Übungen vor dem Abitur: Analysis

1) (aus Erfolg im Mathe-Abi, Aufgabe 7)

7 Exponentialfunktion – Funktionenschar

Tipps ab Seite 52, Lösungen ab Seite 97

Gegeben sei die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (k-x)\cdot e^x$; $k \in \mathbb{R}_0^+$, $x \in \mathbb{R}$.

Drei Graphen von f_k sind in Abbildung 1 zu sehen.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_k auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte und Wendepunkte.
Ordnen Sie den Graphen der Schar in Abbildung 1 ihre Parameter zu.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve aller Hochpunkte der Funktionenschar.

b) Ein Rechteck liegt im ersten Quadranten und wird nach links und nach unten durch die Koordinatenachsen begrenzt. Die rechte obere Ecke soll auf dem Graphen von f_2 liegen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Eckpunkts so, dass das Rechteck den größten Flächeninhalt annimmt. Geben Sie die Größe dieser maximalen Rechtecksfläche an.

c) Beschreiben Sie ausgehend von den ersten drei Ableitungen von f_k, welchem Bildungsgesetz die Funktionsterme der höheren Ableitungen gehorchen.
Leiten Sie damit her, dass $F_2(x) = (3-x)\cdot e^x$ eine Stammfunktion von f_2 ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom zu f_2 zugehörigen Graphen und der x-Achse im ersten und zweiten Quadranten eingeschlossen wird.

d) Zeigen Sie, dass sich alle Tangenten, die im jeweiligen Schnittpunkt mit der y-Achse an die Graphen von f_k gelegt werden, in einem Punkt schneiden.

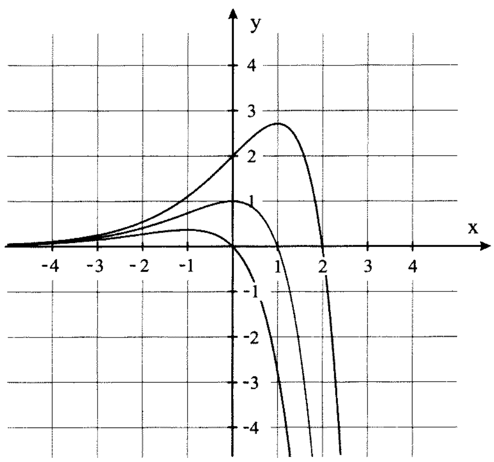


Abbildung 1

2) (aus Erfolg im Mathe-Abi, Aufgabe 9)

9 Exponentialfunktion – Schädlinge

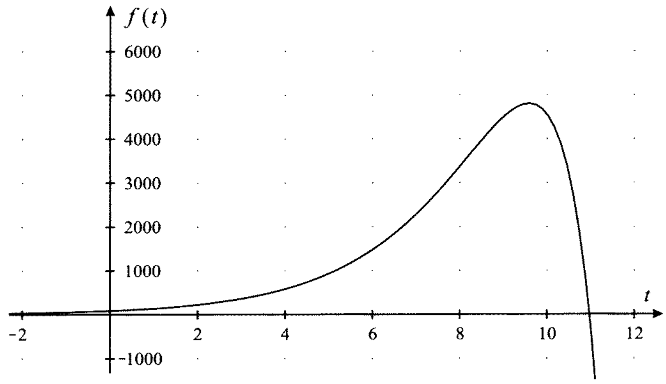
Tipps ab Seite 54, Lösungen ab Seite 104

Zu jedem $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(t) = 80e^{k\cdot t} - \frac{1}{3}e^{2k\cdot t} = 80e^{k\cdot t} - \frac{1}{3}\left(e^{k\cdot t}\right)^2 ; t \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der t-Achse, die Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie die Asymptoten von f_k.

b) Begründen Sie, dass der folgende Graph zu $f_{0,5}$ gehört:



c) Die t-Achse und der Graph von f_k begrenzen eine bis «ins Unendliche reichende» Fläche. Berechnen Sie die Gleichung der zur t-Achse senkrechten Geraden g, welche diese Fläche in zwei Teilflächen einteilt, so dass der Inhalt der linken Teilfläche dreimal so groß ist wie der Inhalt der rechten Teilfläche.

d) Der Graph von $f_{0,5}$ (siehe Aufgabenteil b) zeigt die Entwicklung einer Schädlingspopulation in einem Wald während der Bekämpfung mit einem Pestizid, beginnend bei $t_1 = 0$ und endend zu derjenigen Zeit t_2, ab der keine Schädlinge mehr im Wald vorhanden sind. Dabei gilt:

1 Einheit der Funktionswerte $\widehat{=}$ 1000 Schädlinge, 1 Einheit der t-Werte $\widehat{=}$ 1 Tag

I) Beschreiben Sie kurz die Entwicklung der Population im Intervall $[t_1 ; t_2]$. Gehen Sie dabei auf die Größe und die Wachstumsgeschwindigkeit der Schädlingspopulation ein.

