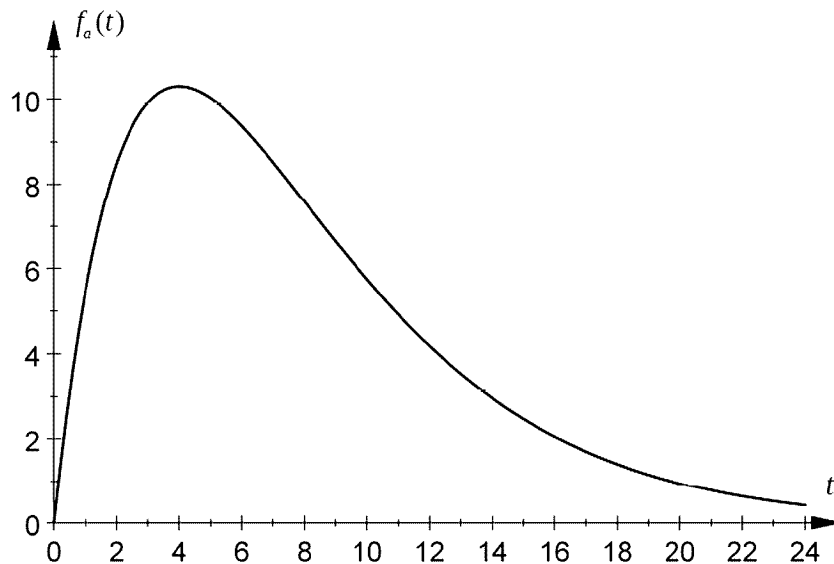


Projekt 1

9. Februar 2010

Aufgabenstellung:

Ein Pharmaunternehmen produziert ein Medikament in unterschiedlichen Wirkstoffdosierungen, das in Tablettenform verabreicht wird. Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut eines Patienten kann in den ersten 24 Stunden nach Einnahme einer Tablette näherungsweise durch die Funktionenschar $f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0.25 \cdot t}$, $t \in [0; 24]$, $a > 0$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden seit der Einnahme und die Wirkstoffkonzentration $f_a(t)$ im Blut in Milligramm pro Liter (mg/l) gemessen; die Höhe der Wirkstoffdosierung wird durch den Parameter a berücksichtigt.



- a) Die obenstehende Abbildung zeigt einen zeitlichen Verlauf, bei dem die Wirkstoffkonzentration im Blut des Patienten vier Stunden nach der Einnahme den Wert von 10,3 mg/l erreicht.

Berechnen Sie den Parameter a der Funktion f_a , die diesen zeitlichen Verlauf modelliert, und die Höhe der Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 24$. (5 Punkte)

- b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a und zeigen Sie, dass die Funktion f_a unabhängig vom Parameter a an der Stelle $t = 4$ ein absolutes Maximum besitzt. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Um eine schädliche Wirkung des Medikaments zu vermeiden, darf eine Wirkstoffkonzentration von 18 mg/l nicht überschritten werden.

Ermitteln Sie die Dosishöhe a , ab der eine schädliche Wirkung des Medikaments eintritt.
(13 Punkte)

- c) Weisen Sie nach, dass die Wirkstoffkonzentration für jede Dosishöhe a zum Zeitpunkt $t = 8$ am stärksten abnimmt.
(10 Punkte)

Im Folgenden soll die Funktion f_{10} mit $f_{10}(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,25t}$, $t \in [0; 24]$, betrachtet werden.

- d) Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F_{10} mit $F_{10}(t) = 40 \cdot (-t - 4) \cdot e^{-0,25t}$ eine Stammfunktion von f_{10} ist.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die mittlere Wirkstoffkonzentration $m(k)$ in den ersten k Stunden nach der Einnahme des Medikaments und berechnen Sie $m(12)$.

(12 Punkte)

- e) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f_{10} für $t \rightarrow \infty$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den langfristigen Abbau des Wirkstoffs.

Für $t > 24$ soll der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration durch eine lineare Funktion g beschrieben werden.

Bestimmen Sie eine Gleichung der linearen Funktion g so, dass die zusammengesetzte

Funktion h mit $h(t) = \begin{cases} f_{10}(t) & \text{für } 0 \leq t \leq 24 \\ g(t) & \text{für } t > 24 \end{cases}$ an der Stelle $t = 24$ differenzierbar ist.

Berechnen Sie für diese Modellierung den Zeitpunkt, zu dem das Medikament im Blut vollständig abgebaut ist.
(10 Punkte)

Lösung:

a) Wir lösen die Gleichung

$$10,3 = f_a(4) = 4a \cdot e^{-1} \iff a = \frac{10,3e}{4} \approx 7$$

und berechnen damit

$$f_a(24) = \frac{10,3e}{4} \cdot 24 \cdot e^{-6} = 61,8e^{-5} \approx 0,42.$$

Bei einer Wirkstoffdosierung von $a \approx 7$ beträgt nach 24 Stunden die Wirkstoffkonzentration $0,42 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

b) Wir berechnen die erste Ableitung:

$$f'_a(t) = ae^{-0,25t} + at \cdot e^{-0,25t} \cdot (-0,25) = \frac{a}{4} \cdot (4 - t)e^{-\frac{t}{4}}.$$

Da a und der Exponentialfaktor stets positiv ist, wird das Vorzeichen von f'_a allein von dem linearen Faktor $4 - t$ bestimmt, also

$$f'_a(t) > 0 \iff 4 > t, \quad f'_a(t) < 0 \iff 4 < t.$$

Damit ist die Funktion f_a (deren Definitionsbereich auf $[0, 24]$ eingeschränkt wurde) im Intervall $[0, 4]$ streng monoton steigend, im Intervall $[4, 24]$ streng monoton fallend und hat folglich bei 4 ein (das absolute) Maximum. Der Maximalwert beträgt $f_a(4) = \frac{4a}{e}$. Um den Maximalwert von $18 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ nicht zu übersteigen, muss gelten

$$\frac{4a}{e} \leq 18 \iff a \leq \frac{18e}{4} \approx 12,23.$$

Die Wirkstoffdosierung darf den Wert $a \approx 12,23$ nicht übersteigen.

