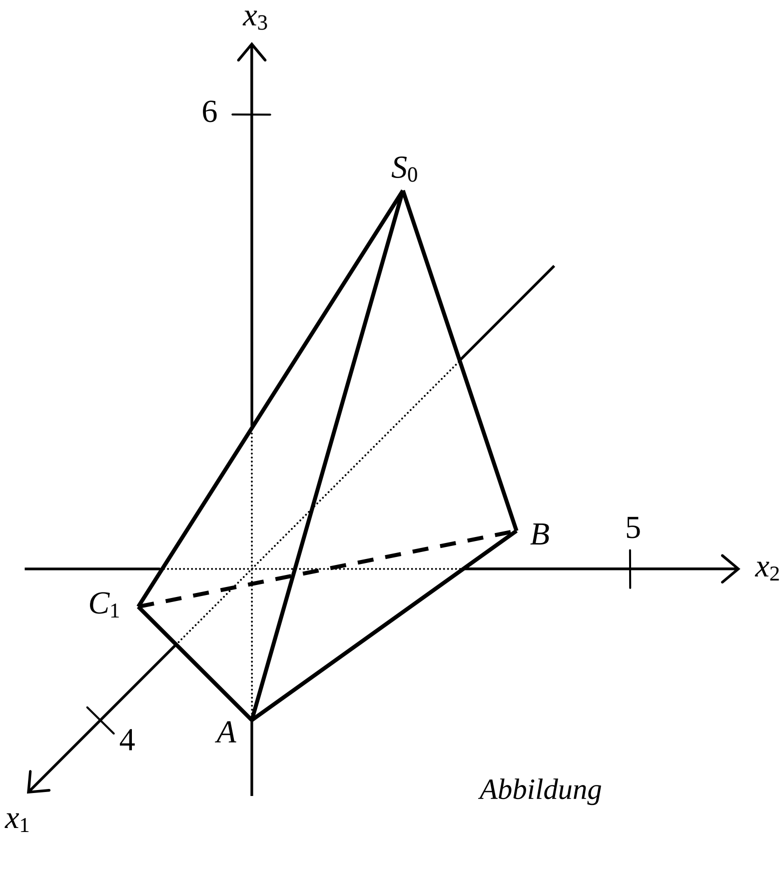
Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,2\,|\,0)$, $B(1\,|\,4\,|\,1)$, $C_k(6-3k\,|\,2k-2\,|\,k)$ und $S_t(2-t\,|\,3-2t\,|\,6+t)$. Die Punkte C_k liegen auf einer Geraden *c* und die Punkte S_t liegen auf einer Geraden *s*. Die Eckpunkte *A*, *B*, C_1 und S_0 bilden ein Tetraeder (s. *Abbildung*).



Abbildung

a) Die Punkte *A* und *B* liegen auf einer Geraden *g*.

(1) *Geben Sie je eine Gleichung für die Gerade c und die Gerade g an.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Geraden g und c parallel und nicht identisch sind.*

(8 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Punkte *A*, *B* und C_k liegen für alle $k \in \mathbb{R}$ in einer Ebene *E*.

(1) *Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.*
[Zur Kontrolle: $E:\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 10 = 0$]

(2) *Zeigen Sie, dass die Gerade s und die Ebene E zueinander parallel sind, und zeigen Sie, dass die Gerade s und die Ebene E den Abstand $d = \sqrt{21}$ LE voneinander haben.*

(17 Punkte)

c) Die Punkte *A*, *B* und C_k bilden das Dreieck ABC_k.

(1) *Ermitteln Sie den Wert von k, für den das Dreieck ABC_k bei A einen rechten Winkel hat.*
[Zur Kontrolle: $k = 1$]

(2) *Bestimmen Sie die Größe der drei Innenwinkel im Dreieck ABC_1.* (11 Punkte)

d) (1) Das Dreieck ABC_1 ist die Grundfläche des Tetraeders ABC_1S_0.
Ermitteln Sie das Volumen des Tetraeders ABC_1S_0.

(2) *Begründen Sie, dass das Volumen des Tetraeders ABC_kS_t mit der Grundfläche ABC_k unabhängig von k und unabhängig von t ist.* (14 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Eine Gleichung für die Gerade c lautet $c\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und eine für die Gerade $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(2) Da die Richtungsvektoren von c und g kollinear sind, sind die beiden Geraden c und g parallel. Da außerdem der Verbindungsvektor der Stütz- bzw. Ortsvektoren der beiden Geraden nicht kollinear zu den beiden Richtungsvektoren der Geraden ist, sind die beiden Geraden c und g nicht identisch.

