6L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

Vorklausur **22. März 1993**

1) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $0 < b \leq a$. Wir definieren die Funktion f durch $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich.

a) Diskutieren Sie den Graphen von f, und fertigen Sie für $a = 4$ und $b = 3$ eine Skizze an!

b) Es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c > a$. Ermitteln Sie die quadratische Funktion g, die den gleichen Extrempunkt wie f hat und bei c eine Nullstelle besitzt.

[Zur Kontrolle: $g(x) = -\frac{b}{c^2} \cdot x^2 + b$.]

c) Mit den Funktionen f und g aus a) bzw. b) definieren wir nun eine Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathbb{D}(f),\ x \leq 0, \\ g(x) & \text{falls } 0 < x \leq c. \end{cases}$$

Untersuchen Sie h auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Skizzieren Sie den Graphen von h für $a = 4$, $b = 3$ und $c = 6$!

d) Durch Drehung des Graphen von h um die x-Achse entsteht ein 'Stromlinienkörper'. Berechnen Sie sein Volumen in Abhängigkeit von den drei Parametern a, b und c!

2) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3 \mid 0)$, $B = (19 \mid 8)$ und $C = (1 \mid 14)$. Es seien A', B', C' die den jeweiligen Ecken gegenüberliegenden Seitenmittelpunkte.

a) Bestimmen Sie Zentrum Z und Radius r des Kreises, auf dem die drei Seitenmittelpunkte A', B', C' liegen. [Zur Kontrolle: $Z = (7 \mid 7)$.]

b) Bestimmen Sie die drei Höhenfußpunkte A'', B'', C'' des gegebenen Dreiecks ABC.

c) Bestätigen Sie an dem gegebenen Dreieck den folgenden allgemeingültigen Sachverhalt:

Höhenfußpunkte und Seitenmittelpunkte eines Dreiecks liegen auf einem Kreis, dem sog. Feuerbachkreis.

d) Fertigen Sie parallel zur Lösung von a) – c) eine saubere Skizze an.

bitte wenden!

3) Die Tangensfunktion tan ist definiert durch $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a) Bestimmen Sie das größte zu 0 symmetrische Intervall I, über dem tan definiert ist. Welches Verhalten hat tan an den Rändern dieses Intervalls? Untersuchen Sie tan auf Symmetrie und bestimmen Sie die Nullstellen in I.

b) Begründen Sie, daß tan differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)\,.$$

Bestimmen Sie Extrem- und Wendestellen des Tangens und skizzieren Sie den Graphen über dem Intervall I aus a).

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel aus b) das fünfte Taylorpolynom p_5 des Tangens.

d) Zeigen Sie, daß dieses Taylorpolynom dieselben Null-, Extrem- und Wendestellen hat, wie sie die Tangensfunktion im Intervall I besitzt.

[Arbeiten Sie in c) und d) *notfalls* mit dem dritten Taylorpolynom.]

Vorklausur — Lösungen

1) a) f ist definiert, wo der Radikand nicht-negativ ist:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq a^2 \iff |x| \leq |a| = a \iff x \in [-a, a]\,.$$

Nullstellen von f sind die Nullstellen des Radikanden $a^2 - x^2$, also $\pm a$. Dort liegen zugleich die absoluten Minima, da f keine negativen Werte annimmt.
Außer an seinen Nullstellen ist f überall differenzierbar; die Ableitungen sind über $]-a, a[$ gegeben durch