c) Die stärkste Abnahme der Wirkstoffkonzentration ist an der Stelle des (negativen) Minimums der ersten Ableitung, also an einer Wendestelle von f_a :

$$f''_a(t) = \frac{a}{4}(-e^{-\frac{t}{4}} + (4 - t)e^{-\frac{t}{4}} \cdot (-\frac{1}{4})) = \frac{a}{16}(t - 8)e^{-\frac{t}{4}} = 0 \iff t = 8.$$

Damit hat f'_a bei $t = 8$ einen VZW von $-$ zu $+$, also f'_a dort ein Minimum. Da dort der Anstieg $f'_a(8) < 0$ ist (die Wendestelle liegt *hinter* dem absoluten Maximum), liegt dort die *stärkste Abnahme* der Wirkstoffkonzentration vor.

d) Wir bestimmen eine Stammfunktion durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{10}(t) dt &= \int_a^b \underbrace{10t}_v \cdot \underbrace{e^{-\frac{t}{4}}}_{u'} dt = \left[10t \cdot e^{-\frac{t}{4}} \cdot (-4) \right]_a^b - \int_a^b 10 \cdot (-4)e^{-\frac{t}{4}} dt \\ &= \left[-40te^{-\frac{t}{4}} + 40 \cdot e^{-\frac{t}{4}} \cdot (-4) \right]_a^b = \left[40(-t - 4)e^{-\frac{t}{4}} \right]_a^b \end{aligned}$$

Damit ist die angegebene Funktion als Stammfunktion gefunden.

Der Mittelwert der Funktion f_{10} ist der durchschnittliche Anstieg der Stammfunktion F_{10} im angegebenen Bereich:

$$m(k) = \frac{1}{k} \int_0^k f_{10}(t) dt = \frac{F_{10}(k) - F_{10}(0)}{k} = \frac{-40(k + 4)e^{-\frac{k}{4}} + 160}{k}.$$

Für $k = 12$ ergibt sich

$$m(12) = \frac{160 - 640e^{-3}}{12} \approx 10,68$$

und damit eine mittlere Wirkstoffkonzentration während der ersten 12 Stunden in Höhe von $10,68 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

e) Nach der Regel von de l'Hospital dominiert der Exponentialfaktor in f_{10} den linearen Vorfaktor, so dass insgesamt folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 10te^{-\frac{t}{4}} = 0.$$

Dies bedeutet, dass langfristig die Wirkstoffkonzentration unter jeden positiven Wert sinkt, aber im Modell nie ganz auf Null absinkt.

Damit die zusammengesetzte Funktion bei $t = 24$ differenzierbar ist, muss gelten

$$f_{10}(24) = g(24) \quad (\text{Stetigkeit}) \quad \text{und} \quad f'_{10}(24) = g'(24) \quad (\text{Differenzierbarkeit}).$$

Da g linear sein soll, bedeutet dies, dass g die Tangentenfunktion von f_{10} an der Stelle 24 sein muss. Also

$$g(t) = f_{10}(24) + f'_{10}(24) \cdot (t - 24) = 240e^{-6} - 50e^{-6}(t - 24) = 1440e^{-6} - 50e^{-6}t.$$

Die Nullstelle dieser linearen Funktion ist

$$g(t) = 0 \iff 144 = 5t \iff t = 28,8.$$

Damit ist in dieser Modellierung der Wirkstoff nach 28,8 Tagen vollständig abgebaut.

Projekt 2

9. Februar 2010

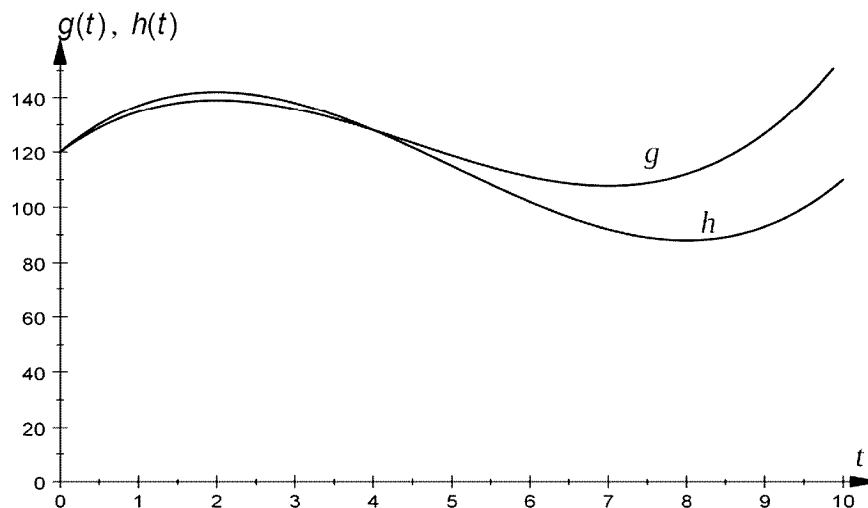
Aufgabenstellung:

Zwei Radsportler setzen zur Belastungskontrolle während des Trainings Pulsmessgeräte ein, die die momentane Herzfrequenz der Sportler anzeigen und aufzeichnen. Die aus den ermittelten Werten erstellten Herzfrequenzkurven eines 10-minütigen Trainingsabschnitts können annähernd durch die Graphen der Funktionen g mit

$$g(t) = 0,5 \cdot t^3 - 6,75 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 120, \quad 0 \leq t \leq 10, \text{ und } h \text{ mit}$$

$$h(t) = 0,5 \cdot t^3 - 7,5 \cdot t^2 + 24 \cdot t + 120, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

dargestellt werden (siehe Abbildung). Dabei wird die Zeit t in Minuten (min) seit Beginn des Trainingsabschnitts ($t = 0$) und die Herzfrequenz in Schlägen pro Minute (S/min) angegeben.



