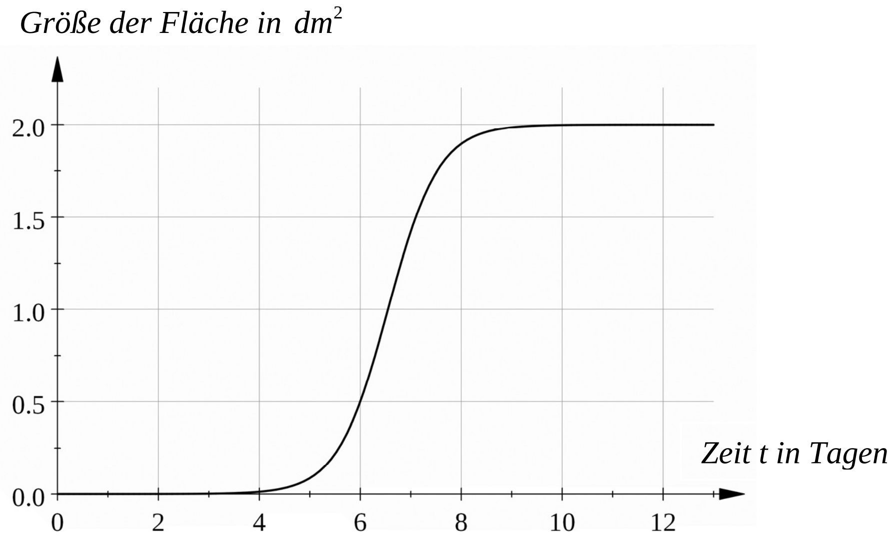
Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Im Folgenden sollen Funktionen als Modell für das Wachstum von Schimmelpilzen diskutiert werden. Der zeitliche Verlauf der Größe einer von einer Schimmelpilzkultur bedeckten Fläche kann näherungsweise durch die Funktionenschar $h_a(t) = 2 - \frac{2a}{e^{2t} + a}$ mit $t \geq 0$ und $a > 0$ beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und die Größe der von der Schimmelpilzkultur bedeckten Fläche in Quadratdezimetern (dm^2) gemessen.



a) Die oben stehende Abbildung zeigt einen zeitlichen Verlauf, bei dem 6 Tage nach Beobachtungsbeginn die Größe der bedeckten Fläche 0,5 dm^2 beträgt.

Berechnen Sie den Parameter a der Funktion h_a, die diesen zeitlichen Verlauf modelliert, und den Zeitpunkt, an dem diese Schimmelpilzkultur eine Fläche von 0,05 dm^2 bedeckt.

(8 Punkte)

Name: ____________________

b) *Begründen Sie anhand des Funktionsterms der Funktionenschar h_a, dass durch die Funktionen h_a nur Schimmelpilzkulturen beschrieben werden können, bei denen die maximale Größe der bedeckten Fläche 2 dm^2 beträgt.*
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktionen h_a keine lokalen Extrema besitzen.
Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.
[Zur Kontrolle: $h_a'(t) = \frac{4a \cdot e^{2t}}{\left(e^{2t} + a\right)^2}$]. (15 Punkte)

c) Im folgenden Aufgabenteil soll das obige Modell mit $a = 3 \cdot e^{12}$ genauer untersucht werden, d. h., $h(t) = 2 - \frac{6e^{12}}{e^{2t} + 3e^{12}}$, $t \geq 0$.
Erst vier Tage nach Beobachtungsbeginn kommt es zu einem nennenswerten Anstieg der Größe der Fläche, die durch die Schimmelpilze überdeckt wird.

(1) *Zeigen Sie, dass die Funktion H mit $H(t) = \ln(e^{2t} + 3e^{12})$ eine Stammfunktion von h ist.*

(2) Bei der Modellierung mit Hilfe der Funktion *h* lässt sich durch $\overline{A} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t) \mathrm{d}t$ die mittlere Größe einer Fläche im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ bestimmen.

Ermitteln Sie die durchschnittliche Größe der Fläche, die im Zeitraum vom Beginn des 5. Tages ($t = 4$) bis zum Ende des 9. Tages ($t = 9$) von der Schimmelpilzkultur überdeckt wird. (10 Punkte)

d) (1) *Stellen Sie rechnerisch dar, dass die Gleichung $h_a'(t) = h_a(t) \cdot (2 - h_a(t))$ gilt.*

(2) *Weisen Sie unter Verwendung dieser Gleichung für die Funktionen h_a nach:*
Liegt an der Stelle t_w ein Wendepunkt vor, der kein Sattelpunkt ist, so gilt:
$h_a(t_w) = 1$.

(3) *Ermitteln Sie für h_a den Zeitpunkt t_0, an dem die von der Schimmelpilzkultur bedeckte Fläche am schnellsten wächst, und die zugehörige Größe A_0 der Fläche.*

Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt und diese Fläche konkret für die Funktion h mit
$h(t) = 2 - \frac{6e^{12}}{e^{2t} + 3e^{12}}$. (17 Punkte)

Lösung:
a) Gesucht ist $a > 0$ mit

$$\frac{1}{2} = h_a(6) = 2 - \frac{2a}{e^{12} + a} \iff \frac{2a}{e^{12} + a} = \frac{3}{2} \iff 3(e^{12} + a) = 4a \iff a = 3e^{12}\,.$$