Modelllösung b)

(1) Richtungsvektoren der Ebene E sind: $\overrightarrow{AB}$ und der Vektor $\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OA} \right)$

Zu diesen beiden Vektoren benötigt man einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$,

der zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene senkrecht ist. Also:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{oder einfacher: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mit $A(4|2|0)$ ergibt sich: $E\colon\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad E\colon\quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$

(2) Stützvektor der Geraden s: $\overrightarrow{s_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; Richtungsvektor der Geraden s: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden s ist senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E (aus Teil (1)), da $\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0$. Damit ist die Gerade s parallel zur Ebene E.

Für Abstandsbetrachtungen benötigt man die Hesse'sche Normalenform. Mit $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$ ergibt sich folgende Hesse'sche Normalenform der Ebene

E: $\frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \frac{10}{\sqrt{21}}$. Die Ebene E hat somit $\frac{10}{\sqrt{21}}$ LE Abstand zum Ursprung.

Setzt man die Koordinaten des Orts- bzw. Stützvektors s_0 der Gerade s in die Hesse'sche Normalenform der Ebene E ein, so erhält man den Abstand einer zu E parallelen Ebene, die die Gerade s enthält, zum Ursprung: $\frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{31}{\sqrt{21}}$.

Für den Abstand d der Geraden s zur Ebene E ergibt sich somit:

$$d = \frac{31}{\sqrt{21}} - \frac{10}{\sqrt{21}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}\ \text{(LE)}.$$

Modelllösung c)

(1) Damit das Dreieck ABC_k bei A rechtwinklig ist, muss der Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{AC_k}$ stehen. Also: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-3k \\ 2k-4 \\ k \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad (-3) \cdot (2-3k) + 2 \cdot (2k-4) + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$

(2) Der Innenwinkel α bei A im Dreieck ABC_1 ist mit $\alpha = 90°$ bekannt.

Für den Innenwinkel β beim Punkt B mit $C_1(3|0|1)$ gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{20}} = \frac{14}{2 \cdot \sqrt{70}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{70} \approx 0{,}8367 \quad \Rightarrow \quad \beta = 33{,}21°$$

Für den Innenwinkel γ beim Punkt C_1 gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 90° - 33{,}21° = 56{,}79°$

Modelllösung d)

(1) Die Grundfläche G des Tetraeders ABC_1S_0 besteht aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC_1. Für die Grundfläche dieses Dreiecks gilt:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21} \text{ (FE)}.$$

Die Höhe des Tetraeders wurde schon in **b) (2)** durch den Abstand der Geraden s von der Ebene E zu $d = \sqrt{21}$ (LE) bestimmt. Damit ergibt sich für das Volumen V des Tetraeders:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{21} = 7 \text{ (VE)}.$$

(2) Da die Gerade c, auf der alle Punkte C_k liegen, parallel zur Geraden g von A nach B ist, ändert sich die Höhe des Dreiecks ABC_k nicht, wenn der Punkt C_k seine Lage verändert. Damit ist die Grundfläche des Dreiecks ABC_k von k unabhängig.
Da alle Punkte der Geraden s von den verschiedenen Grundflächen ABC_k, die alle in der Ebene E liegen, den gleichen Abstand haben, ist die Höhe des Tetraeders ABC_kS_t für alle Punkte S_t der Geraden s gleich und somit von t unabhängig.
Da sich also für alle möglichen Lagen des Punktes C_k auf der Geraden c die Dreiecksfläche des Dreiecks ABC_k nicht ändert und sich die Höhe des Tetraeders ABC_kS_t für alle möglichen Lagen des Punktes S_t auf der Geraden s nicht ändert, ist das Volumen des Tetraeders ABC_kS_t von k und t unabhängig.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) gibt je eine Geradengleichung für die Geraden c und g an.	4 (I)
2	(2) zeigt, dass die Geraden c und g parallel und nicht identisch sind.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) berechnet eine Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform.	7 (I)
2	(2) zeigt, dass die Gerade s und die Ebene E zueinander parallel sind.	4 (II)
3	(2) zeigt, dass die Gerade s und die Ebene E den Abstand $d = \sqrt{21}$ LE voneinander haben.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) ermittelt den Wert von k, für den das Dreieck ABC_k bei A einen rechten Winkel hat.	5 (II)
2	(2) bestimmt die Größe der drei Innenwinkel im Dreieck ABC_1.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) ermittelt das Volumen des Tetraeders ABC_1S_0.	7 (II)
2	(2) begründet, dass das Volumen des Tetraeders ABC_kS_t unabhängig von k und unabhängig von t ist.	7 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt je eine …	4 (I)			
2	(2) zeigt, dass die …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet eine Ebenengleichung …	7 (I)			
2	(2) zeigt, dass die …	4 (II)			
3	(2) zeigt, dass die …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt den Wert …	5 (II)			
2	(2) bestimmt die Größe …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt das Volumen …	7 (II)			
2	(2) begründet, dass das …	7 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0