- a) Der Trainer hatte den Sportlern vorgegeben, ihre Herzfrequenz während des Trainingsabschnitts zwischen 100 S/min und 160 S/min zu halten.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Vorgaben des Trainers eingehalten wurden.

(11 Punkte)

b) Untersuchen Sie, ob die Zeitpunkte, zu denen die Herzfrequenzen der beiden Sportler während des Trainingsabschnitts jeweils am stärksten abgenommen haben, übereinstimmen. (9 Punkte)

c) Ermitteln Sie die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers in den ersten k Minuten des Trainingsabschnitts und berechnen Sie diesen Wert für $k = 10$. (8 Punkte)

Die Funktionen g und h gehören zur Funktionenschar f_a mit

$$f_a(t) = 0,5 \cdot t^3 - 1,5 \cdot (a+1) \cdot t^2 + 6 \cdot a \cdot t + 120, t \in \mathbb{R}, a > 0,$$

die im Folgenden betrachtet wird. Es gilt $g(t) = f_{3,5}(t)$ und $h(t) = f_4(t)$.

d) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit vom Parameter a auf Extrempunkte.

Begründen Sie, dass alle Funktionen f_a mit $a \geq 5\frac{2}{9}$ eine Nullstelle im Intervall $[2;10]$ besitzen und somit für eine Beschreibung von Herzfrequenzwerten nicht geeignet sind. (12 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass sich die Graphen aller Funktionen f_a der Funktionenschar in genau zwei Punkten $S_1(0|120)$ und $S_2(4|128)$ schneiden.

Ermitteln Sie den Inhalt $A(a_1; a_2)$ der Fläche, die die Graphen zweier Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} , $a_1 < a_2$, der Funktionenschar einschließen.

Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die die Funktionen $f_{3,5}$ und f_4 einschließen und interpretieren Sie das Ergebnis im obenstehenden Sachzusammenhang. (10 Punkte)

Lösung:

a) Wir bestimmen zunächst die lokalen Extrema beider Funktionen:

$$\begin{aligned} g'(t) = 1,5t^2 - 13,5t + 21 = 0 &\iff 0 = t^2 - 9t + 14 = (t-2)(t-7) \quad (\text{Vieta}) \\ &\iff t = 2 \vee t = 7, \\ h'(t) = 1,5t^2 - 15t + 24 = 0 &\iff 0 = t^2 - 10t + 16 = (t-2)(t-8) \\ &\iff t = 2 \vee t = 8. \end{aligned}$$

Da die Ableitungen quadratische Funktionen mit zwei *verschiedenen* Nullstellen sind, sind diese einfach, also mit VZW. Also haben g und h an den entsprechenden Stellen Extremstellen. Da g und h schließlich steigen (g' und h' haben positiven führenden Koeffizienten), liegt bei 2 jeweils ein Maximum, während bei 7 bzw. 8 ein Minimum liegt. Die Maximalwerte sind

$$g(2) = 4 - 27 + 42 + 120 = 139, \quad h(2) = 4 - 30 + 48 + 120 = 142,$$

während die Minimalwerte

$$g(7) = 107,75, \quad h(8) = 88$$

betragen. Der letzte Wert zeigt, dass für den Sportler mit der Kurve h der untere Wert zu niedrig ist.

Für g sind die Extremwerte im zulässigen Bereich, aber man muss außerdem die Randwerte berücksichtigen: $g(0) = 120$ und $g(10) = 500 - 675 + 210 + 120 = 155$. Für den Sportler mit der Herzfrequenzkurve g werden die Vorgaben eingehalten.

b) Die stärkste Abnahme der Herzfrequenz erfolgt an der Stelle des absoluten Minimums der Ableitungen mit negativem Ableitungswert, also an der (einzigen) Wendestelle der (kubischen) Funktionen:

$$g''(t) = 3t - 13,5 = 0 \iff t = 4,5, \quad h''(t) = 3t - 15 = 0 \iff t = 5.$$

Die beiden Stellen sind offenbar verschieden! [Da die Wendestellen hinter dem jeweiligen Hoch- und vor dem Tiefpunkt liegt, muss dort der Anstieg negativ und minimal sein. Da es die einzige Extremstelle der Ableitung ist, liegt dort ein absolutes Minimum.]

c) Die mittlere Herzfrequenz im Bereich 0 bis k ist

$$\frac{1}{k} \int_0^k g(t) dt = \frac{1}{k} \left[0,125t^4 - 2,25t^3 + \frac{21}{2}t^2 + 120t \right]_0^k = 0,125k^3 - 2,25k^2 + 10,5k + 120$$

und für $k = 10$ erhält man als mittlere Herzfrequenz im 10-minütigen Trainingsabschnitt 125 Schläge pro Minute.

d) Wir berechnen die Ableitung von f_a und bestimmen ihre Nullstellen:

$$f'_a(t) = 1,5t^2 - 3(a+1)t + 6a = 0 \iff 0 = t^2 - 2(a+1)t + 4a = (t-2)(t-2a) \quad (\text{Vieta}).$$

