

## Aufgabe 7: Design eines Bierglases

### Verwendung

Abitur (Leistungskurs)

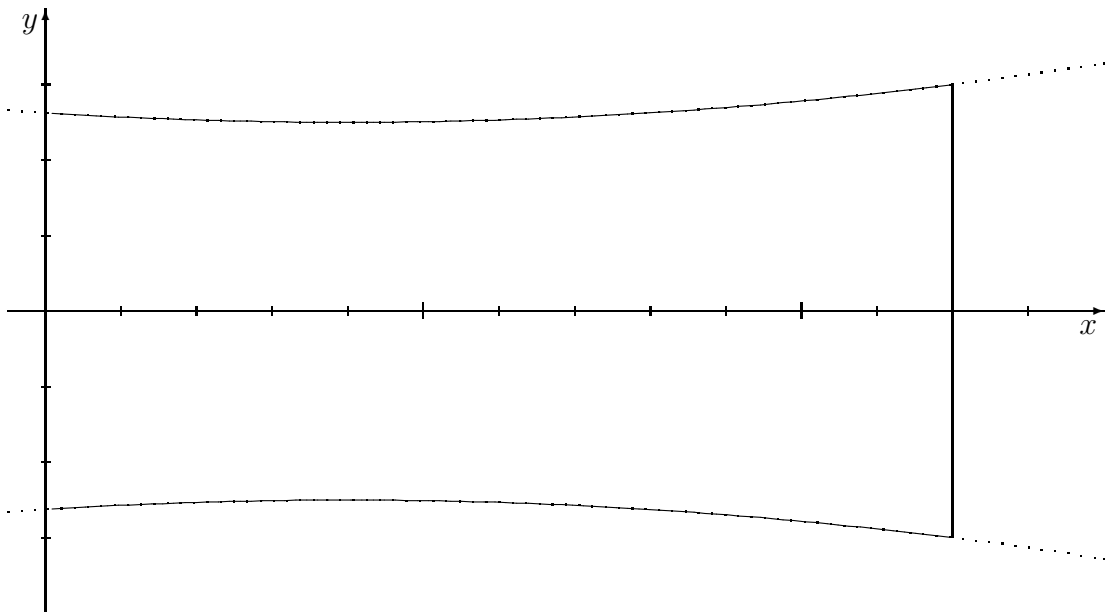
### Bemerkungen zur Aufgabe

Diese zweite Aufgabe zum Thema Glasgestaltung behandelt als Abituraufgabe für einen Leistungskurs diverse Inhalte der Analysis-Ausbildung, nämlich die Bestimmung von Funktionsgraphen mit geforderten Eigenschaften kombiniert mit Integralrechnung sowie der Verwendung von Approximationsmethoden zur Bestimmung von Nullstellen u. ä. Im Vergleich zur Aufgabe für das vierte Semester ist diese vielfältiger in den Fragestellungen und auch umfangreicher. Dabei ist die Aufgabe so konzipiert, dass die erforderlichen Rechnungen von einem Computer-Algebra-System übernommen werden (hier beispielhaft DERIVE). Dies ermöglicht die Behandlung des gewählten Themas unter Berücksichtigung unterschiedlichster Aspekte, ohne wegen des rechnerischen Zeitaufwandes Abstriche machen zu müssen. Die Leistung der Studierenden besteht dabei zum großen Teil in der Wahl der richtigen mathematischen sowie programmtechnischen Mittel sowie der Darstellung der zugrundeliegenden Gedankengänge.

### Aufgabenstellung

Eine Brauerei hat bei einem Designer den Entwurf eines Bierglases in Auftrag gegeben. Gewünscht wird ein becherförmiges Glas von 12 cm Höhe mit einem oberen Innendurchmesser von 6 cm. Ergonomische Untersuchungen haben ergeben, dass sich ein solches Glas am bequemsten fassen lässt, wenn in 4 cm Höhe die „Taille“ des Glases mit einem Innendurchmesser von 5 cm liegt.

- a) Der Designer entscheidet sich für einen parabelförmigen Verlauf des Längsschnittes (siehe Skizze). Markieren Sie in nachstehender Skizze die Vorgaben der Brauerei und bestimmen Sie einen quadratischen Funktionsterm, der diese Vorgaben realisiert.



- b) Welchen Bruttoinhalt hat das entstehende Glas (wenn 12 cm die innere Höhe ist)?
- c) Das Glas soll nun als 0,2-l-Glas geeicht werden. Bestimmen Sie durch ein geeignetes Approximationsverfahren den Abstand des Eichstriches von der oberen Kante. Erläutern Sie die Grundideen des benutzten Näherungsverfahrens und dokumentieren Sie alle Approximationsschritte genau.