II) 18 Stunden bevor die Population am stärksten wuchs, wurde das Pestizid über dem Wald versprüht. Bestimmen Sie den Zeitpunkt und die Anzahl der Schädlinge zu diesem Zeitpunkt.

III) Jeder Schädling vertilgt pro Tag $3\,\text{cm}^2$ Blattfläche. Wie viel Blattfläche wurde von den Schädlingen insgesamt gefressen?

9 Exponentialfunktion – Schädlinge

a) Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(t) = 80e^{k \cdot t} - \frac{1}{3}e^{2k \cdot t} = 80e^{k \cdot t} - \frac{1}{3}\left(e^{k \cdot t}\right)^2$; $t \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte des Graphen von f_k mit der t-Achse muss gelten: $f_k(t) = 0$.

Dies führt zu $80e^{k \cdot t} - \frac{1}{3}\left(e^{k \cdot t}\right)^2 = 0$ bzw. $e^{k \cdot t} \cdot \left(80 - \frac{1}{3}e^{k \cdot t}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(240)}{k}$

Damit hat der Graph von f_k genau einen Schnittpunkt mit der t-Achse: $\mathrm{N}_k\left(\frac{\ln(240)}{k} \mid 0\right)$.

Um die Hoch- und Tiefpunkte zu bestimmen, benötigt man die 1. und 2. Ableitung, die man mit Hilfe der Kettenregel erhält:

$$f_k{}'(t) = 80e^{k \cdot t} \cdot k - \frac{1}{3}e^{2k \cdot t} \cdot 2k = e^{k \cdot t} \cdot k \cdot \left(80 - \frac{2}{3}e^{k \cdot t}\right)$$

$$f_k{}''(t) = 80e^{k \cdot t} \cdot k^2 - \frac{1}{3}e^{2k \cdot t} \cdot (2k)^2 = e^{k \cdot t} \cdot k^2 \cdot \left(80 - \frac{4}{3}e^{k \cdot t}\right)$$

Die notwendige Bedingung $f_k{}'(t) = 0$ führt zu:

$e^{k \cdot t} \cdot k \cdot \left(80 - \frac{2}{3}e^{k \cdot t}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(120)}{k}$

Die hinreichende Bedingung ergibt:

$$f_k{}''\left(\frac{\ln(120)}{k}\right) = e^{k \cdot \ln(120) \cdot \frac{1}{k}} \cdot k^2 \cdot \left(80 - \frac{4}{3}e^{k \cdot \ln(120) \cdot \frac{1}{k}}\right) = e^{\ln(120)} \cdot k^2 \cdot \left(80 - \frac{4}{3}e^{\ln(120)}\right)$$

$$= 120 \cdot k^2 \cdot \left(80 - \frac{4}{3} \cdot 120\right) = -9600 \cdot k^2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Mit $f_k\left(\frac{\ln(120)}{k}\right) = 80e^{k \cdot \ln(120) \cdot \frac{1}{k}} - \frac{1}{3}e^{2k \cdot \ln(120) \cdot \frac{1}{k}} = 80 \cdot 120 - \frac{1}{3} \cdot (120)^2 = 4800$ erhält man als einzigen Extrempunkt den Hochpunkt $\mathrm{H}_k\left(\frac{\ln(120)}{k} \mid 4800\right)$.