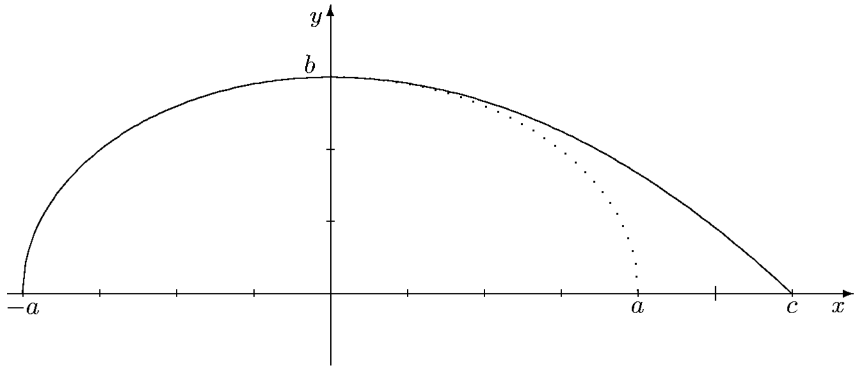
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\,(a^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) \\
&= -\frac{b}{a} \cdot x(a^2 - x^2)^{-1/2} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,, \\
f''(x) &= -\frac{b}{a} \cdot \Big(x \cdot (-\frac{1}{2})(a^2 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) + (a^2 - x^2)^{-1/2}\Big) \\
&= -\frac{b}{a} \cdot (a^2 - x^2)^{-3/2} \cdot (x^2 + (a^2 - x^2)) = \frac{-ab}{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}\,.
\end{aligned}$$

0 ist einzige Nullstelle von f', und zwar mit Vorzeichenwechsel (Zähler x!); der Wechsel erfolgt von positiv zu negativ (Faktor $-b/a < 0$ und Nenner positiv!). Damit hat f bei 0 ein Maximum; der Hochpunkt ist $(0 \mid b)$.
Die zweite Ableitung besitzt keine Nullstellen, f also keine Wendepunkte. $f''(x)$ ist stets negativ, also der Graph von f rechtsgekrümmt.
Da der Graph von f achsensymmetrisch ist, erhält man den vollständigen Graphen von f aus der linken Hälfte der nachstehenden Skizze durch Spiegelung an der y-Achse. Er stellt eine halbe Ellipse dar.
b) Die gesuchte quadratische Funktion hat einen Funktionsterm der Form $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit reellen Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$g(0) = b\,, \quad g'(0) = 0\,,\ g(c) = 0\,.$$

Also $a_0 = b$, $a_1 = 0$ und dann $a_2c^2 + b = 0$, also $a_2 = -b/c^2$. Der so gefundene Funktionsterm ist $g(x)$ wie angegeben. g hat alle geforderten Eigenschaften; insbesondere ist 0 tatsächlich Extremstelle, da g als quadratische Funktion keinen Sattelpunkt besitzen kann.
c) Die Funktion h ist stetig über dem Definitionsbereich $[-a, c]$, da sie aus stetigen Funktionen f und g zusammengesetzt ist und an der Nahtstelle 0 beide Funktionen denselben Wert $f(0) = b = g(0)$ besitzen.
Aus denselben Gründen ist h über $]-a, c]$ differenzierbar, da in diesem Bereich f und g differenzierbar sind und an der Nahtstelle beide Funktionen denselben Ableitungswert (nämlich 0) besitzen.

Skizze:



d) Wir berechnen das Rotationsvolumen in zwei Teilen.

$$\int_{-a}^{0} f^2 = \int_{-a}^{0} \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)\,dx = \frac{b^2}{a^2}\Big[a^2 x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-a}^{0} = \frac{2}{3}\,ab^2\,,$$

$$\int_{0}^{c} g^2 = \int_{0}^{c} (-\frac{b}{c^2}x^2 + b)^2 dx = \int_{0}^{c} (\frac{b^2}{c^4}\,x^4 - 2\frac{b^2}{c^2}\,x^2 + b^2)\,dx$$

$$= \Big[\frac{b^2}{c^4}\frac{x^5}{5} - 2\frac{b^2}{c^2}\frac{x^3}{3} + b^2 x\Big]_0^c = \frac{8}{15}\,b^2 c\,.$$

Damit beträgt das gesamte Rotationsvolumen

$$V = \pi(\frac{2}{3}\,ab^2 + \frac{8}{15}\,b^2 c) = \frac{1}{15}\pi b^2(10a + 8c)\,.$$