- d) Der Designer hat wegen der kleinen Grundfläche Sorge um die Standfestigkeit des Glases und möchte ein Glas entwerfen, bei dem auch der Boden einen Innendurchmesser von 6 cm hat. Begründen Sie, warum diese zusätzliche Forderung mit einer quadratischen Funktion nicht erfüllbar ist, und bestimmen Sie eine andere Funktion, die alle bislang geforderten Eigenschaften realisiert. Erstellen Sie eine Skizze des Längsschnittes durch diese Glasform (DERIVE-Ausdruck).
- e) Bei der Herstellung des Glases werden mit den zuvor bestimmten Innenmaßen der Boden 4 mm dick, während die Wände überall 2 mm dick sind (senkrecht zur Glasachse gemessen). Wie schwer wird das Bierglas, wenn die verwendete Glassorte eine Dichte von  $2,1 \text{ g/cm}^3$  hat?

Hilfsmittel: PC mit installiertem Computer-Algebra-System DERIVE und angeschlossenem Drucker.

### Unterrichtliche Voraussetzungen

Die Aufgabe setzt in der hier dargestellten Form die Benutzung eines Computeralgebra-Systems voraus. Die Studierenden müssen also Erfahrung in der Nutzung von DERIVE haben; es genügt jedoch die Kenntnis der grundlegenden Funktionalitäten aus der Analysis (Integration, Differentiation) und der Algebra (Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme).

Erforderliche mathematische Vorkenntnisse sind das Newton-Verfahren, Volumen von Rotationskörpern sowie die Lösung linearer Gleichungssysteme (Zusammenhang zwischen Gleichungszahl, Variablenzahl und Lösbarkeit).

### Leistungserwartung

- a) Man kann entweder von der Scheitelpunktsform quadratischer Funktionsterme ausgehen ( $f(x) = a(x - 4)^2 + \frac{5}{2}$ ) und dann aus der Forderung  $f(12) = 3$  den Parameter  $a$  bestimmen:  $a = \frac{1}{128}$  (auch ohne DERIVE). Und damit  $f(x) = \frac{1}{128}(x - 4)^2 + \frac{5}{2}$ . Etwas umständlicher ist der Weg über den allgemeinen Ansatz  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mit den Vorgaben  $f(12) = 3$ ,  $f(4) = \frac{5}{2}$  und  $f'(4) = 0$ . Dies ergibt ein lineares  $3 \times 3$ -Gleichungssystem mit der Lösung  $a = \frac{1}{128}$ ,  $b = -\frac{1}{16}$  und  $c = \frac{21}{8}$ . Damit

$$f(x) = \frac{1}{128}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{21}{8} = \frac{1}{128}(x^2 - 8x + 336).$$

- b) Es gilt das Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_0^{12} f^2(x) dx$$

zu berechnen. Nebenstehend die Dokumentation der Rechnung in DERIVE. Wir erhalten als Ergebnis

$$V = \frac{6633}{80} \cdot \pi \approx 260,477$$

Damit fasst das Glas etwa  $260 \text{ cm}^3$ .

- c) Man muss die Gleichung  $\pi \int_0^b f^2(x) dx = 200$  mit der Unbekannten  $b$  lösen. Dies ergibt eine Gleichung 5. Grades, für die DERIVE (im Approximations-Modus, Bereich 0 bis 12) als Näherungslösung  $b = 9,661226733$  ermittelt:

```
1/128*(x^2-8*x+336)
```

```
 ;#1^User
 (1/128*(x^2-8*x+336))^2
```

```
 ;Int(#2,x)
 INT((1/128*(x^2-8*x+336))^2,x,0,12)
```

```
 ;Simp(#3)
 6633/80
```

```
6633/80*pi
```

```
 ;Approx(#5)
 260.4773008
```

```

1/128*(x^2-8*x+336)

;#1^User
(1/128*(x^2-8*x+336))^2

;Int(#2,x)
INT((1/128*(x^2-8*x+336))^2,x,0,b)

;Expd(#3)
b^5/81920-b^4/4096+23*b^3/1536-21*b^2/128+441*b/64

b^5/81920-b^4/4096+23*b^3/1536-21*b^2/128+441*b/64-200/pi

Precision:=Approximate

;Solve(#5)
b=9.661226733

```

Wie man dieses Ergebnis mit Hilfe des Newton-Verfahrens erreichen kann, dokumentiert die folgende Rechnung in DERIVE. Da das gewünschte Volumen ( $200 \text{ cm}^3$ ) nur etwas mehr als drei Viertel des berechneten Gesamtvolumens von  $260 \text{ cm}^3$  beträgt, ist die Lage des Eichstrichs in grober erster Näherung bei etwas mehr als  $9 \text{ cm}$  zu suchen. Daher startet man mit dem ersten Näherungswert  $b = 9$ .

