Name: ____________________

# Abiturprüfung 2009

## *Mathematik, Leistungskurs*

### Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Schar von Funktionen $f_k$ durch

$$f_k(x) = 2k \cdot x \cdot e^{-4x^2},$$
$$k \in \mathbb{R}, k \neq 0 .$$

Die Graphen von $f_1$ und $f_2$ sind in *Abbildung 1* dargestellt.

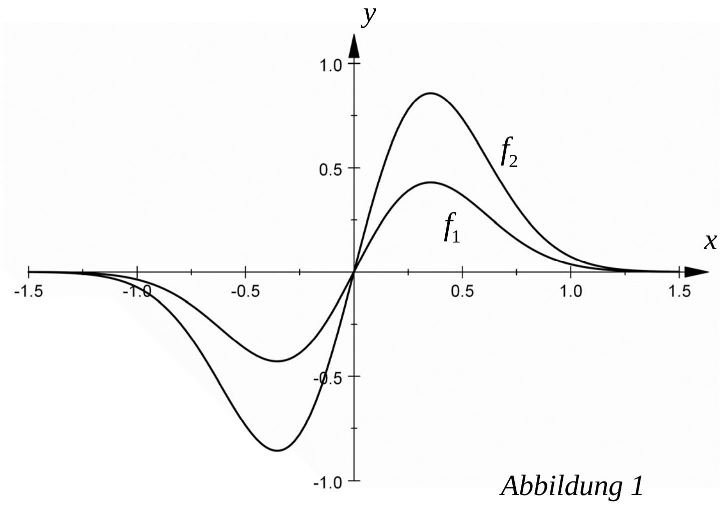

*Abbildung 1*

a) (1) *Weisen Sie nach, dass die Graphen von $f_k$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind, und untersuchen Sie ihr Unendlichkeitsverhalten.*

(2) *Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von $f_k$ mit den Koordinatenachsen. Zeigen Sie, dass die Hoch- bzw. Tiefpunkte der Graphen von $f_k$ für alle $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, jeweils auf einer Parallelen zur y-Achse liegen.*

(3) *Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Graphen von $f_k$ je drei Wendepunkte besitzen.*

[Zur Kontrolle: $f_k'(x) = \left(2k - 16k \cdot x^2\right) \cdot e^{-4x^2}$ ] (23 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) Die Gerade $x = v$ mit $v > 0$ schneidet die $x$-Achse im Punkt $V$ und den Graphen der Funktion $f_k$ in $W_k$. Mit dem Ursprung $O$ als weiterem Eckpunkt ergibt sich ein Dreieck $OVW_k$ (siehe *Abbildung 2*).

*Ermitteln Sie für $k > 0$ den Wert von v, für den der Flächeninhalt des Dreiecks $OVW_k$ maximal ist. Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.*

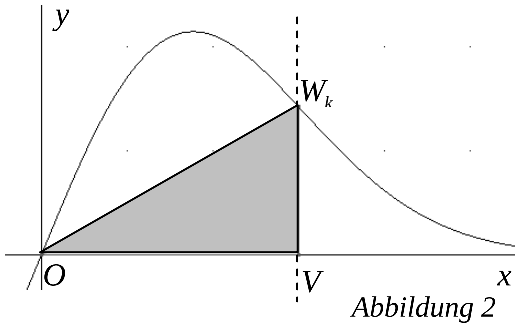

*Abbildung 2*

(2) Gegeben sind nun zwei Vertreter $f_k$ und $f_{-k}$ der Funktionenschar.