Für dieses $a = 3e^{12}$ bestimmen wir die Zeit t, für die gilt

$$\begin{aligned} 0{,}05 = h_a(t) = 2 - \frac{6e^{12}}{e^{2t} + 3e^{12}} &\iff \frac{6 \cdot e^{12}}{e^{2t} + 3 \cdot e^{12}} = 1{,}95 \\ \iff 6 \cdot e^{12} = 1{,}95 \cdot e^{2t} + 5{,}85 \cdot e^{12} &\iff 1{,}95 \cdot e^{2t} = 0{,}15 \cdot e^{12} \\ \iff e^{2t} = \frac{e^{12}}{13} &\iff 2t = \ln(e^{12}) - \ln(13) = 12 - \ln(13) \\ \iff t = 6 - \frac{1}{2}\ln(13) \approx 4{,}72\,. \end{aligned}$$

b) Alle Funktionswerte $h_a(t) = 2 - \frac{2a}{e^{2t}+a}$ sind ≤ 2, da von 2 ein positiver Wert ($a > 0$, $e^{2t} > 0$!) subtrahiert wird. Diesem Maximalwert kommt $h_a(t)$ (für $t \to \infty$) beliebig nahe, denn wegen $a > 0$ und $e^{2t} + a \to \infty$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2a}{e^{2t} + a} = 0\,.$$

Wir berechnen die erste Ableitung von $h_a(t) = 2 - 2a(e^{2t} + a)^{-1}$:

$$h'_a(t) = -2a \cdot (-1) \cdot (e^{2t} + a)^{-2} \cdot e^{2t} \cdot 2 = \frac{4a \cdot e^{2t}}{(e^{2t} + a)^2}\,.$$

Wegen $a > 0$ und $e^{2t} > 0$ gilt stets $h'_a(t) > 0$, h_a ist streng monoton wachsend, hat insbesondere keine lokalen Extrema.
Dies bedeutet, dass in dieser Modellierung die Schimmelpilzkultur beständig wächst, wenn sie auch die maximale Fläche von $2\,\mathrm{dm}^2$ nicht übersteigt.
c) (1) Wir berechnen die Ableitung von $H_a(t)$:

$$H_a(t) = \ln(e^{2t} + a) \implies H'(t) = \frac{1}{e^{2t} + a} \cdot e^{2t} \cdot 2 = \frac{2e^{2t}}{e^{2t} + a}\,.$$

Es ist $H'_a(t) = h_a(t)$, denn

$$h_a(t) = 2 - \frac{2a}{e^{2t} + a} = \frac{2(e^{2t} + a) - 2a}{e^{2t} + a} = \frac{2e^{2t}}{e^{2t} + a} = H'_a(t)\,.$$

[Ergänzung: Die letzte Umformung zeigt zugleich den Weg zur Herleitung dieser Stammfunktion mittels Substitutionsregel bzw. konkret der sog. *logarithmischen* Integration:

$$\ln(u(t)) \text{ ist Stammfunktion von } \frac{u'(t)}{u(t)}\,.$$

Schreibt man $h_a(t)$ als *einen* Bruch wie in der obigen Umformung, so erhält man

$$h_a(t) = \frac{2e^{2t}}{e^{2t} + a} = \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ mit } u(t) = e^{2t} + a\,.$$

Damit ist $\ln(u(t)) = \ln(e^{2t} + a) = H_a(t)$ eine Stammfunktion von $\frac{u'(t)}{u(t)} = h_a(t)$.]
(2) Es ist (gemäß der angegebenen Mittelwertformel)

$$\bar{A} = \frac{1}{5}\int_4^9 h_a(t)\,dt = \frac{1}{5}(H_a(9) - H_a(4)) = \frac{1}{5}(\ln(e^{18} + a) - \ln(e^8 + a))\,.$$

Daraus ergibt sich für $a = 3e^{12}$ der Näherungswert

$$\bar{A} = 0{,}98\,.$$

Die durschnittliche Größe der Schimmelpilzkultur zwischen dem 4. und 9. Tag beträgt etwa $1\,\mathrm{dm}^2$.
d) (1) Wir berechnen (unter Verwendung der obigen Umformung von $h_a(t)$)

$$h_a(t)(2 - h_a(t)) = \frac{2e^{2t}}{e^{2t} + a} \cdot \frac{2a}{e^{2t} + a} = \frac{4ae^{2t}}{(e^{2t} + a)^2} = h_a'(t)\,.$$

(2) Ausgehend von (1) berechnen wir $h_a''(t)$ mit der Produktregel:

$$h_a''(t) = h_a'(t)(2 - h_a(t)) + h_a(t)(-h_a'(t)) = h_a'(t)(2 - 2h_a(t)) = 2h_a'(t)(1 - h_a(t))$$

Wir folgern daraus:

$$h_a''(t) = 0 \iff h_a'(t) = 0 \;\vee\; h_a(t) = 1\,.$$

Ist nun t eine Wendestelle von h_a, also $h_a''(t) = 0$, aber keine Sattelstelle, also $h_a'(t) \neq 0$, so muss $h_a(t) = 1$ gelten.
Man beachte: Wegen $h_a'(t) = h_a(t)(2 - h_a(t))$ gilt aber

$$h_a'(t) = 0 \iff h_a(t) = 0 \;\vee\; h_a(t) = 2$$

[Anmerkung: Beides ist für die gegebene Funktion nicht möglich. Aber dies haben wir nicht aus der Gleichung (1) gefolgert.]
(3) Die Stelle stärksten Wachstums ist Maximalstelle von h_a', also Wendestelle von h_a. Gemäß (2) beträgt die Fläche zu diesem Zeitpunkt natürlich $1\,\mathrm{dm}^2$. Zur Bestimmung des Zeitpunktes lösen wir die Gleichung

$$1 = h_a(t) \iff 1 = \frac{2a}{e^{2t} + a} \iff e^{2t} + a = 2a \iff e^{2t} = a \iff t = \frac{\ln(a)}{2}\,.$$

Für $a = 3e^{12}$ ergibt sich konkret $t = \frac{\ln(3)+12}{2} \approx 6{,}55$ Tage.