Die Grundidee des Newton-Verfahrens zur Berechnung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen besteht darin, die zu untersuchende Funktion durch ihre Tangente an der Näherungsstelle zu ersetzen. (In DERIVE ist die Tangente als Taylorpolynom 1. Grades einfach berechenbar.) Nun ermittelt man die Nullstelle der Tangentenfunktion und benutzt diese als neuen Näherungswert. Nachfolgend der Ausdruck der Rechnungen in DERIVE:

```

#8: Precision := Mixed                                     User
                                                                 Taylor(#5,b)
#9: TAYLOR  $\left[ \frac{b^5}{81920} - \frac{b^4}{4096} + \frac{23 \cdot b^3}{1536} - \frac{21 \cdot b^2}{128} + \frac{441 \cdot b}{64} - \frac{200}{\text{pi}}, b, 9, 1 \right]$ 
#10: 7.264709472·b - 70.28277801                             Expd(#9)
#11: b = 9.674547658                                       Solve(#10)
                                                                 Taylor(#5,b)
#12: TAYLOR  $\left[ \frac{b^5}{81920} - \frac{b^4}{4096} + \frac{23 \cdot b^3}{1536} - \frac{21 \cdot b^2}{128} + \frac{441 \cdot b}{64} - \frac{200}{\text{pi}}, b, 9.674547658, 1 \right]$ 
#13: 7.571117306·b - 73.14632417                             Expd(#12)
#14: b = 9.661232446                                       Solve(#13)

```

Bereits beim nächsten Approximationsschritt erhält man die Genauigkeit des von DERIVE gelieferten Näherungswertes (10 Stellen). Der Abstand des Eichstrichs zur Oberkante des Glases beträgt also näherungsweise  $2,34 \text{ cm}$ .

d) Da es nur eine quadratische Funktion gibt mit den ursprünglichen Forderungen,

dabei aber der Bodendurchmesser  $2 \cdot f(0) = 5,25$  Zentimeter beträgt, kann die zusätzliche Forderung allenfalls durch eine Randfunktion höheren Grades erfüllt werden. Man setzt also eine kubische Funktion  $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  mit den Forderungen  $d = g(0) = 3$ ,  $g(12) = 3$ ,  $g(4) = \frac{5}{2}$  und  $g'(4) = 0$  an. Dies stellt dann ein lineares  $3 \times 3$ -Gleichungssystem für  $a, b, c$  dar. Hier die Rechnung in DERIVE:

```
a*x^3+b*x^2+c*x+3
;Dif(#1,x)
DIF(a*x^3+b*x^2+c*x+3,x)

;Simp(#2)
3*a*x^2+2*b*x+c

;Sub(#1)
a*4^3+b*4^2+c*4+3

a*4^3+b*4^2+c*4+3=5/2

;Sub(#1)
a*12^3+b*12^2+c*12+3

a*12^3+b*12^2+c*12+3=3

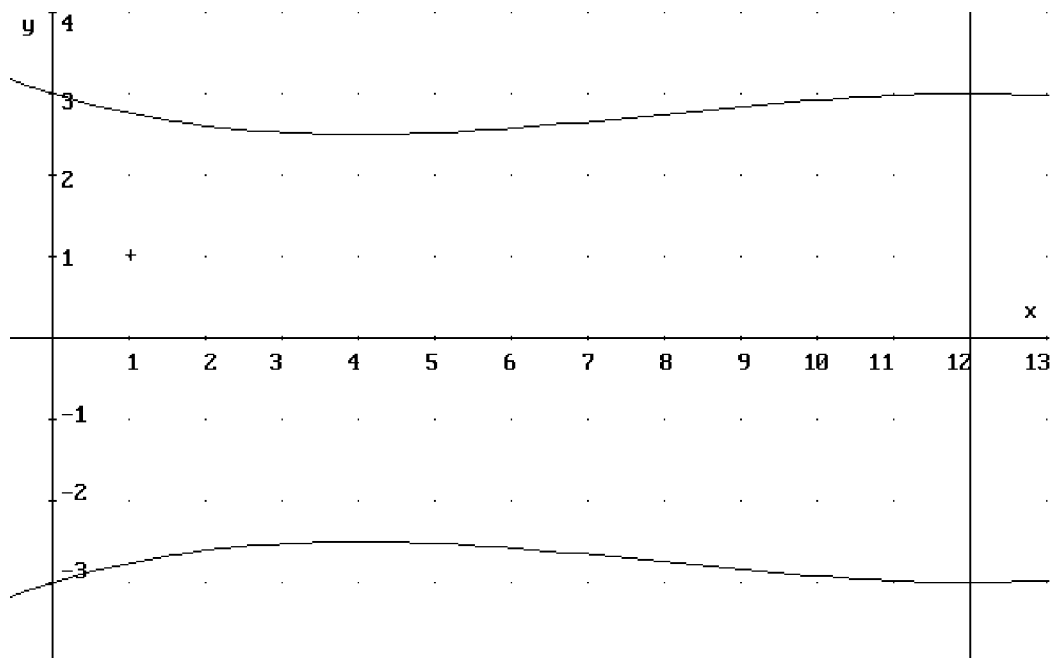
;Sub(#3)
3*a*4^2+2*b*4+c

3*a*4^2+2*b*4+c=0

[a*4^3+b*4^2+c*4+3=5/2,a*12^3+b*12^2+c*12+3=3,3*a*4^2+2*b*4+c=0]

;Solve(#10)
[a=-1/512,b=3/64,c=-9/32]
```