Damit hat f'_a die Nullstellen 2 und $2a$ (verschieden, einfach, mit VZW für $a \neq 1$) bzw. die doppelte Nullstelle 2 (ohne VZW für $a = 1$). Mit $f_a(2) = 4 - 6a - 6 + 12a + 120 = 118 + 6a$ und $f_a(2a) = 4a^3 - 6a^3 - 6a^2 + 12a^2 + 120 = -2a^3 + 6a^2 + 120$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a \neq 1 &\implies f_a \text{ hat die Extrempunkte } (2, 118 + 6a), (2a, -2a^3 + 6a^2 + 120) \\ a = 1 &\implies f_a \text{ hat den Sattelpunkt } (2, 124) \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse bestätigen für $a = 3,5$ bzw. $a = 4$ die Resultate in a) für g bzw. h . Wir bestimmen noch die Art der Extremstellen. Da f_a positiven führenden Koeffizienten hat, ist die größte Extremstelle eine Minimal-, die andere Extremstelle eine Maximalstelle. Dies ergibt folgende Fälle:

$$\begin{aligned} a > 1 &\implies (2, 118 + 6a) \text{ Hochpunkt, } (2a, -2a^3 + 6a^2 + 120) \text{ Tiefpunkt von } f_a, \\ a < 1 &\implies (2a, -2a^3 + 6a^2 + 120) \text{ Hochpunkt, } (2, 118 + 6a) \text{ Tiefpunkt von } f_a. \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Vorzeichen von $f_a(t)$ an den Rändern:

$$f_a(2) = 6a + 118 > 0, \quad f_a(10) = 500 - 150a - 150 + 60a + 120 = 470 - 90a.$$

Als stetige Funktion muss f_a jedenfalls dann eine Nullstelle im Bereich $[2, 10]$ haben, wenn $f_a(10) \leq 0$ ist, und dies bedeutet

$$f_a(10) \leq 0 \iff 470 - 90a \leq 0 \iff \frac{47}{9} \leq a.$$

Dies ist die im Text angegebene Schranke $a \geq 5\frac{2}{9}$.

e) Wir berechnen die Schnittstellen zweier verschiedener Funktionen ($a \neq b$):

$$\begin{aligned} f_a(t) = f_b(t) &\iff -1,5(a+1)t^2 + 6at = -1,5(b+1)t^2 + 6bt \\ &\iff 1,5(b-a)t^2 + 6(a-b)t = 0 \quad \Big| : 1,5(b-a) \neq 0 \\ &\iff 0 = t^2 - 4t = t(t-4) \iff t = 0 \vee t = 4 \end{aligned}$$

Mit $f_a(0) = 120$ und $f_a(4) = 128$ ergeben sich die beiden angegebenen Schnittpunkte. Da es nur zwei Schnittstellen gibt, ist nur ein Flächenstück zu berechnen. Wir berechnen die Fläche durch Integration der Differenzfunktion von Schnittstelle zu Schnittstelle. Es ist $f_a(t) - f_b(t) = 1,5(b-a)t^2 + 6(a-b)t$ und eine Stammfunktion damit $F(t) = 0,5(b-a)t^3 + 3(a-b)t^2 = (b-a)t^2(0,5t-3)$. Also:

$$\int_0^4 (f_a(t) - f_b(t)) dt = F(4) - F(0) = -16(b-a).$$

Die gesuchte Fläche ist der Betrag dieses Integrals, also (bei $b > a$) $A = 16(b-a)$. Für $b = 4$ und $a = 3,5$ ergibt sich als Fläche $A = 8$.

Die Funktionen f_a geben die Herzfrequenz in Schlägen pro Minute an. Das Integral ist ein Grenzwert von *Produktsummen*, also von Herzfrequenz mal Zeit, und damit die Gesamtzahl der Herzschläge im betrachteten Intervall. Da die berechnete Fläche zwischen den beiden Kurven liegt, gibt der Wert den Unterschied der Herzschläge beider Sportler während der ersten 4 Minute an; er beträgt nur 8 Schläge.

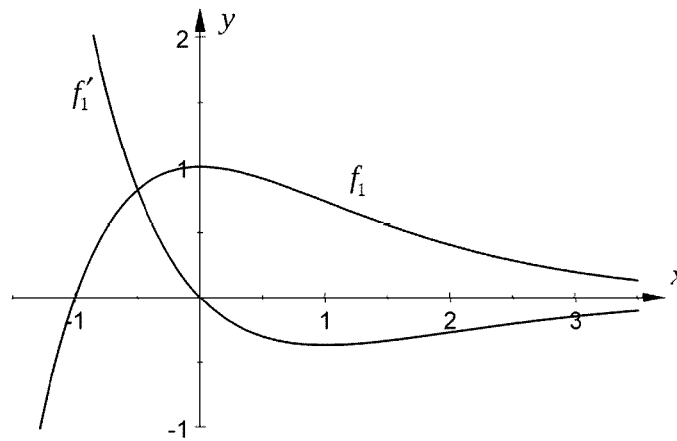
Projekt 3

9. Februar 2010

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = (x+a) \cdot e^{-x}$, $a \geq 0$.

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f_1 sowie den Graphen ihrer Ableitungsfunktion f'_1 .



Abbildung

- a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Extrempunkte.
Ermitteln Sie das Verhalten von f_a für $x \rightarrow +\infty$.

[Zur Kontrolle: $f'_a(x) = (-x+1-a) \cdot e^{-x}$]

(11 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a und f'_a genau einen Schnittpunkt S_a haben, und berechnen Sie seine Koordinaten in Abhängigkeit von a .
Geben Sie die Gleichung der Funktion g an, auf deren Graph alle Schnittpunkte S_a liegen.
Bestimmen Sie den Wert von a , für den sich die Graphen von f_a und f'_a rechtwinklig schneiden.

[Zur Kontrolle: $S_a(0,5-a \mid 0,5 \cdot e^{-(0,5-a)})$] (14 Punkte)

Im Folgenden werden die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ und f'_1 mit $f'_1(x) = -x \cdot e^{-x}$ betrachtet, deren Graphen in der Abbildung auf Seite 1 dargestellt sind.

- c) Die Parallele zur y -Achse mit $x = u$, $u \geq 0$, schneidet den Graphen von f_1 im Punkt $P_u(u \mid f_1(u))$ und den Graphen von f'_1 im Punkt $Q_u(u \mid f'_1(u))$.
Die Punkte P_u und Q_u bilden mit dem Schnittpunkt $S_1(-0,5 \mid 0,5 \cdot e^{0,5})$ der Graphen von f_1 und f'_1 das Dreieck $S_1Q_uP_u$.