Für Wendepunkte benötigt man neben der 2. Ableitung noch die 3. Ableitung von $f_k(t)$, die man auch mit der Kettenregel erhält:

$f_k{}'''(t) = 80e^{k \cdot t} \cdot k^3 - \frac{1}{3}e^{2k \cdot t} \cdot (2k)^3 = e^{k \cdot t} \cdot k^3 \cdot \left(80 - \frac{8}{3}e^{k \cdot t}\right)$

Die notwendige Bedingung $f_k{}''(t) = 0$ führt zu:

$e^{k \cdot t} \cdot k^2 \cdot \left(80 - \frac{4}{3}e^{k \cdot t}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(60)}{k}$

Die hinreichende Bedingung ergibt:

$$f_k{}'''\left(\frac{\ln(60)}{k}\right) = e^{k \cdot \ln(60) \cdot \frac{1}{k}} \cdot k^3 \cdot \left(80 - \frac{8}{3}e^{k \cdot \ln(60) \cdot \frac{1}{k}}\right)$$

$$= e^{\ln(60)} \cdot k^3 \cdot \left(80 - \frac{8}{3}e^{\ln(60)}\right)$$

$$= 60 \cdot k^3 \cdot \left(80 - \frac{8}{3} \cdot 60\right) = -4800 \cdot k^3 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Mit $f_k\left(\frac{\ln(60)}{k}\right) = 80e^{k \cdot \ln(60) \cdot \frac{1}{k}} - \frac{1}{3}e^{2k \cdot \ln(60) \cdot \frac{1}{k}} = 80 \cdot 60 - \frac{1}{3} \cdot (60)^2 = 3600$ erhält man als einzigen Wendepunkt $\mathrm{W}_k\left(\frac{\ln(60)}{k} \mid 3600\right)$.

Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des Graphen von f_k betrachtet man die Grenzwerte $\lim\limits_{t \to -\infty}(f_k(t))$ sowie $\lim\limits_{t \to +\infty}(f_k(t))$.

Für $t \to -\infty$ ist $\lim\limits_{t \to -\infty}\left(e^{k \cdot t}\right) = 0$ und damit:

$$\lim_{t \to -\infty}(f_k(t)) = \lim_{t \to -\infty}\left(e^{k \cdot t} \cdot \left(80 - \tfrac{1}{3}e^{k \cdot t}\right)\right) = \lim_{t \to -\infty}\left(e^{k \cdot t}\right) \cdot \lim_{t \to -\infty}\left(80 - \tfrac{1}{3}e^{k \cdot t}\right) = 0 \cdot 80 = 0$$

Somit ist für $t \to -\infty$ die t-Achse waagerechte Asymptote des Graphen von f_k.

Für $t \to +\infty$ geht $e^{k \cdot t} \to +\infty$, somit geht $f_k(t) = e^{k \cdot t} \cdot \left(80 - \frac{1}{3}e^{k \cdot t}\right) \to -\infty$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{t \to +\infty}(f_k(t))$ existiert also nicht; es gibt keine weitere Asymptote.

b) Um zu begründen, dass der abgebildete Graph zu $f_{0,5}$ gehört, betrachtet man die in Aufgabenteil a) allgemein hergeleiteten Punkte für den Parameterwert $k = 0,5$. Es genügt die Bestimmung des Schnittpunkts mit der t-Achse, des Hoch- und Wendepunkts sowie der Asymptote. Einsetzen von $k = 0,5$ in $\mathrm{N}_k\left(\frac{\ln(240)}{k} \mid 0\right)$, $\mathrm{H}_k\left(\frac{\ln(120)}{k} \mid 4800\right)$ und $\mathrm{W}_k\left(\frac{\ln(60)}{0,5} \mid 3600\right)$ ergibt:

$$\mathrm{N}_{0,5}\left(\frac{\ln(240)}{0,5} \mid 0\right) = (2 \cdot \ln(240) \mid 0) \approx (10,96 \mid 0)$$

$$\mathrm{H}_{0,5}\left(\frac{\ln(120)}{0,5} \mid 4800\right) = (2 \cdot \ln(120) \mid 4800) \approx (9,57 \mid 4800)$$

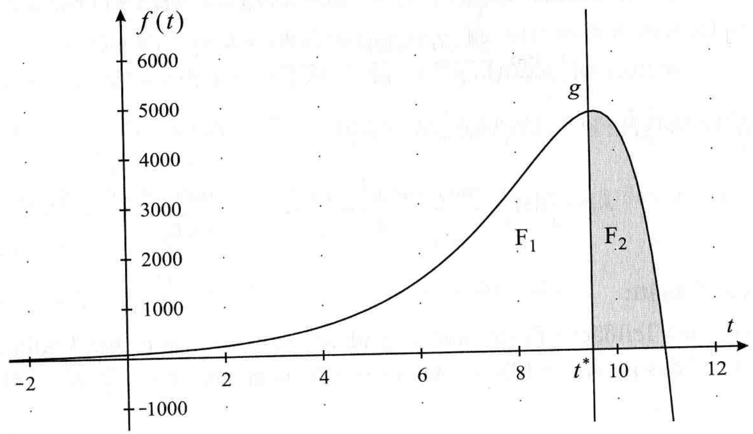
$$\mathrm{W}_{0,5}\left(\frac{\ln(60)}{0,5} \mid 3600\right) = (2 \cdot \ln(60) \mid 3600) \approx (8,19 \mid 3600)$$

