Sie, dass die Punkte C auf einem Kreis in der Ebene F liegen.*

(2) *Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises*.

[Zur Kontrolle: $F: 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 30$] (17 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$C = (1+3r \mid 2+2r \mid 3+r)$ ist so zu wählen, dass $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 3r \\ 2+2r \\ 2+r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3r + 8 + 8r + 4 + 2r = 0 \iff r = -\frac{12}{13} \Rightarrow C = \left(-\frac{23}{13} \,\Big|\, \frac{2}{13} \,\Big|\, \frac{27}{13}\right).$$

Modelllösung b)

$\overline{BC}$ ist die Basis des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks *ABC*, *A* ist der Scheitelpunkt.

C liegt auf einem Kreis in der Ebene senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ durch den Punkt *A*. Der Kreis hat den Radius $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Es wird die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet. Ein zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrechter Vektor $\vec{n}$ wird aus der Gleichung $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ bestimmt. Ein möglicher Punkt hat den zugehörigen Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{n}\right|} \cdot \vec{n}$.

Modelllösung c)

Die gesuchte Ebene E enthält den Mittelpunkt *M* der Strecke *AB* und verläuft senkrecht zu *AB*.

Für den Mittelpunkt *M* der Strecke *AB* gilt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich die Darstellung $E: x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13{,}5$.

Die gesuchten Punkte ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2 und g_3 mit der Ebene *E*.

Alle Punkte von g_1 sind im Sinne der Aufgabenstellung geeignet.

Kein Punkt von g_2 ist im Sinne der Aufgabenstellung geeignet.

g_3 schneidet die Ebene *E* im Punkt $(0{,}7 \mid 2 \mid 2{,}4)$.

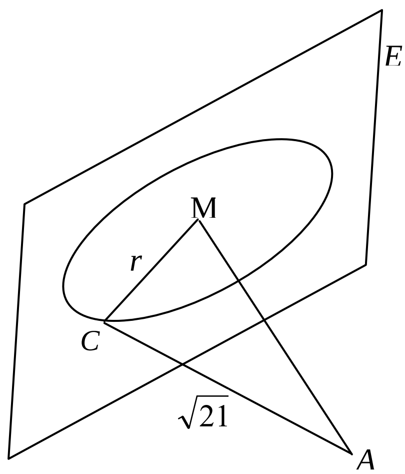
Fall 1: Es existieren unendlich viele Schnittpunkte. Die Gerade g_1 liegt in der Ebene *E*. Also sind alle Punkte der Geraden geeignet.

Fall 2: Es existiert kein Schnittpunkt. Die Gerade g_2 verläuft parallel zur Ebene *E*. Also ist kein Punkt der Geraden geeignet.

Fall 3: Es existiert genau ein Schnittpunkt. Die Gerade g_3 schneidet die Ebene *E* in einem einzigen Punkt.

Modelllösung d)

(1) Alle Punkte *C*, für die das Dreieck *ABC* gleichschenklig mit dem Scheitel *A* wird, liegen auf einer Kugel um den Punkt *A* mit dem Radius $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{21}$. Der Schnitt dieser Kugel mit der Ebene *F* durch *P*, *Q*, *R* ist ein Kreis.



(2) Es wird zunächst die Ebene *F* in Normalenform aufgestellt. Mit Hilfe der Lotgeraden von *A* auf *F* wird der Schnittkreismittelpunkt *M* bestimmt. Der Radius des Schnittkreises wird mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -16 \end{pmatrix}; \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -17 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus

$$\begin{matrix} -n_1 + 2n_2 - 16n_3 = 0 \\ 4n_1 + n_2 - 17n_3 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow -9n_1 + 18n_3 = 0 \Rightarrow z.B.\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow F: 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 30\,.$$

Berechnung von *M* und |*AM*|:

Schnitt von *g*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in R$ mit F:

$$2 \cdot (1 + 2\lambda) + 9 \cdot 9\lambda + 1 + \lambda = 30 \quad \Rightarrow \lambda \approx 0{,}314$$

$$M \approx (1{,}63\,|\,2{,}83\,|\,1{,}31) \quad und \quad \left|AM\right| \approx \sqrt{0{,}63^2 + 2{,}83^2 + 0{,}31^2} \approx 2{,}92$$

$$r \approx \sqrt{21 - 2{,}92^2} \approx 3{,}53\,.$$

Die gesuchten Punkte *C* liegen in der Ebene *F* auf einem Kreis mit dem Radius $r \approx 3{,}53$ um den Punkt $M \approx (1{,}63\,|\,2{,}83\,|\,1{,}31)$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt die Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ an.	3 (I)
2	berechnet den Punkt C.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beschreibt die Lage der Punkte C.	4 (II)
2	beschreibt detailliert einen Weg zur Berechnung eines Punktes C.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beschreibt die Lage der Ebene.	3 (I)
2	ermittelt eine Ebenengleichung.	3 (II)
3	berechnet gemeinsame Punkte von g_1, g_2, g_3 und E.	7 (I)
4	beschreibt die unterschiedlichen Fälle.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	begründet, dass die Punkte *C* auf einem Kreis in der Ebene *F* liegen.	4 (III)
2	bestimmt eine Gleichung der Ebene *F*.	5 (II)
3	ermittelt den Mittelpunkt des Schnittkreises.	4 (II)
4	ermittelt den Radius des Schnittkreises.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die Orthogonalitätsbedingung …	3 (I)			
2	berechnet den Punkt …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt die Lage …	4 (II)			
2	beschreibt detailliert einen …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt die Lage …	3 (I)			
2	ermittelt eine Ebenengleichung.	3 (II)			
3	berechnet gemeinsame Punkte …	7 (I)			
4	beschreibt die unterschiedlichen …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass die …	4 (III)			
2	bestimmt eine Gleichung …	5 (II)			
3	ermittelt den Mittelpunkt …	4 (II)			
4	ermittelt den Radius …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0