

Aufgabe 6: Weingläser

Verwendung

Qualifikationsphase 4. Semester

(Leistungskurs mit Modifikationsmöglichkeit für einen Grundkurs)

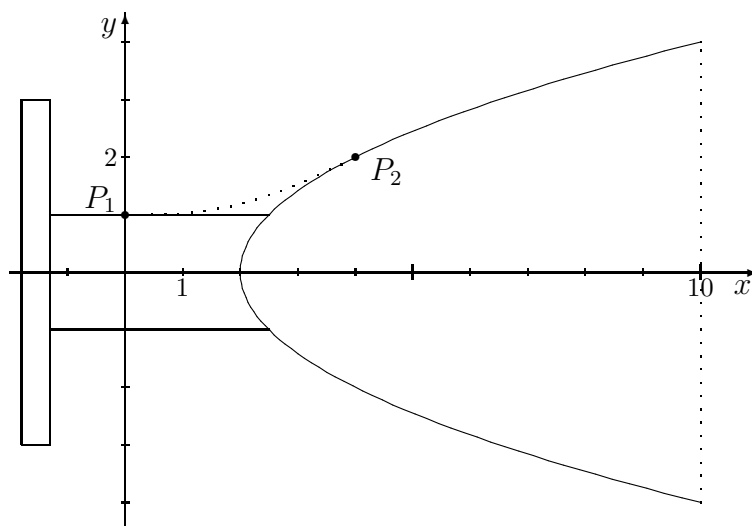
Bemerkungen zur Aufgabe

Diese Aufgabe behandelt verschiedene Themen der Analysis: Bestimmung konkreter Funktionen aus einer Skizze, Berechnung von Rotationsvolumina, Differenzierbarkeit stückweise definierter Funktionen, Ermittlung von Funktionsscharen mit vorgegebenen Eigenschaften, Analyse spezieller Funktionen der Schar. Die Studierenden sollen an dieser Aufgabe nachweisen, dass sie die gestellten Probleme mit den richtigen Hilfsmitteln und Methoden verknüpfen und dann erfolgreich lösen können.

Daneben soll die Aufgabe zeigen, wie man Funktionsscharen in ihrer natürlichen Bedeutung als Parametrisierung der Lösungen eines gegebenen Problems behandeln kann und sie nicht vordergründig allein zur Erhöhung des Anforderungsniveaus einsetzt. Schließlich versucht die Aufgabe durch die Thematisierung des Differenzierbarkeitsbegriffes einer schematisch-operativen Sicht der Ableitung entgegenzuwirken.

Aufgabenstellung

Ein Betrieb stellt Weingläser her, deren Schnittbild in der Zeichnung dargestellt ist.



- a) Wieviel fasst das Glas, wenn die Querschnittskurve eine Parabel ist?

[Für die nachfolgenden Aufgabenteile können Sie davon ausgehen, dass der obere Parabelast durch eine Funktion g gegeben ist mit $g'(4) = \frac{1}{2}$ und $g''(4) = -\frac{1}{8}$.]

Der Herstellerbetrieb verfügt über einen computergestützten Automaten, der es ermöglicht, für die Randfunktion der Gläser ganzrationale Funktionen bis zum Grade 4 vorzugeben.

- b) Die Form des Glasansatzes soll zwischen den Punkten $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (4, 2)$ neu gestaltet werden, und zwar so, dass ein *glatter* (= differenzierbarer) Übergang entsteht (wie in der Skizze bereits angedeutet). Bestimmen Sie alle derartigen Formen, die mit dem Automaten erzeugt werden können.

[Ein mögliches Ergebnis: $f_c(x) = (\frac{c}{16} - \frac{1}{256})x^4 + (\frac{1}{32} - \frac{c}{2})x^3 + cx^2 + 1$.]

- c) Ist es möglich, zwischen P_1 und P_2 die Verbindungskurve so zu wählen, dass an einer oder beiden Nahtstellen auch die Krümmungen der Teilstücke übereinstimmen? Realisieren Sie alle Möglichkeiten und analysieren Sie die entstehenden Formen (Wende- und Extrempunkte).

Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner

Unterrichtliche Voraussetzungen

Diese Aufgabe setzt den üblichen Kanon der Analysis-Ausbildung im 3. und 4. Semester der Qualifikationsphase voraus. Sie ist hier für einen Leistungskurs konzipiert, kann jedoch auch für einen Grundkurs modifiziert werden (siehe unten). Die Anforderungen der Aufgabe betreffen im Wesentlichen die Differentialrechnung, es sind aber auch Grundkenntnisse der Integralrechnung sowie über die Lösung linearer Gleichungssysteme notwendig. Insbesondere mehrdeutig lösbare Gleichungssysteme und die dabei auftretenden parametrisierten Lösungen müssen den Studierenden bekannt sein.

