3) (aus Abi Profi, S. 209)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P(3|-2|1)$, $Q(3|3|1)$, $R(6|3|5)$ sowie die Menge von Punkten $S_a(3a|3+5a|\frac{19}{2}+4a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.
a) Zeigen Sie, dass die Punkte P, Q und R genau eine Ebene E bestimmen. Ermitteln Sie eine Parametergleichung sowie eine Koordinatengleichung von E.
b) Existiert ein Punkt T, sodass das Viereck $PQRT$ ein Quadrat ist? Ermitteln Sie gegebenenfalls diesen Punkt.
c) Weisen Sie nach, dass die Punkte S_a auf einer Geraden g liegen. Zeigen Sie, dass g parallel zur Ebene E verläuft, aber nicht in E liegt.
d) Es existiert auf der Geraden g ein Punkt U so, dass U Spitze einer geraden vierseitigen Pyramide mit der Grundfläche $PQRT$ ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes U sowie die Maßzahl des Volumens der Pyramide $PQRTU$.
e) Der Punkt U soll an der Ebene E gespiegelt werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes U'.

Lösung:
a) Drei Punkte PQR bestimmen genau eine Ebene, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Vielfache voneinander sind. Dies ist nicht der Fall, da sonst beide Vektoren die x-Koordinate 0 haben müssten.
Eine Parameterdarstellung für die Ebene $e = e(P, Q, R)$ ist also

$$X \in e \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

Für die Koordinatengleichung ermitteln wir zunächst einen Normalenvektor über das Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für e und eine Koordinatengleichung für e hat die Form $4x - 3z = d$. Einsetzen von $P = (3, -2, 1) \in e$ ergibt $d = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 9$.
Damit ist $4x - 3z = 9$ eine Koordinatengleichung für e.
[Kontrolle: Alle drei Punkte erfüllen diese Gleichung.]
b) Damit $PQRT$ ein Quadrat ist, muss zunächst bei Q ein rechter Winkel liegen:

$$\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{QR} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Außerdem müssen die am rechten Winkel angrenzenden Seiten gleich lang sein:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = 5, \quad d(Q, R) = |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ergänzt man nun PQR durch einen Punkt T zu einem Parallelogramm, so muss das Viereck $PQRT$ ein Quadrat sein.

$$PQRT \text{ Parallelogramm} \iff \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{QR} \iff \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR}$$

$$\iff \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff T = (6, -2, 5)\,.$$

c) Die Ortsvektoren der Punkte S_a habe alle die Form

$$\overrightarrow{OS_a} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3+5a \\ \frac{19}{2}+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})\,.$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Geraden g.

Diese Gerade verläuft parallel zur Ebene e, da der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ von g orthogonal ist zum Normalenvektor $\vec{n}$ von e:

$$\vec{u} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Die Gerade g liegt aber nicht in e, da der Punkt $(0, 3, \frac{19}{2})$ zwar zu g, aber nicht zu e gehört (er erfüllt die Normalengleichung von e nicht).
Alternative (nur sinnvoll, wenn leerer Durchschnitt vermutet wird): Berechne evtl. Schnittpunkte von g mit e, indem man die Parameterdarstellung von g in die Normalengleichung der Ebene e einsetzt

$$9 = 4x - 3z = 4 \cdot 3a - 3 \cdot (\frac{19}{2} + 4a) = -\frac{57}{2}\,, \text{ Widerspruch!}$$

Also gibt es keinen Schnittpunkt, die Gerade g verläuft parallel zu e, aber nicht in e.
d) Gesucht ist ein Punkt $U = S_a$, so dass der Vektor $\overrightarrow{MS_a}$ vom Mittelpunkt M des Quadrates zu S_a senkrecht zur Ebene e verläuft, und das heißt, senkrecht zu zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren von e. Wir berechnen $M = M_{PR} = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 3)$ und erhalten damit

$$\overrightarrow{MS_a} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+3a \\ \frac{5}{2}+5a \\ \frac{13}{2}+4a \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MS_a} \perp \overrightarrow{PQ} \iff 0 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+3a \\ \frac{5}{2}+5a \\ \frac{13}{2}+4a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} + 25a \iff a = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\overrightarrow{MS_a} \perp \overrightarrow{QR} \iff 0 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+3a \\ \frac{5}{2}+5a \\ \frac{13}{2}+4a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} + 25a \iff a = -\frac{1}{2}\,.$$

Damit hat $U = S_{-\frac{1}{2}} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{2})$ die geforderte Eigenschaft. Als Volumen der Pyramide erhält man damit

$$V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot |\overrightarrow{MU}| = \frac{25}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{125}{2}\,.$$

Alternativ mit dem Spatprodukt:

$$V = \frac{1}{3} (\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}) \bullet \overrightarrow{QU} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(90 + \frac{195}{2}) = \frac{125}{2}\,.$$

e) Der Spiegelpunkt U' von U bzgl. der Ebene e liegt auf dem Lot zu e durch U und zwar „auf der anderen Seite von e“. Dies bedeutet: Ist F der Lotfußpunkt von U auf e, so muss gelten:

$$\overrightarrow{FU'} = -\overrightarrow{FU} \iff \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{FU}\,.$$

Im vorliegenden Fall ist $M = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 3)$ der Lotfußpunkt (siehe d)) und daher

$$\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MU} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow U' = (\frac{21}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\,.$$