*Weisen Sie nach, dass die Graphen von $f_k$ und $f_{-k}$ zueinander achsensymmetrisch sind. Die Symmetrieachse ist dabei die x-Achse.*
*Begründen Sie anhand dieser Symmetrie, dass auch für $k < 0$ der Flächeninhalt des Dreiecks $OVW_k$ für das gleiche v wie in (1) maximal ist.* (17 Punkte)

c) (1) *Zeigen Sie, dass durch $F_k(x) = -\frac{k}{4} \cdot e^{-4x^2}$ eine Stammfunktion von $f_k$ gegeben ist.*

(2) *Weisen Sie nach, dass die Fläche zwischen den Graphen von $f_1$ und $f_2$ über jedem Intervall $[0; s]$, $s \in \mathbb{R}^+$, genau so groß ist wie die Fläche zwischen dem Graphen von $f_1$ und der x-Achse über diesem Intervall.* (10 Punkte)

## Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

*Unterlagen für die Lehrkraft*

# Abiturprüfung 2009

*Mathematik, Leistungskurs*

## 1. Aufgabenart

Analysis

## 2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

## 3. Materialgrundlage

- entfällt

## 4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen auch unter Einbeziehung gebrochen-rationaler Funktionen
   - Integrationsregel für die partielle Integration
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

## 5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modelllösungen

### Modelllösung a)

(1) Die Graphen von $f_k$ sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_\mathrm{k}(-x) = 2k(-x) \cdot e^{-4\cdot(-x)^2} = -2kx \cdot e^{-4x^2} = -f_\mathrm{k}(x)$.

Da der Nenner von $f_\mathrm{k}(x) = \dfrac{2kx}{e^{4x^2}}$ unabhängig von *k* sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$ stärker als der Betrag des Zählers wächst, gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_\mathrm{k}(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2kx}{e^{4x^2}} = 0$;

die *x*-Achse ist Asymptote der Graphen von $f_\mathrm{k}$.

(2) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$f_\mathrm{k}(x) = 0 \Leftrightarrow 2kx \cdot e^{-4x^2} = 0 \Leftrightarrow 2kx = 0 \Leftrightarrow x = 0$, da $e^{-4x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow N(0|0) = S_\mathrm{y}$

Bestimmung der Extrempunkte:

$f'_\mathrm{k}(x) = 2k \cdot e^{-4x^2} + 2kx \cdot (-8x) \cdot e^{-4x^2} = \left(2k - 16kx^2\right) \cdot e^{-4x^2}$ (Produkt-, Kettenregel).

Die notwendige Bedingung $f'_\mathrm{k}(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2k - 16kx^2\right) \cdot e^{-4x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

liefert zwei mögliche Extremstellen.

Neben $f'_\mathrm{k}(x_\mathrm{e}) = 0$ gilt für $x_{\mathrm{e}1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ und für *k* > 0 nun weiter:

Mit dem (–/+)-Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung an der Stelle $x_{\mathrm{e}1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ oder

$f''_\mathrm{k}(x_{\mathrm{e}1}) \neq 0$ mit $f''_\mathrm{k}(x) = \left(128kx^2 - 48kx\right) \cdot e^{-4x^2}$, konkret $f''_\mathrm{k}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot k \cdot e^{-\frac{1}{2}} > 0$, folgt:

Für *k* > 0 hat $f_\mathrm{k}$ an der Stelle $x_{\mathrm{e}1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ein lokales Minimum.

Analog ergibt sich für *k* < 0 ein lokales Maximum von $f_\mathrm{k}$ in $x_{\mathrm{e}1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung liegen folglich für *k* > 0 relative Hochpunkte bzw. für *k* < 0 relative Tiefpunkte an der Stelle $x_{\mathrm{e}2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ .

Da die $x$-Koordinaten der Extrema unabhängig von $k$ sind, liegen sie für alle $k$ an den Stellen $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ und $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ und somit auf zwei Parallelen zur $y$-Achse.

(3) Existenz von drei Wendepunkten:

Die Graphen der (stetigen) Funktionen $f_k$ besitzen drei Wendepunkte, denn:

- zwischen Minimum und Maximum müssen die Graphen ihr Krümmungsverhalten ändern bzw. ein zum Ursprung O(0/0) punktsymmetrischer Graph muss einen Wendepunkt im Ursprung besitzen,
- für $x \to \pm\infty$ ist die $x$-Achse Asymptote der Graphen; die Graphen müssen vor bzw. nach dem Extremum das Krümmungsverhalten ändern, da sie die $x$-Achse nicht noch einmal schneiden.

**Modelllösung b)**

(1) Allgemein gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks: $A(g,h) = \frac{g \cdot h}{2}$.

