Wie ermittelt man ...?

1. Koordinatengleichung einer Ebene

a. zwei lin. unabh. RV-en $\vec{u}, \vec{v}$ der Ebene bestimmen
b. Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ berechnen (evtl. verkürzen)
c. Koordinatengleichung $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ mit noch unbekanntem d aufstellen
d. Punkt $A \in e$ in Koordinatengleichung einsetzen und d berechnen.

2. Schnittpunkt Gerade–Gerade

a. Beide Parameterdarstellungen aufstellen
b. Parameterdarstellungen gleichsetzen
c. Entstehendes LGS (mit den beiden Parametern als Unbekannten) lösen
d. Falls unlösbar: Kein Schnittpunkt
Falls lösbar: Einen Parameter in eine PD einsetzen
Falls unendlich viele Lösungen: Geraden sind identisch

3. Schnittpunkt Gerade–Ebene

A. Parameterdarstellungen gleichsetzen
  a. Beide Parameterdarstellungen aufstellen
  b. Parameterdarstellungen gleichsetzen
  c. Entstehendes LGS (mit den drei Parametern als Unbekannten) lösen
  d. Falls lösbar: Den Geradenparameter in die PD der Geraden einsetzen

B. mit Koordinatengleichung der Ebene
  a. Koordinatengleichung der Ebene ermitteln (siehe dort)
  b. Parameterdarstellung der Gerade aufstellen
  c. PD der Geraden in die Koord.Glg. der Ebene einsetzen
  d. lineare Gleichung mit dem Geradenparameter als Unbekannte lösen
  e. falls unlösbar: Kein Schnittpunkt, Gerade und Ebene parallel
  falls eindeutig lösbar: Parameter in PD der Geraden einsetzen
  falls unendlich viele Lösungen: Gerade liegt in der Ebene

4. Schnitt Ebene–Ebene

A. Methode 1: eine PD, eine Koord.Glg.
  a. Für eine Ebene PD, für die andere Koord.Glg. aufstellen
  b. PD der einen Ebene in Koord.Glg. der anderen einsetzen
  c. Lineare Gleichung mit 2 Unbekannten (den Ebenen-Parametern) lösen
  d. Widerspruch: Kein Schnittpunkt, Ebenen parallel und verschieden
  e. Allgemeingültig: Ebenen identisch
  e. Wenn kein Widerspruch: Glg. nach einem der beiden Parameter auflösen
  f. die ermittelten Term in zugehörige PD einsetzen
  g. dies ergibt eine PD mit nur noch einem Parameter, also PD der Schnittgeraden.

B. Methode 2: zwei Koord.Glg-en
  a. Für beide Ebenen Koord.Glg-en aufstellen
  b. Beide Gleichungen zu einem LGS zusammenfassen
  c. LGS lösen
  d. unlösbar: kein Schnittpunkt, Ebenen parallel und verschieden
  e. eine Nullzeile, 2 freie Parameter in der Lösungsmenge, Schnittmenge ist eine Ebene, beide Ebenen identisch
  f. keine Nullzeile, 1 freier Parameter: PD für die Schnittgerade erstellen

f. Zusatz: Richtung der Schnittgeraden ist orthogonal zu den NV-en beider Ebenen, also ist das Vektorprodukt der NV-en ein RV der Schnittgeraden

5. Fußpunkt des Lotes Punkt–Gerade

a. Parameterdarstellung $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u}$ der Geraden g aufstellen
b. Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA} + r\vec{u}$ vom Punkt P zu beliebigem Geradenpunkt X in Abhängigkeit von r ausdrücken
c. Orthogonalität $\overrightarrow{PX} \perp g$ als Gleichung $\overrightarrow{PX} \bullet u = 0$ aufstellen
d. Diese Gleichung (mit der Unbekannten r) lösen
e. Gefundene Lösung r in PD der Geraden einsetzen

6. Fußpunkt des Lotes Punkt–Ebene

a. Parameterdarstellung $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}$ der Ebene e aufstellen
b. Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA} + r\vec{u} + s\vec{v}$ vom Punkt P zu beliebigem Geradenpunkt X in Abhängigkeit von r, s ausdrücken
c. Orthogonalität $\overrightarrow{PX} \perp e$ als Gleichungen $\overrightarrow{PX} \bullet u = 0$, $\overrightarrow{PX} \bullet \vec{v} = 0$ formulieren
d. Dieses LGS (mit den Unbekannten r, s) lösen
e. Gefundene Lösung r, s in PD der Ebene einsetzen

7. Fußpunkte des gemeinsamen Lotes windschiefer Geraden

a. Parameterdarstellungen $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u}$, $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA'} + s\vec{v}$ beider Geraden aufstellen
b. Verbindungsvektor $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AA'} - r\vec{u} + s\vec{v}$ in Abhängigkeit von r, s ausdrücken
c. Orthogonalität $\overrightarrow{XY} \perp g, h$ als Gleichungen $\overrightarrow{XY} \bullet u = 0$, $\overrightarrow{XY} \bullet \vec{v} = 0$ formulieren
d. Dieses LGS (mit den Unbekannten r, s) lösen
e. Falls lösbar: Gefundene Lösung r und s in die zugehörigen PDen einsetezn

8. Abstand Punkt–Gerade

A. Mit Fußpunktberechnung
 a. Lotfußpunkt F ermitteln (siehe dort)
 b. Abstand $d(P, F) = |\overrightarrow{PF}|$ berechnen
B. Abstand als Höhe in einem Dreieck
 a. Zwei Punkte $A \neq B$ auf der Geraden wählen
 b. Fläche des Dreiecks ABP mit Vektorprodukt berechnen
 c. Doppelte Dreiecksfläche durch Grundseitenlänge $|\overrightarrow{AB}|$ dividieren

9. Abstand Punkt–Ebene

mit der Hesseschen Abstandsformel

a. Normalenvektor bestimmen
b. Koordinatengleichung der Ebene bestimmen (mit rechter Seite 0)
c. Punkt in Koordinatengleichung einsetzen
d. Betrag des Ergebnisses durch Länge des Normalenvektors teilen

10. Dreiecksfläche

A. gemäß Definition:
 a. Länge der Grundseite bestimmen
 b. Höhe des Dreiecks (= Abstand des gegenüberliegenden Eckpunktes von der Grundseite) ermitteln
 c. Dreiecksfläche ist halbes Produkt aus Grundseite und Höhe
B. Mit dem Vektorprodukt
 a. Dreiecksfläche ist die halbe Fläche eines Parallelogramms
 b. Fläche eines Parallelogramms ist Betrag des Vektorproduktes der benachbarten Kantenvektoren

11. Tetraedervolumen

A. gemäß Definition
   a. Grundfläche des Tetraeders bestimmen
   b. Höhe des Tetraeders (= Abstand des der Grundfläche gegenüberliegenden Eckpunktes von der Grundfläche) bestimmen
   c. Volumen ist ein Drittel mal Grundfläche mal Höhe

B. Mit dem Spatprodukt
   a. Tetraedervolumen ist ein Sechstel des Spatvolumens
   b. Volumen des Spates ist Betrag des Spatproduktes der benachbarten Kantenvektoren