2) a) Der Ortsvektor der A gegenüberliegenden Seitenmitte A' ist

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}\,.$$

Auf diese Weise erhält man:

$$A' = (10 \mid 11)\,,\ B' = (2 \mid 7)\,,\ C' = (11 \mid 4)\,.$$

Der Kreis, auf dem die drei Seitenmitten A', B', C' liegen, ist der Umkreis des Dreiecks $A'B'C'$. Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt Z der Mittelsenkrechten dieses Dreiecks. Die Seitenmitten dieses verkleinerten Dreiecks sind:

$$M_{A'B'} = (6 \mid 9)\,,\ M_{A'C'} = (\frac{21}{2} \mid \frac{15}{2})\,,\ M_{B'C'} = (\frac{13}{2} \mid \frac{11}{2})\,.$$

Die Richtungsvektoren der Mittelsenkrechten sind Normalenvektoren zu den Dreiecksseiten: Es ist $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ und ein Normalenvektor dazu $n_{c'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Auf diese Weise erhält man:

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad n_{c'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad n_{a'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{C'A'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad n_{b'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Umkreismittelpunktes als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OM_{A'B'}} + sn_{c'} = \overrightarrow{OM_{A'C'}} + tn_{b'} \\
\iff &\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\iff &\ldots \iff s = 1 \wedge t = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Als Schnittpunkt, und damit Zentrum Z des gesuchten Kreises, erhalten wir so:

$$\text{Zentrum des Kreises:} \quad Z = (7 \mid 7)\,.$$

Der Radius des Umkreises von $A'B'C'$ ist der (gemeinsame) Abstand dieser 3 Punkte von Z. Etwa $d(A', Z) = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = 5$.

$$\text{Radius des Kreises:} \quad r = 5\,.$$

b) Höhenfußpunkte sind die Punkte auf den Dreiecksseiten, deren Verbindungsvektor mit der gegenüberliegenden Ecke senkrecht auf der jeweiligen Dreiecksseite steht. Es bezeichne A'' den A gegenüberliegenden Höhenfußpunkt. Also $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC}$ mit

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BC} \\
\iff &\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\iff &\left\langle \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\
\iff &-48 + 8 + t(54+6) = 0 \iff t = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir die Höhenfußpunkte

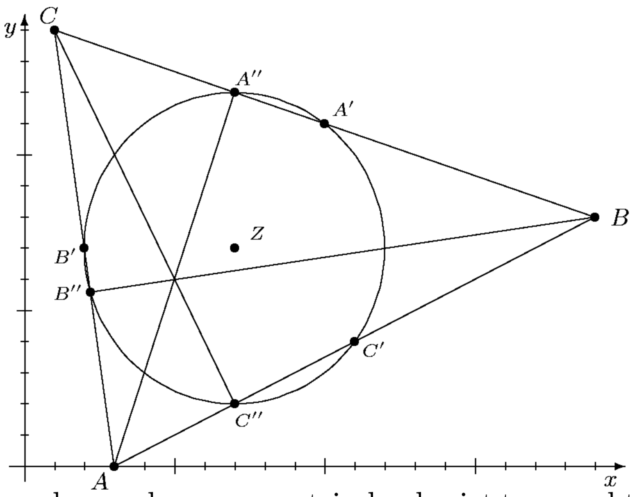
$$A'' = (7 \mid 12)\,,\ B'' = (\frac{11}{5} \mid \frac{28}{5}) = (2{,}2 \mid 5{,}6)\,,\ C'' = (7 \mid 2)\,.$$

c) Der Feuerbachkreis ist notwendig der Umkreis des Dreiecks $A'B'C'$. Dessen Zentrum Z und Radius r ist in a) schon bestimmt, so daß man lediglich überprüfen muß, ob die Höhenfußpunkte ebenfalls den Abstand r von Z haben:

$$\begin{aligned}
d(A'', Z) &= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = 5\,, \\
d(B'', Z) &= \left|\begin{pmatrix} -24/5 \\ -7/5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{576+49}{25}} = 5\,, \\
d(C'', Z) &= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = 5\,.
\end{aligned}$$