Für das beschriebene Dreieck gilt konkret: $g = v$; $h = f_k(v) = 2k \cdot v \cdot e^{-4 \cdot v^2}$, da $k > 0$, $v > 0$; daraus ergibt sich die Zielfunktion $A_k$ mit $A_k(v) = k \cdot v^2 \cdot e^{-4v^2}$, $k > 0$, $v > 0$, mit der Ableitung $A_k'(v) = (2k \cdot v - 8k \cdot v^3) \cdot e^{-4v^2}$.

Bestimmung des Maximums:

Die notwendige Bedingung

$A_k'(v) = 0 \Leftrightarrow 2k \cdot v - 8k \cdot v^3 = 0 \Leftrightarrow v = 0 \vee v = 0{,}5 \vee v = -0{,}5$ liefert als mögliche Extremstelle $v = 0{,}5$, da $v > 0$.

$A_k''(v) = (2k - 40k \cdot v^2 + 64k \cdot v^4) \cdot e^{-4v^2}$. Aus $A_k'(0{,}5) = 0 \wedge A_k''(0{,}5) = -4k \cdot e^{-1} < 0$ folgt:

An der Stelle $v = 0{,}5$ hat die Funktion $A_k$ das lokale Maximum $A_k(0{,}5) = 0{,}25k \cdot e^{-1}$.

Überprüfung von $A_k$ am Rand des Definitionsbereiches:

Wegen $\lim\limits_{v \to 0} A_k(v) = \lim\limits_{v \to \infty} A_k(v) = 0$ ist $A_k(0{,}5)$ auch globales Maximum.

Das Dreieck $OVW_k$ hat also für $v = 0{,}5$ den größten Flächeninhalt. Dieser beträgt $0{,}25k \cdot e^{-1}$ FE.

(2) Zwei Graphen sind achsensymmetrisch zur $x$-Achse, wenn sich ihre Funktionswerte nur im Vorzeichen unterscheiden. Es muss also nachgewiesen werden, dass für alle $k > 0$ $f_k(x) = -f_{-k}(x)$ gilt.

Mit $-f_{-k}(x) = -2 \cdot (-k) \cdot x \cdot e^{-4x^2} = 2k \cdot x \cdot e^{-4x^2} = f_k(x)$ lässt sich diese Aussage durch Nachrechnen bestätigen.

Da die Dreiecke $OVW_k$ und $OVW_{-k}$ dieselbe Grundseite $\overline{OV}$ und wegen der Achsensymmetrie der Graphen von $f_k$ und $f_{-k}$ die gleiche Höhe $h = |VW_k| = |VW_{-k}|$ haben [sie also kongruent sind], haben sie auch für jedes $v > 0$ denselben Flächeninhalt. Daher hat auch für $k < 0$, insgesamt für jedes beliebige $k \neq 0$, das Dreieck $OVW_k$ für $v = 0,5$ den größten Flächeninhalt. [Dieser beträgt stets $0,25k \cdot e^{-1}$ FE .]

**Modelllösung c)**

(1) Mit Hilfe der Ableitungsregeln (u. a. Kettenregel) kann gezeigt werden, dass durch $F_k(x) = -\frac{k}{4} \cdot e^{-4x^2}$ eine Stammfunktion von $f_k$ gegeben ist.

(2) Bestimmung der Fläche zwischen den Graphen von $f_1$ und $f_2$ im Intervall [0;s], $s \in \mathbb{R}^+$: Da die Fläche vollständig im 1. Quadranten liegt und $f_2(x) > f_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt, folgt:

$$A = \int_0^s (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x = \int_0^s \left(4x \cdot e^{-4x^2} - 2x \cdot e^{-4x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^s 2xe^{-4x^2}\mathrm{d}x = \int_0^s f_1(x)\mathrm{d}x\,.$$

Es reicht hier auch zu zeigen, dass $f_2 - f_1 = f_1$ ist.