Bestimmen Sie $u \geq 0$ so, dass der Flächeninhalt $A(u)$ dieses Dreiecks maximal wird.

[Zur Kontrolle: $A(u) = (u^2 + u + 0,25) \cdot e^{-u}$] (12 Punkte)

- d) Die Graphen von f_1 und f'_1 schließen mit der Parallelen zur y -Achse mit $x = u$, $u > 0$, ein Flächenstück ein.

Ermitteln Sie den Inhalt dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von u .

Prüfen Sie, ob für $u \rightarrow +\infty$ das nach rechts unbegrenzte Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

(13 Punkte)

Lösung:

a) Schnittpunkt mit der y -Achse ist $(0, a)$, denn $f_a(0) = a$. Einziger Schnittpunkt mit der x -Achse ist $(-a, 0)$, denn $-a$ ist die (einzige) Nullstelle des Linearfaktors und der Exponentialfaktor ist stets positiv.

Zur Bestimmung der Extremstellen berechnen wir die Ableitung mit der Produkt- und Kettenregel:

$$f'_a(x) = e^{-x} + (x + a)e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(-x - a + 1).$$

Auch die Ableitung hat nur eine Nullstelle: $x = 1 - a$. Sie wechselt dort ihr Vorzeichen von $+$ zu $-$ (Linearfaktor fällt), also hat f_a bei $1 - a$ seine (einzige) Extremstelle, und zwar eine Maximalstelle. Der Hochpunkt ist $H = (1 - a, e^{a-1})$.

Es gilt nach dem Satz von de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + a)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + a}{e^x} = 0$$

b) Schnittstellen von f_a und f'_a :

$$\begin{aligned} f_a(t) = f'_a(t) &\iff (x + a)e^{-x} = (-x - a + 1)e^{-x} \quad | \cdot e^x \neq 0 \\ &\iff x + a = -x - a + 1 \iff 2x = 1 - 2a \iff x = \frac{1}{2} - a. \end{aligned}$$

Es gibt nur einen Schnittpunkt $S_a = (\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}e^{a-\frac{1}{2}})$ (wie angegeben). Diese erfüllen offenbar alle die Gleichung $y = \frac{1}{2}e^{-x}$.

Rechnerische Bestimmung der Ortskurve der S_a :

$$x = \frac{1}{2} - a \iff a = \frac{1}{2} - x \implies y = \frac{1}{2}e^{a-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Alle Schnittpunkte S_a liegen also auf dem Graphen der Funktion $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.

Zwei Graphen schneiden sich rechtwinklig, wenn ihre Tangenten an der Schnittstelle orthogonal zueinander sind und dies ist der Fall, wenn das Produkt der Anstiege -1 ist:

$$f'_a\left(\frac{1}{2} - a\right) \cdot f''_a\left(\frac{1}{2} - a\right) = -1.$$

Es ist $f'_a(\frac{1}{2} - a) = \frac{1}{2}e^{a-\frac{1}{2}}$ (siehe S_a). Wir berechnen

$$\begin{aligned} f''_a(t) &= -e^{-x} + (-x - a + 1)e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x + a - 2), \\ f''_a\left(\frac{1}{2} - a\right) &= -\frac{3}{2} \cdot e^{a-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} -1 &= f'_a\left(\frac{1}{2} - a\right) \cdot f''_a\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{1}{2}e^{a-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot e^{a-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4}e^{2a-1} \\ &\iff e^{2a-1} = \frac{4}{3} \iff 2a - 1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \iff a = \frac{1 + \ln 4 - \ln 3}{2} \approx 0,64. \end{aligned}$$

c) (Skizze!) Der Schnittpunkt beider Graphen ist $S_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}})$. Das beschriebene Dreieck ist rechtwinklig, hat die 'Grundseite' $f_1(u) - f'_1(u)$ und die 'Höhe' $u + \frac{1}{2}$, also die Fläche

$$A(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\right) \cdot (f_1(u) - f'_1(u)) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\right) \cdot (2u + 1)e^{-u} = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-u}.$$

Wir untersuchen die Funktion $A(u)$ für $u \geq 0$ auf Extrema.

$$\begin{aligned} A'(u) &= 2\left(u + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-u} + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{-u} \cdot (-1) \\ &= e^{-u} \cdot \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(2 - \left(u + \frac{1}{2}\right)\right) = \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - u\right) e^{-u}. \end{aligned}$$

Für Vorzeichen und Nullstellen von $A'(u)$ ist nur der Polynomfaktor entscheidend, seine Nullstellen sind ablesbar: $u = -\frac{1}{2}$ (nicht im zulässigen Bereich) und $u = \frac{3}{2}$. Hier liegt auch tatsächlich ein lokales Maximum vor, da der Polynomfaktor schließlich negativ ist, A also schließlich fällt. Da dies das einzige Extremum im betrachteten Bereich $u \geq 0$ ist, liegt dort das absolute Maximum vor.

Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks wird bei $u = \frac{3}{2}$ erreicht und beträgt dann $A_{max} = A\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,89$.

d) Zur Berechnung des Flächeninhaltes benötigt man eine Stammfunktion für $f_1 - f'_1$ bzw. (da f_1 eine Stammfunktion von f'_1 ist) nur eine Stammfunktion für f_1 . Diese bestimmt man mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x) dx &= \int_a^b \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)} dx = \left[(x+1)(-e^{-x}) \right]_a^b - \int_a^b (-e^{-x}) dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x} - e^{-x} \right]_a^b = \left[-(x+2)e^{-x} \right]_a^b. \end{aligned}$$

Damit ist $F_1(x) = -(x+2)e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_1 .

