Vertiefung Analytische Geometrie

1) (aus Abi Profi, S. 176)

Gegeben sind die Ebenen:

$E\colon\ 2x + y = -4$

und

$$F\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Schnittgerade zwischen E und F.
b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von E und F.
c) Zeigen Sie, dass alle Ebenen der Ebenenschar

$$E_c\colon\ \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} + 3 + c = 0;\ c \in \mathbb{R}$$

die Schnittgerade aus a) enthalten.
Es sei nun $c_{1,2} \neq 0$. Welche Beziehung muss zwischen c_1 und c_2 bestehen, damit E_{c_1} und E_{c_2} orthogonal zueinander sind?
d) Weisen Sie nach, dass der Vektor $\vec{p}_c = \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von E_c sein kann. Zeigen Sie, dass der Richtungsvektor der Schnittgeraden g (aus a)) und der Vektor $\vec{p}_c$ linear unabhängig sind.
e) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden h_c an, die durch den Punkt $R(-2|0|1)$ verläuft, die in E_c enthalten ist und die rechtwinklig zur Schnittgeraden g aus a) verläuft.

Lösung:

Nachfolgend die Lösungen des Übungsbuches sowie meine Kommentare dazu.

a)

Zur Bestimmung der Schnittgeraden zwischen E und F wird zunächst aus der Parametergleichung von F eine Normalengleichung erstellt.
Ein Normalenvektor von F lässt sich als Vektorprodukt der Richtungsvektoren ermitteln:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot3\\1\cdot1-(-3)\cdot1\\(-3)\cdot3-1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-10\end{pmatrix}.$$

Wegen $\begin{pmatrix}-2\\4\\-10\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$ wählt man als Normalenvektor

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Unter Benutzung des Aufpunkts von F folgt als Normalengleichung:

$$F\colon\ \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}=0$$

und schließlich eine Koordinatengleichung:

$F\colon\ -x+2y-5z=-3.$

Zur Berechnung der Schnittgeraden zwischen E und F untersucht man die Lösungen des LGS:

$$2x+y=-4 \qquad \text{(I)}$$
$$-x+2y-5z=-3 \qquad \text{(II)}$$

Wählt man z.B. $z=t$, so folgt nach $2\cdot\text{(I)}-\text{(II)}$ für $x=-1-t$.

Nein!

Setze P.D. von F in Normalengleichung von E ein:

$$-4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$=-4+r\cdot(-5)+s\cdot5$$

$$\Leftrightarrow\quad r=s.$$

Setze in P.D. von F $r=s$:

$$E\cap F\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$$

P.D. der Schnittgeraden.

Setzt man z und x in (II) ein, so folgt

$y = -2 + 2t.$

Damit folgt als Schnittgerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

b)

Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen E mit dem Normalenvektor

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und F mit dem Normalenvektor

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

folgt aus

$$\cos\gamma = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}}$$

und damit ist

$\cos\gamma = 0.$

Der Schnittwinkel beträgt $\gamma = 90°$, die Ebenen stehen also senkrecht aufeinander.

K

Schneiden sich zwei Ebenen E und F mit den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$, so gilt für ihren Schnittwinkel:

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}_E \bullet \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}.$$

c)

Um zu zeigen, dass alle Ebenen der Ebenenschar

$$E_c\colon \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} + 3 + c = 0; \quad c \in \mathbb{R}$$

die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

enthalten, wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + 3 + c = 0$$

Multipliziert man aus, so folgt

$$\begin{aligned} &-(c+1) - 2 - t(c+1) \\ &\qquad + 2t + t(c-1) + 3 + c = 0 \end{aligned}$$

und weiter mit $0 = 0$ eine wahre Aussage.
Damit liegt g für jedes $c \in \mathbb{R}$ in der Ebenenschar E_c.