Diese Werte stimmen mit den entsprechenden Punkten des abgebildeten Graphen überein, wenn man gewisse Ungenauigkeiten, die sich beim Ablesen ergeben, berücksichtigt.

Für $t \to -\infty$ ist die t-Achse Asymptote des Graphen von $f_{0,5}$.

Somit kann angenommen werden, dass der abgebildete Graph zu $f_{0,5}$ gehört.

c) Die Fragestellung lässt sich an folgender Skizze veranschaulichen:



Die Gerade $g : t = t^*$ steht senkrecht zur t-Achse und teilt die «nach links ins Unendliche reichende» Fläche zwischen der t-Achse und dem Graphen von $f_k(t)$ so, dass die linke Teilfläche F_1 dreimal so groß ist wie die rechte Teilfläche F_2. Zur Berechnung von t^* geht man in drei Schritten vor:

1. Schritt:
Berechnung des Flächeninhalts A_k der bis «ins Unendliche reichenden» Fläche.

2. Schritt:
Bestimmung des Flächeninhalts F_2 der rechten Teilfläche in Abhängigkeit von k.

3. Schritt:
Berechnung der Integrationsgrenze t^* mit Hilfe von F_2.

Zum 1. Schritt:
Man erhält den Flächeninhalt A_k der «nach links bis ins Unendliche reichenden» Fläche durch Integration der Funktion f_k. Die rechte Integrationsgrenze ist festgelegt durch den t-Wert von $N_k\left(\frac{\ln(240)}{k} \mid 0\right)$. Die linke Integrationsgrenze sei a mit $a < \frac{\ln(240)}{k}$. Als Grenzwert für $a \to -\infty$ erhält man den gesuchten Flächeninhalt der bis «ins Unendliche reichenden» Fläche. Die Integrationsvariable ist t; die Parameter k und a werden beim Integrieren wie Konstanten behandelt:

$$\begin{aligned}
A_k &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{\frac{\ln(240)}{k}} f_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{\frac{\ln(240)}{k}} \left(80e^{k\cdot t} - \frac{1}{3}e^{2k\cdot t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{80e^{k\cdot t}}{k} - \frac{e^{2k\cdot t}}{3\cdot 2k}\right]_a^{\frac{\ln(240)}{k}} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{80e^{k\cdot\ln(240)\cdot\frac{1}{k}}}{k} - \frac{e^{2k\cdot\ln(240)\cdot\frac{1}{k}}}{3\cdot 2k} - \frac{80e^{k\cdot a}}{k} + \frac{e^{2k\cdot a}}{3\cdot 2k}\right) \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{80\cdot 240}{k} - \frac{(240)^2}{6k} - \frac{80e^{k\cdot a}}{k} + \frac{e^{2k\cdot a}}{6k}\right) \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{57600 - 480e^{k\cdot a} + e^{2k\cdot a}}{6k}
\end{aligned}$$

Für $a \to -\infty$ geht $e^{k\cdot a} \to 0$, also ergibt sich:

$$A_k = \lim_{a\to-\infty} \frac{57600 - 480e^{k\cdot a} + e^{2k\cdot a}}{6k} = \frac{57600 - 0 + 0}{6k} = \frac{9600}{k}$$

Zum 2. Schritt:
Da die linke Teilfläche F_1 dreimal so groß sein soll wie die rechte Teilfläche F_2, muss F_2 ein Viertel des gesamten Flächeninhalts von A_k sein, also: $F_2 = \frac{1}{4} \cdot A_k = \frac{2400}{k}$.