Ergebnis:  $f(x) = -\frac{1}{512}x^3 + \frac{3}{64}x^2 - \frac{9}{32}x + 3$ . Lässt man von DERIVE die Graphen von  $f$  und  $-f$  zeichnen, so erhält man den folgenden Glaslängsschnitt:



- e) Anmerkung: Bei der Aufgabenstellung wurde vereinfachend eine Glasstärke von 2 mm *in y-Richtung gemessen* vorgegeben. Bei der realitätsgerechteren Messung *senkrecht zur Glaswand* wäre die Bestimmung der äußeren Begrenzung des Glasquerschnitts kaum möglich.

Das Volumen des Glasbodens beträgt (in  $\text{cm}^3$ )  $V_B = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (3 + 0,2)^2 \cdot 0,4 = 4,096 \pi$ . Zur Berechnung des Wandvolumens muss man zwei Rotationsvolumina voneinander subtrahieren. (Mit Hilfe binomischer Formeln vermeidet man Quadrierungen kubischer Terme.)

$$\begin{aligned} V_W &= \pi \int_0^{12} ((g(x) + 0,2)^2 - g^2(x)) dx \\ &= \pi \int_0^{12} (2 \cdot 0,2 \cdot g(x) + 0,2^2) dx \end{aligned}$$

Nebenstehende Rechnung in DERIVE ergibt  $V_W = 13,53 \pi$  und damit als Glasmasse insgesamt  $m = 17,626 \pi \cdot 2,1 \text{ g} \approx 116,3 \text{ g}$ .

```
G(x) := -x^3/512+3*x^2/64-9*x/32+3
2*(0.2)*G(x)+(0.2)^2
;Int(#2,x)
INT(2*(0.2)*G(x)+(0.2)^2,x,0,12)
;Simp(#3)
13.53
13.53*pi
;Approx(#5)
42.50574860
```

### Bewertung

Die Note 'gut' erreichen Studierende, die mindestens 4 der 5 Aufgabenteile lösen und dabei ihr Vorgehen klar und präzise kommentieren. Die Note 'ausreichend' kann vergeben werden, wenn die Bestimmung von Funktionstermen und Berechnung von Rotationsvolumina (Teile a), b)) beherrscht werden und in den Teilen c) und e) durch numerisch korrekte Ergebnisse wenigstens das methodische Handwerkszeug nachgewiesen wird.

### Modifikationsmöglichkeiten

Die Vorgabe der Skizze in Teil a) dient dem leichteren Einstieg in die Thematik, kann aber auch entfallen. Umgekehrt kann bei einer schwächeren Lerngruppe Teil e) durch eine Untersuchung des in d) ermittelten Graphen ersetzt werden.

Unter Verzicht auf e) kann man in Teil d) den Einfluss gewisser Parameter auf Gestalt des Glases diskutieren (Maß der „Taille“, unterer bzw. oberer Durchmesser, Glashöhe) und so Funktionsscharen thematisieren.

Bei hinreichend guter Vertrautheit mit dem Programm kann man von den Studierenden in c) auch die graphische Darstellung der Grundidee und Näherungsschritte zur Newton-Approximation einfordern.