Der Begriff der Differenzierbarkeit und seine anschauliche Bedeutung als Glattheit des Graphen muss den Studierenden vertraut sein, etwa durch die Behandlung stückweise definierter Funktionen mit der Problematik des glatten Übergangs an den Nahtstellen. Eine nur kalkülhafte Sicht des Ableitungsbegriffs reicht hier nicht aus.

Leistungserwartungen

- a) Die Studierenden müssen zunächst einen Ansatz für die gesuchte Funktion zur Beschreibung des oberen Parabelastes finden: $g(x) = c\sqrt{x - x_0}$ mit $x_0 = 2$ (Stelle des Scheitelpunktes). c ergibt sich dann aus dem Punkt $P_2 = (4, 2)$ auf dem Graphen von g . Dies führt zu $g(x) = \sqrt{2}\sqrt{x - 2} = \sqrt{2x - 4}$. (Alternativ kann man auch von der quadratischen Gleichung $x = ay^2 + 2$ für die liegende Parabel ausgehen.)

Das gesuchte (Rotations-)Volumen berechnet sich nun sehr einfach:

$$V = \pi \int_2^{10} (2x - 4) dx = 64\pi \approx 201,06.$$

- b) Wir setzen an $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, also $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, mit den Forderungen: $e = f(0) = 1$, $f(4) = 2$ und wegen der Glattheitsforderung $d = f'(0) = 0$ sowie $f'(4) = g'(4)$. Mit $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 4}}$ erhält man $g'(4) = \frac{1}{2}$ und damit die beiden folgenden linearen Gleichungen für 3 Unbekannte a, b, c :

$$2 = 256a + 64b + 16c + 1, \quad \frac{1}{2} = 256a + 48b + 8c.$$

Damit ist eine Unbekannte frei wählbar (etwa c) und man erhält wie üblich (Elimination von a) für b und schließlich für a die im Kontrollerggebnis angegebenen Terme.

Geht man bei der Elimination in anderer Reihenfolge vor, so können sich auch andere Beschreibungen derselben Funktionenschar ergeben, etwa mit a als freiem Parameter: $g_a(x) = ax^4 - 8ax^3 + (16a + \frac{1}{16})x^2 + 1$. Dieser Term ist zwar einfacher als der angegebene für f_c , allerdings ist bei obigem Gleichungssystem die Elimination von a naheliegender. Darüber hinaus ist auch die weitere Rechnung mit dem angegebenen $f_c(x)$ in Details etwas einfacher.

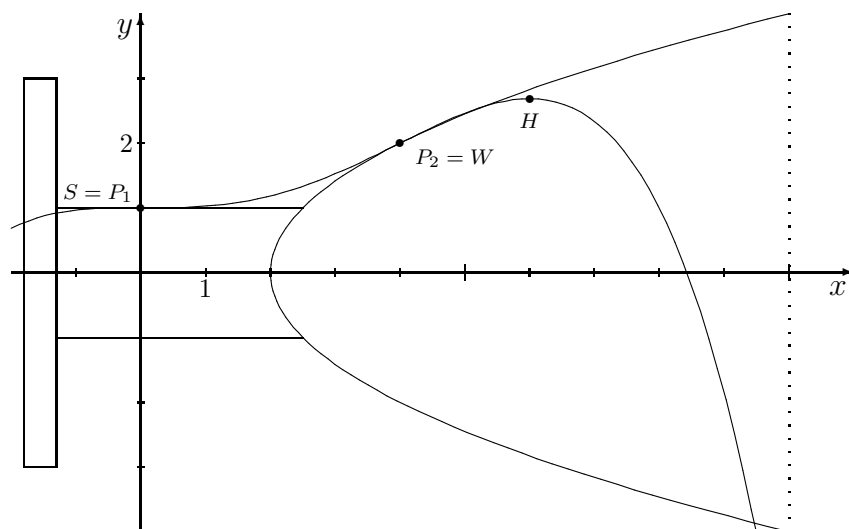
- c) Man kann entweder bei P_1 gleiche Krümmung (d. h. gleiche zweite Ableitungen) erreichen, oder bei P_2 , nicht jedoch an beiden Stellen.

1. Gleiche Krümmung bei P_1 führt zur Forderung $0 = f_c''(0) = c$ und damit zu der Funktion $f_0(x) = -\frac{1}{256}x^4 + \frac{1}{32}x^3 + 1$.

Aus $f_0'(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{32}x^2 = -\frac{1}{64}x^2(x - 6)$ entnimmt man eine Extremstelle bei $x = 6$ (Nullstelle von f_0' mit Vorzeichenwechsel), während bei $x = 0$ eine Sattelstelle liegt (doppelte Nullstelle von f_0'). An $f_0''(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{16}x = -\frac{3}{64}x(x - 4)$ erkennt man (neben der Sattelstelle $x = 0$) die zweite Wendestelle bei $x = 4$

(einfache Nullstelle von f_0''). Die Funktion f_0 hat also P_1 als Sattel- und P_2 als Wendepunkt, sowie $E = (6, \frac{43}{16})$ als einzigen Extrempunkt. Dieser muss ein Hochpunkt sein, da der führende Koeffizient von f_0 negativ ist. (Alternativ: $f_0''(6) < 0$.)