Damit liegen die 6 Punkte A', B', C', A'', B'' und C'' alle auf diesem Kreis.

d) Skizze:



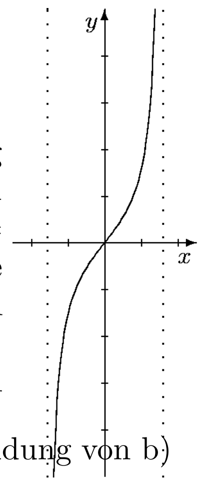
3) a) sin ist punkt- und cos achsensymmetrisch, also ist tan punktsymmetrisch: $\tan(-x) = \sin(-x)/\cos(-x) = -\tan(x)$.
Definitionslücken des Tangens sind die Nullstellen des Cosinus, die kleinste darunter ist $\pi/2$. Also ist tan über $I =]-\pi/2, \pi/2[$ definiert. Da $\sin(\pi/2) = 1$ und $\cos(\pi/2) = 0$ ist, folgt $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \infty$. Nullstellen von tan sind die Nullstellen von sin; davon ist 0 die einzige in I.
b) Als Quotient differenzierbarer Funktionen ist tan (auf seinem Definitionsbereich) differenzierbar, und es gilt:

$$\tan' = \frac{\cos\cdot\cos - \sin\cdot(-\sin)}{\cos^2} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = 1+\tan^2 \ .$$

Es ist damit

$$\tan'' = 2\tan\cdot\tan' = 2\tan(1+\tan^2) = 2\tan + 2\tan^3 \ .$$

Wir erkennen, daß $\tan' = 1+\tan^2$ nur Werte ≥ 1 hat, also tan streng monoton wächst, insbesondere keine Extremstellen besitzt. Dagegen ist 0 einzige Wendestelle von tan in I, denn die Nullstellen von $\tan'' = 2\tan(1+\tan^2)$ sind die von tan, und über $I =]-\pi/2, \pi/2[$ ist 0 die einzige Nullstelle von tan, und bei dieser liegt ein Vorzeichenwechsel vor (Punktsymmetrie von tan).
Diese Resultate führen zu der nebenstehenden Skizze des Graphen von tan.



c) Wir berechnen ausgehend von $\tan'' = 2\tan + 2\tan^3$ unter Verwendung von b)

$$\begin{aligned}
\tan^{(3)} &= 2\tan' + 6\tan^2\tan' = (2+6\tan^2)(1+\tan^2) = 2 + 8\tan^2 + 6\tan^4 \ , \\
\tan^{(4)} &= (16\tan + 24\tan^3)(1+\tan^2) = 16\tan + 40\tan^3 + 24\tan^5 \ , \\
\tan^{(5)} &= 16\tan' + 120\tan^2\tan' + 120\tan^4\tan' \ .
\end{aligned}$$

Mit $\tan(0) = 0$ und $\tan'(0) = 1$ folgt daraus $\tan^{(3)}(0) = 2$, $\tan^{(4)}(0) = 0$ und $\tan^{(5)}(0) = 16$. Wir erhalten so das fünfte Taylorpolynom

$$p_5(x) = x + 2\cdot\frac{x^3}{3!} + 16\cdot\frac{x^5}{5!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \ .$$

d) Es ist

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= x \cdot (\frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + 1) = 0 \iff x = 0\,,\\
p_5'(x) &= \frac{2}{3}x^4 + x^2 + 1 \geq 1\,,\\
p_5''(x) &= \frac{8}{3}x^3 + 2x = x \cdot (\frac{8}{3}x^2 + 2) = 0 \iff x = 0\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist p_5 wie tan streng monoton wachsend; 0 ist einzige Nullstelle von p_5 und p_5'', jeweils einfach, also zugleich Null- und Wendestelle von p_5. Damit hat p_5 dieselben Null-, Extrem- und Wendestellen wie tan sie im Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$ besitzt.