Da sich beide Graphen nur einmal schneiden, und zwar bei $x = -\frac{1}{2}$, und danach $f_1(x) \geq f'_1(x)$ gilt, ist die gesuchte Fläche das folgenden Integral:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^u (f_1(x) - f'_1(x)) dx = \left[-(x+2)e^{-x} - (x+1)e^{-x} \right]_{-\frac{1}{2}}^u = -(2u+3)e^{-u} + 2e^{\frac{1}{2}}.$$

Für $u \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Summand $-\frac{2u+3}{e^u}$ gegen 0 (Regel von de l'Hospital, Exponentialfaktor dominiert den Polynomterm) und man erhält den endlichen Grenzwert

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} (f_1 - f'_1) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^u (f_1 - f'_1) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-(2u+3)e^{-u} + 2e^{\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{e} \approx 3,3.$$

Projekt 4

9. Februar 2010

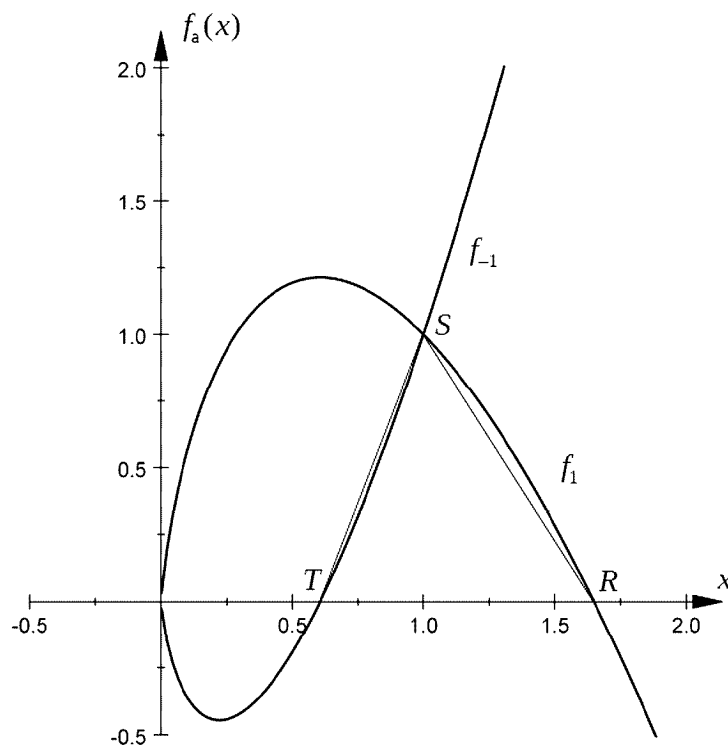
Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = 2x \cdot (0,5 - a \cdot \ln x)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} mit den Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = 2x \cdot (0,5 - \ln x) \quad \text{und} \quad f_{-1}(x) = 2x \cdot (0,5 + \ln x).$$

(Die Aufgabenstellungen der Teilaufgaben a), b) und c) können statt für f_1 und f_{-1} auch allgemein für f_a , $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bearbeitet werden.)



- a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und das Verhalten der Funktionen f_1 und f_{-1} an den Rändern des Definitionsbereichs an.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen f_1 und f_{-1} . (11 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} auf Extrem- und Wendepunkte und geben Sie, falls möglich, deren Koordinaten an. (13 Punkte)

c) Bestimmen Sie durch Integration eine Stammfunktion der Funktionen f_1 und f_{-1} .

[Zur Kontrolle: $F_a(x) = 0,5x^2 \cdot (1 + a - 2a \cdot \ln x)$] (6 Punkte)

d) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} begrenzen mit der x -Achse zwischen den Achsenschnittpunkten T und R (siehe Abbildung auf Seite 1) ein Flächenstück. Der Inhalt dieses Flächenstücks kann annähernd durch den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten T , R und S (S ist Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_{-1}) bestimmt werden.

Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung des Flächeninhalts der Dreiecksfläche vom Inhalt des oben beschriebenen Flächenstücks. (10 Punkte)

e) Der Punkt $P_u(u | f_1(u))$ mit $0 < u \leq e^{0,5}$ auf dem Graphen der Funktion f_1 bestimmt zusammen mit dem Koordinatenursprung $O(0 | 0)$ und dem Punkt $Q_u(-u | f_1(u))$ ein Dreieck $P_u O Q_u$. Dieses Dreieck bildet die Querschnittsfläche eines geraden Kreiskegels mit Kegelspitze O .

Zeigen Sie, dass durch $V(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (u^3 - 2 \cdot u^3 \cdot \ln u)$ das Volumen $V(u)$ des Kreiskegels bestimmt wird. Ermitteln Sie den Wert von u ($0 < u \leq e^{0,5}$), für den das Kegelvolumen maximal wird. (10 Punkte)

Lösung:

a) Wegen des Terms $\ln x$ sind die Funktionen f_a nur für $x > 0$ definiert. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{2x}_{\rightarrow \infty} \cdot (0,5 - a \cdot \underbrace{\ln x}_{\rightarrow \infty}) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } a > 0, \\ +\infty & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Für den linken Definitionsrand benutzen wir $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (de l'Hospital) und erhalten insgesamt (unabhängig von a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 2a \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0.$$

Über dem Definitionsbereiche $]0, \infty[$ wird x nie 0, also

$$f_a(x) = 0 \iff 0,5 - a \ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2a} \iff x = e^{\frac{1}{2a}}.$$

Für $a = \pm 1$ ergeben sich die Näherungswerte:

$$\begin{aligned} \text{Nullstelle von } f_1: \quad e^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{e} \approx 1,65, \\ \text{Nullstelle von } f_{-1}: \quad e^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61, \end{aligned}$$

b) Berechnung der Ableitungen (mit Produktregel):

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= 2(0,5 - a \ln x) + 2x\left(-\frac{a}{x}\right) = 1 - 2a \ln x - 2a, \\ f''_a(x) &= -\frac{2a}{x}. \end{aligned}$$

Damit hat f''_a keine Nullstellen (Zähler konstant $\neq 0$) und f_a folglich keine Wendepunkte. Das Vorzeichen von $f''_a(x)$ ist entgegengesetzt zum Vorzeichen von a .

$$f'_a(x) = 0 \iff 2a \ln x = 1 - 2a \iff \ln x = \frac{1}{2a} - 1 \iff x = e^{\frac{1}{2a} - 1}.$$

Beide Nullstellen von f'_a sind Extremstellen, da f''_a keine Nullstellen hat. Genauer: Wenn $a > 0$ ist, ist $f''_a(x) < 0$ (für alle x), also die Extremstelle $e^{\frac{1}{2a} - 1}$ eine Maximalstelle, während für $a < 0$ eine Minimalstelle vorliegt.