Skizze:



2. Gleiche Krümmung bei P_2 führt zu $f_c''(4) = g''(4)$. Aus $g''(x) = -(2x - 4)^{-\frac{3}{2}}$ und $f_c''(x) = (-\frac{3}{64} + \frac{3c}{4})x^2 - (\frac{3}{16} - 3c)x + 2c$ erhält man dann

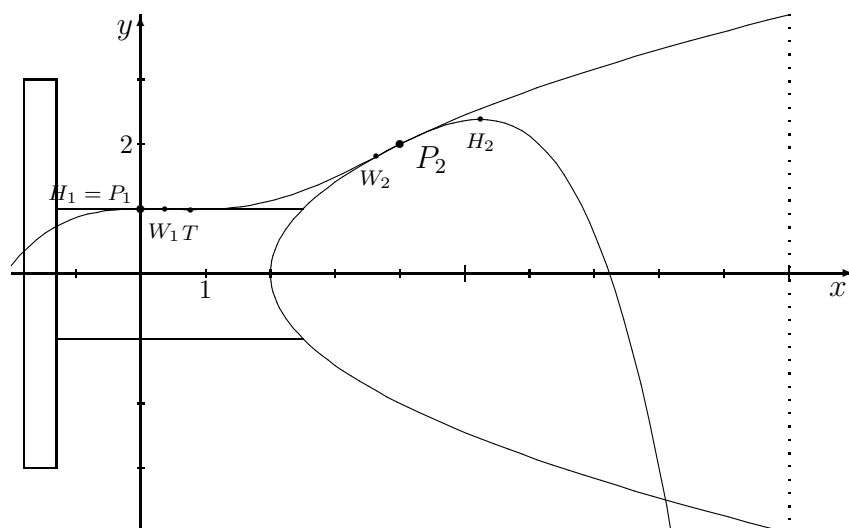
$$f_c''(4) = 2c = g''(4) = -\frac{1}{8} \iff c = -\frac{1}{16}.$$

Die zugehörige Funktion ist somit $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + 1$.

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x$ mit drei verschiedenen Nullstellen $x = 0$ sowie $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Diese sind folglich sämtlich einfache Nullstellen von f' und somit Extremstellen von f . Da der führende Koeffizient von f negativ ist, ergibt dies zwei Hochpunkte $H_1 = P_1$ und H_2 bei $x = 3 + \sqrt{5} \approx 5,2$ sowie ein Tiefpunkt T dazwischen bei $x = 3 - \sqrt{5} \approx 0,76$. Bei dieser Lösung entsteht im Stiel eine kleine Verengung bei T .

Es ist $f''(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}$ mit den beiden (ebenfalls notwendig einfachen) Nullstellen $2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$. Im Gegensatz zu f_0 hat dieses f also keinen Sattel-, sondern 2 Wendepunkte.

Skizze:



- Um an beiden Punkten die Krümmungen anpassen zu können, muss ein neuer Automat angeschafft werden, der auch Funktionen höheren Grades realisieren kann.

Bewertung

Die Note *gut* sollen Studierende erhalten, die die zentralen Aufgabenteile b) und c) erfolgreich bearbeiten. Kleinere Mängel in diesem Bereich können durch die erfolgreiche Bearbeitung des als Einstieg gedachten Teils a) kompensiert werden.

Die Note *ausreichend* erzielen Studierende, die neben Aufgabenteil a) in den Funktionsuntersuchungen von c) (auf der Basis des Kontrollergebnisses) die Beherrschung der grundlegenden Techniken nachweisen.

Modifikationsmöglichkeiten

Die Grundstruktur der Aufgabe kann auch in einem Grundkurs verwendet werden, etwa indem man in a) die Randfunktion des Graphen angibt. Dies erleichtert die Lösung von a) sowie den Ansatz von b). In c) könnte man zwar beide Funktionen bestimmen, aber nur eine analysieren lassen.

Setzt man die Aufgabe im Abitur ein, so kann man Bezüge zur linearen Algebra herstellen, etwa indem man thematisiert, dass die Lösungsschar von b) eine Gerade im Vektorraum der ganzrationalen Funktionen vom Grade ≤ 4 ist, und die Bedeutung eines Richtungsvektors sowie eines Basispunktes dieser Geraden herausarbeiten lässt.

Über den Differenzierbarkeitsbegriff hinaus kann man auch die Stetigkeit explizit ansprechen, sofern diese im Unterricht thematisiert wurde. Die Forderungen des stetigen oder glatten Übergangs an den Punkten sowie die Forderung von c) kann man wieder im Lichte der linearen Algebra deuten.