2) (aus Abi Profi, S. 203)

Gegeben sind eine Ebene $E$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, eine Gerade $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und eine Geradenschar $g(a)$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene $E$.
b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage zwischen der Ebenen $E$ und der Geraden $g$. Ermitteln Sie den Abstand zwischen $g$ und $E$ oder den Schnittpunkt $S$ und die Größe des Schnittwinkels $\alpha$.
c) Berechnen Sie den Wert für $a$ so, dass die betreffende Gerade der Schar parallel zu $E$ ist. Welche Lage hat die Gerade dann?
d) Eine Kugel $K$ mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Mittelpunkt hat die Ebene $E$ als Tangentialebene. Bestimmen Sie den Berührpunkt und den Radius der Kugel.

**Lösung:**
a) Wir bestimmen einen Normalenvektor der Ebene durch das Vektorprodukt von zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-8) \cdot 1 - 2 \cdot (-7) \\ -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \\ 1 \cdot (-7) - (-8) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man eine

$$\text{Normalengleichung:} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0\,, \text{bzw. ausgerechnet eine}$$

$$\text{Koordinatengleichung:} \quad 2x + y + 3z = 14$$

b) Der gegebene Richtungsvektor von $g$ ist gleich dem in a) berechneten Normalenvektor von $E$, also schneidet $g$ die Ebene $E$ rechtwinklig. Zur Berechnung des Schnittpunktes $S$ setze man die gegebene Parameterdarstellung von $g$ in die Koordinatengleichung von $E$ ein:

$$14 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 42 + 14t \iff t = -2\,.$$

Der Schnittpunkt ist also gegeben durch

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad S = (-2, -3, 7)\,.$$

c) Damit $g_a$ parallel zur Ebene $E$ verläuft, muss der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix}$ von $g_a$

orthogonal sein zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ von $E$:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -9 + 3a \iff a = 3\,.$$

Die Gerade $g_3$ verläuft also parallel zu $E$; sie liegt sogar in $E$, denn der Geradenpunkt $(-2, 6, 4)$ erfüllt die Ebenengleichung $(2 \cdot (-2) + 6 + 3 \cdot 4 = 14)$, gehört also zu $E$.
d) Der Kugelradius ist der Abstand des Koordinatenursprungs $O$ von $E$, also nach der HESSEschen Abstandsformel

$$d(O, E) = \frac{|0 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\,.$$

Die Tangentialebene an eine Kugel in einem Berührpunkt $B$ ist orthogonal zum Radiusvektor $\overrightarrow{MB}$ vom Mittelpunkt $M$ zum Berührpunkt $B$. Also ist $B$ der Schnittpunkt der zu $E$ orthogonalen Geraden durch $O$ $(g(O, \vec{n}))$ mit der Ebene $E$. Wir setzen

$$\overrightarrow{OB} = r\vec{n} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in die Gleichung $2x + y + 3z = 14$ für $E$ ein:

$$14r = 14 \iff r = 1 \implies B = (2, 1, 3)\,.$$