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

| | **Anforderungen**<br>**Der Prüfling** | **maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1] |
|---|---|---|
| 1 | (1) weist die Punktsymmetrie zum Ursprung nach. | 2 (II) |
| 2 | (1) untersucht das Unendlichkeitsverhalten. | 4 (II) |
| 3 | (2) berechnet die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. | 2 (I) |
| 4 | (2) berechnet die Ableitung. | 2 (I) |
| 5 | (2) berechnet Extremstellen mit notwendiger und hinreichender Bedingung. | 6 (I) |
| 6 | (2) entscheidet anhand einer Fallunterscheidung über Minimum und Maximum. | 2 (II) |
| 7 | (2) begründet, dass die Extrema auf Parallelen zur $x$-Achse liegen. | 2 (II) |
| 8 | (3) begründet die Existenz von drei Wendepunkten. | 3 (II) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

### Teilaufgabe b)

| | **Anforderungen**<br>**Der Prüfling** | **maximal erreichbare Punktzahl (AFB)** |
|---|---|---|
| 1 | (1) bestimmt einen Zielfunktionsterm. | 2 (II) |
| 2 | (1) bestimmt die lokale Maximalstelle. | 5 (II) |
| 3 | (1) berechnet den maximalen Flächeninhalt. | 2 (I) |
| 4 | (1) zeigt durch Untersuchung der Randbedingungen, dass das Maximum auch global ist. | 2 (II) |
| 5 | (2) weist die Achsensymmetrie der Graphen von $f_k$ und $f_{-k}$ nach. | 3 (II) |
| 6 | (2) ermittelt anhand dieser Symmetrie für beliebiges $k \neq 0$, für welchen Wert von $v$ der Flächeninhalt des Dreiecks $OVW_k$ maximal ist. | 3 (III) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

[1] AFB = Anforderungsbereich

## Teilaufgabe c)

| | Anforderungen<br>**Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) |
|---|---|---|
| 1 | (1) zeigt, dass $F_k$ eine Stammfunktion von $f_k$ ist. | 5 (II) |
| 2 | (2) gibt einen Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhalts an. | 2 (I) |
| 3 | (2) weist die Gültigkeit der Aussage nach. | 3 (III) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

## 7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____________________________________________

### Teilaufgabe a)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | **maximal erreichbare Punktzahl (AFB)** | **EK**[2] | **ZK** | **DK** |
| 1 | (1) weist die Punktsymmetrie … | 2 (II) | | | |
| 2 | (1) untersucht das Unendlichkeitsverhalten. | 4 (II) | | | |
| 3 | (2) berechnet die Schnittpunkte … | 2 (I) | | | |
| 4 | (2) berechnet die Ableitung. | 2 (I) | | | |
| 5 | (2) berechnet Extremstellen mit … | 6 (I) | | | |
| 6 | (2) entscheidet anhand einer … | 2 (II) | | | |
| 7 | (2) begründet, dass die … | 2 (II) | | | |
| 8 | (3) begründet die Existenz … | 3 (II) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (23) …………………………………………………………………… …………………………………………………………………… | | | | | |
| | **Summe Teilaufgabe a)** | **23** | | | |

### Teilaufgabe b)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | **maximal erreichbare Punktzahl (AFB)** | **EK** | **ZK** | **DK** |
| 1 | (1) bestimmt einen Zielfunktionsterm. | 2 (II) | | | |
| 2 | (1) bestimmt die lokale … | 5 (II) | | | |
| 3 | (1) berechnet den maximalen … | 2 (I) | | | |
| 4 | (1) zeigt durch Untersuchung … | 2 (II) | | | |
| 5 | (2) weist die Achsensymmetrie … | 3 (II) | | | |
| 6 | (2) ermittelt anhand dieser … | 3 (III) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… …………………………………………………………………… | | | | | |
| | **Summe Teilaufgabe b)** | **17** | | | |

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | **maximal erreichbare Punktzahl (AFB)** | **EK** | **ZK** | **DK** |
| 1 | (1) zeigt, dass $F_k$ … | 5 (II) | | | |
| 2 | (2) gibt einen Ansatz … | 2 (I) | | | |
| 3 | (2) weist die Gültigkeit … | 3 (III) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… …………………………………………………………………… | | | | | |
| | **Summe Teilaufgabe c)** | **10** | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Summe insgesamt** | **50** | | | |

**Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.**