Berechnung der Extremwerte:

$$f_a(e^{\frac{1}{2a} - 1}) = 2e^{\frac{1}{2a} - 1} \left(0,5 - a \cdot \left(\frac{1}{2a} - 1\right)\right) = e^{\frac{1}{2a} - 1} \cdot 2a.$$

Die Extrempunkte von f_1 und f_{-1} sind folglich:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}\right) \approx (0,61; 1,21) \quad \text{für } f_1, \\ T_{-1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{2}{\sqrt{e^3}}\right) \approx (0,22; -0,45) \quad \text{für } f_{-1}. \end{aligned}$$

c) Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_b^c f_a(x) dx &= \int_b^c \underbrace{2x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(0,5 - a \ln x)}_{v(x)} = \left[x^2(0,5 - a \ln x) \right]_b^c - \int_b^c x^2 \cdot \left(-\frac{a}{x} \right) dx \\ &= \left[x^2(0,5 - a \ln x) + a \cdot \frac{x^2}{2} \right]_b^c = \left[0,5x^2(1 - 2a \ln x + a) \right]_b^c.\end{aligned}$$

Also erhält man die angegebene Stammfunktion F_a .

d) Das Dreieck hat die Breite $x_R - x_T$, d. i. der Abstand der Nullstellen von f_1 und f_{-1} . Gemäß a) ist dies $e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{e-1}{\sqrt{e}} \approx 1,04$.

Die Höhe des Dreiecks ist die y -Koordinate des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_{-1} :

$$f_1(x) = f_{-1}(x) \iff 4x \ln x = 0 \iff x = 1 \quad (\text{wegen } x > 0).$$

Damit ist die Höhe des Dreiecks $f_1(1) = 1$ und die Dreiecksfläche

$$A_{RST} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e-1}{\sqrt{e}} \cdot 1 \approx 0,521.$$

Das von den Graphen 'krummlinig' begrenzte 'Dreieck' hat den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}A &= \int_{x_T}^1 f_{-1}(x) dx + \int_1^{x_R} f_1(x) dx = F_{-1}(1) - F_{-1}(e^{-\frac{1}{2}}) + F_1(e^{\frac{1}{2}}) - F_1(1) \\ &= 0 - 0,5e^{-1} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})) + 0,5e \cdot (2 - 2 \cdot \frac{1}{2}) - 0,5 \cdot 2 = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - 1 \approx 0,543.\end{aligned}$$

Die relative (prozentuale) Abweichung beider Flächen beträgt nur

$$\frac{|A - A_{RST}|}{A} \approx \frac{0,022}{0,543} \approx 4,05\%.$$

e) (Skizze!) Der Radius der Bodenfläche des Kreiskegels ist u , die Höhe ist $f_1(u)$. Damit ist das Kegelvolumen

$$V(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot u^2 \cdot f_1(u) = \frac{\pi}{3} \cdot 2u^3 \cdot (0,5 - \ln u) = \frac{\pi}{3} \cdot u^3(1 - 2 \ln u).$$

Wir berechnen die Ableitung (mit der Produktregel)

$$V'(u) = \frac{\pi}{3}(3u^2(1-2 \ln u) + u^3 \cdot (-\frac{2}{u})) = \frac{\pi}{3} \cdot u^2 \cdot (1 - 6 \ln u) = 0 \iff \ln u = \frac{1}{6} \iff u = e^{\frac{1}{6}}.$$

An dieser Nullstelle von V' liegt ein VZW von + zu - vor, da $1 - 6 \ln u$ streng monoton fällt, also hat $V(u)$ dort ein lokales Extremum. Da dies die einzige Extremstelle von $V(u)$ im Definitionsbereich $]0, e^{\frac{1}{2}}]$ ist, hat das Kegelvolumen dort seinen absolut größten Wert. Das maximale Kegelvolumen beträgt

$$V_{max} = V(e^{\frac{1}{6}}) = \frac{\pi}{3} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - 2 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{2\pi}{9} \cdot \sqrt{e} \approx 1,15.$$

Projekt 5

9. Februar 2010

Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k durch

$$f_k(x) = 2k \cdot x \cdot e^{-4x^2},$$

$$k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$$

Die Graphen von f_1 und f_2 sind in *Abbildung 1* dargestellt.