Zum 3. Schritt:
Gesucht ist nun die Integrationsgrenze t^*, wobei t^* folgende Bedingung erfüllen muss:

$$F_2 = \int_{t^*}^{\frac{\ln(240)}{k}} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2400}{k};\; t^* < \frac{\ln(240)}{k}$$

Wegen $\int_{t^*}^{\frac{\ln(240)}{k}} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{57600-480e^{k\cdot t^*}+e^{2k\cdot t^*}}{6k} = \frac{2400}{k}$ folgt: $e^{2k\cdot t^*} - 480e^{k\cdot t^*} + 43200 = 0$

Man substituiert $z = e^{k\cdot t^*}$ und löst die quadratische Gleichung $z^2 - 480z + 43200 = 0$ mit der pq- oder abc-Formel: $z_1 = 360$ und $z_2 = 120$.
Die Resubstitution führt zu den beiden Lösungen

$$t_1^* = \frac{\ln(360)}{k} \text{ und } t_2^* = \frac{\ln(120)}{k}$$

Wegen $t^* < \frac{\ln(240)}{k}$, kann t_1^* keine Lösung sein, somit lautet die Gleichung der gesuchten Geraden $g : t = \frac{\ln(120)}{k}$.

d) I) Der Graph von $f_{0,5}$ beschreibt im Intervall $[t_1\,; t_2] = \left[0\,; \frac{\ln(240)}{0,5}\right] \approx [0\,; 10,96]$ die Entwicklung einer Schädlingspopulation in einem Wald während der Bekämpfung mit einem Pestizid.
Wegen $f_{0,5}(0) = 80e^{0,5\cdot 0} - \frac{1}{3}e^{2\cdot 0,5\cdot 0} = 79\frac{2}{3}$ hat die Population zu Beginn ($t = 0$) eine Größe von etwa 79 667 Schädlingen.
Wegen $H_{0,5}\left(\frac{\ln(120)}{0,5} \mid 4800\right) \approx (9,57 \mid 4800)$ hat die Population nach etwa 9,57 Tagen ihre maximale Größe von 4 800 000 Schädlingen erreicht.
Wegen $N_{0,5}\left(\frac{\ln(240)}{0,5} \mid 0\right) \approx (10,96 \mid 0)$ ist die Population nach etwa 11 Tagen nicht mehr vorhanden.
Die Population nimmt also bis zum Hochpunkt zu und anschließend wieder ab.
Die Wachstumsgeschwindigkeit (d.h. die momentane Änderungsrate $f_{0,5}{}'(t)$) nimmt bis zum Wendepunkt zu und wird dann wieder kleiner; nach dem Hochpunkt ist die Wachstumsgeschwindigkeit negativ, d.h. die Population geht zurück.

II) Der Zeitpunkt des stärksten Populationswachstums ist an der Wendestelle von $f_{0,5}$, also bei $t = \frac{\ln(60)}{0,5} \approx 8,19$ Tagen.
Das Pestizid wurde 18 Stunden (entspricht 0,75 Tagen) vor diesem Zeitpunkt versprüht, also bei $t_p = \frac{\ln(60)}{0,5} - 0,75 \approx 7,44$ Tagen.
Setzt man $t_p = \frac{\ln(60)}{0,5} - 0,75$ in $f_{0,5}(t)$ ein, so erhält man:

$$f_{0,5}\left(\frac{\ln(60)}{0,5} - 0,75\right) = 80e^{0,5\cdot\left(\frac{\ln(60)}{0,5}-0,75\right)} - \frac{1}{3}e^{2\cdot 0,5\cdot\left(\frac{\ln(60)}{0,5}-0,75\right)} \approx 2732,485.$$

2732,1487

Die Anzahl der Schädlinge betrug zu diesem Zeitpunkt somit etwa 2 732 485.

III) Die Blattfläche A, die von der Population während des gesamten Beobachtungszeitraums vertilgt wurde, berechnet man mit Hilfe des Integrals:

$$
\begin{aligned}
A &= 3\cdot 1000\cdot \int_0^{2\cdot\ln(240)} \left(f_{0,5}(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 3000\cdot \int_0^{2\cdot\ln(240)} \left(80e^{0,5\cdot t}-\frac{1}{3}e^t\right)\mathrm{d}t \\
&= 3000\cdot \left[160e^{0,5\cdot t}-\frac{1}{3}e^t\right]_0^{2\cdot\ln(240)} = 3000\cdot\left(160\cdot 240-\frac{1}{3}\cdot(240)^2-160+\frac{1}{3}\right) \\
&= 57\,121\,000\,\mathrm{cm}^2 \\
&\approx 5712\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Im Laufe der knapp 11 Tage Beobachtungszeit haben die Schädlinge eine Blattoberfläche von etwa $5712\,\mathrm{m}^2$ vertilgt.