Wählt man zwei Ebenen E_{c_1} und E_{c_2} mit $c_{1,2} \neq 0$, so muss wegen der Bedingung ihrer Orthogonalität für die Normalenvektoren das Skalarprodukt null sein:

$$\begin{pmatrix} c_1+1 \\ 1 \\ c_1-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_2+1 \\ 1 \\ c_2-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Berechnung des Skalarprodukts ergibt:

$(c_1+1)(c_2+1) + 1 + (c_1-1)(c_2-1) = 0.$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} c_1c_2 + c_1 + c_2 + 2 + c_1c_2 - c_1 - c_2 + 1 &= 0 \\ 2c_1c_2 + 3 &= 0 \\ c_1c_2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Damit die Ebenen E_{c_1} und E_{c_2} orthogonal zueinander sind, muss gelten

$$c_1c_2 = -\frac{3}{2}.$$

K

Wenn eine Gerade

$g\colon \vec{x} = \vec{q} + r\vec{u}$

in der Ebene

$E\colon \vec{a} \bullet \vec{x} = d$

liegt, so muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$\vec{a} \bullet (\vec{q} + r\vec{u}) = d.$

Rechnung mit Parameter t unnötig. Genügt 2 Punkte einzusetzen!
$(-1,-2,0)$ erfüllt glg (E_c)
Ebenso
$(-2,0,1)$ " " .
fertig.

d)

Damit $\vec{p}_c = \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Ebene E_c sein kann, muss für das Skalarprodukt gelten $\vec{p}_c \bullet \vec{n}_E = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Berechnung des Skalarprodukts ergibt:

$$(1-c)(c+1) + (1-c) + (2+c)(c-1) \cancel{=0}$$

~~Weiter folgt:~~ ||

$$1 - c^2 + 1 - c + 2c - 2 + c^2 - c \cancel{=0}$$

$$= 0 \cancel{=0},$$

mithin eine wahre Aussage.

$\vec{p}_c$ kann somit ein Richtungsvektor der Ebene E_c sein.

genügt nicht!
Ist äquivalent.

Dass 0 = 0 ist, ist wohl klar.
Die Umkehrung der Argumentation ist entscheidend.

Jeder Richtungsvektor einer Ebene steht auf dem Normalenvektor senkrecht; ihr Skalarprodukt muss null sein.

Man stellt den Nullvektor als Linearkombination der Vektoren $\vec{p}_c = \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar:

$$u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1-c \\ 1-c \\ 2+c \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$-u + (1-c)\,v = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$2u + (1-c)\,v = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$u + (2+c)\,v = 0 \qquad \text{(III)}$$

Aus (I) − (II) folgt $-3u = 0$ und damit $u = 0$. Aus (I) + (II) folgt $3v = 0$ und damit $v = 0$. Die obige Vektorgleichung hat nur die triviale Lösung, die Vektoren sind also linear unabhängig.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $u = v = 0$ hat.

e)

Man wählt als Aufpunkt von h_c den Punkt $R(-2|0|1)$, der auch Punkt der Geraden g ist:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektorgleichung ist für $t = 1$ erfüllt.

Die Ebene E_c, in der die gesuchte Gerade h_c liegt, besitzt den Normalenvektor

$$\vec{n}_c = \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix}.$$

Als Richtungsvektor der Geraden h_c kann nun ein Vektor $\vec{n}_{c_1}$ gewählt werden, der Normalenvektor einer einer Ebene E_{c_1} ist, die zu E_c orthogonal ist:

$$\vec{n}_{c_1} = \begin{pmatrix} c_1+1 \\ 1 \\ c_1-1 \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigt man die unter c) hergeleitete Orthogonalitätsbedingung $c \cdot c_1 = -\frac{3}{2}$, so erhält man einen Richtungsvektor von h_c, der in E_c liegt und orthogonal zu g verläuft:

$$\vec{n}_{c_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2c}+1 \\ 1 \\ -\frac{3}{2c}-1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2c}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}.$$

Mit dem vereinfachten Richtungsvektor

$$\vec{u}_c = (-2c) \cdot \vec{n}_{c_1}$$

folgt schließlich als gesuchte Parametergleichung für die Gerade

$$h_c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}.$$

Umständlich

Gesucht ist ein R.V. $\vec{u}$ für h_c. Es muss gelten:

$\vec{u} \perp \vec{n}_c = \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{u} \perp$ R.V. von g: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also wähle

$\vec{u} = \begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}$

$h_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3-2c \\ -2c \\ 3+2c \end{pmatrix}$.

Da $R \in E_c$ gehört, ~~liegt h_c i~~ sind alle Bedingungen erfüllt.