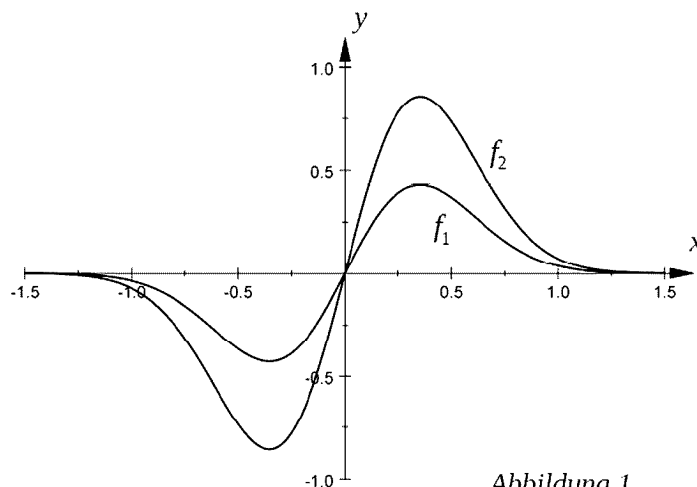


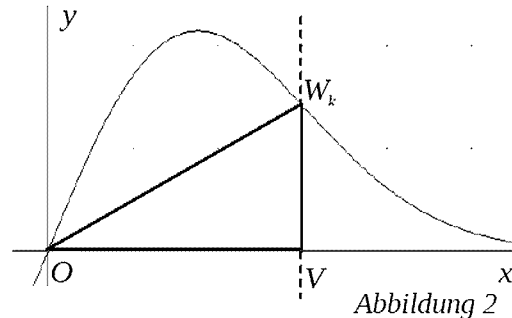
Abbildung 1

- a) (1) Weisen Sie nach, dass die Graphen von f_k punktsymmetrisch zum Ursprung sind, und untersuchen Sie ihr Unendlichkeitsverhalten.
- (2) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f_k mit den Koordinatenachsen. Zeigen Sie, dass die Hoch- bzw. Tiefpunkte der Graphen von f_k für alle $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, jeweils auf einer Parallelen zur y -Achse liegen.
- (3) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Graphen von f_k je drei Wendepunkte besitzen.

$$[\text{Zur Kontrolle: } f'_k(x) = (2k - 16k \cdot x^2) \cdot e^{-4x^2}]$$

(23 Punkte)

- b) (1) Die Gerade $x = v$ mit $v > 0$ schneidet die x -Achse im Punkt V und den Graphen der Funktion f_k in W_k . Mit dem Ursprung O als weiterem Eckpunkt ergibt sich ein Dreieck OVW_k (siehe Abbildung 2).



Ermitteln Sie für $k > 0$ den Wert von v , für den der Flächeninhalt des Dreiecks OVW_k maximal ist. Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.

- (2) Gegeben sind nun zwei Vertreter f_k und f_{-k} der Funktionenschar.

Weisen Sie nach, dass die Graphen von f_k und f_{-k} zueinander achsensymmetrisch sind. Die Symmetrieachse ist dabei die x -Achse.

Begründen Sie anhand dieser Symmetrie, dass auch für $k < 0$ der Flächeninhalt des Dreiecks OVW_k für das gleiche v wie in (1) maximal ist. (17 Punkte)

- c) (1) Zeigen Sie, dass durch $F_k(x) = -\frac{k}{4} \cdot e^{-4x^2}$ eine Stammfunktion von f_k gegeben ist.

- (2) Weisen Sie nach, dass die Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2 über jedem Intervall $[0; s]$, $s \in \mathbb{R}^+$, genau so groß ist wie die Fläche zwischen dem Graphen von f_1 und der x -Achse über diesem Intervall. (10 Punkte)

Lösung:

a) (1) Es ist $f_k(-x) = 2k \cdot (-x) \cdot e^{-4(-x)^2} = -2k \cdot x \cdot e^{-4x^2} = f_k(x)$ für alle x ; die Funktion f_k ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Nach der Regel von de l'Hospital gilt für beide Grenzübergänge

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2kxe^{-4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2kx}{e^{4x^2}} = 0.$$

Die x -Achse ist für beide Grenzübergänge Asymptote.

(2) f_k hat nur die Nullstelle 0, da der Exponentialfaktor stets positiv ist. Damit ist $(0, 0)$ der einzige Schnittpunkt mit den beiden Achsen.

Wir berechnen die Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'_k(x) = 2ke^{-4x^2} + 2kxe^{-4x^2} \cdot (-8x) = 2ke^{-4x^2} \cdot (1 - 8x^2).$$

Die Nullstellen von f'_k sind die Nullstellen des quadratischen Faktors $1 - 8x^2$, also $x = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$. Da diese verschieden sind, ändert der quadratische Faktor dort sein Vorzeichen und f_k hat an diesen Stellen Extrema. Da die Extremstellen unabhängig von k sind, liegen alle Extrema auf zwei Parallelen zur y -Achse (mit den Gleichungen $x = \sqrt{\frac{1}{8}}$ bzw. $x = -\sqrt{\frac{1}{8}}$).

[Anmerkung: Die behauptete Aussage ist schärfer, aber auch falsch! Sie besagt, dass alle Hochpunkte auf einer Parallelen zur y -Achse und alle Tiefpunkte auch auf einer Parallelen zur y -Achse liegen. Aber die Art der Extrema hängt vom Vorzeichen von k ab: Für $k > 0$ hat $f'_k(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $1 - 8x^2$, ändert also bei $+\sqrt{\frac{1}{8}}$ sein Vorzeichen von $+$ zu $-$ und f_k hat daher dort ein Maximum, während die Minima bei $-\sqrt{\frac{1}{8}}$ liegen. Für $k < 0$ ist die Situation genau umgekehrt. Die Hochpunkte liegen also zu einer Hälfte ($k > 0$) auf einer und zur zweiten Hälfte ($k < 0$) auf einer anderen Parallelen zur y -Achse.

In den Lösungsskizzen dieser Abituraufgabe ist auch nur die oben begründete Aussage über die Extrempunkte insgesamt hergeleitet.]

(3) f_k ist punktsymmetrisch, also ist 0 eine Wendestelle. Außerdem ist die x -Achse Asymptote für $x \rightarrow \infty$, daher muss sich nach der letzten Extremstelle (egal ob Maximum oder Minimum) die Krümmung ändern, damit sich der Graph an die x -Achse anschmiegen kann. Wegen der Symmetrie gibt es insgesamt mindestens 3 Wendepunkte.

b) (1) Das Dreieck hat die Breite v und die Höhe $f_k(v)$, also den Flächeninhalt (wegen $k > 0$)

$$A(v) = \frac{1}{2}v \cdot f_k(v) = kv^2e^{-4v^2}.$$

Die Ableitung dieser Zielfunktion ist

$$A'(v) = 2kve^{-4v^2} + kv^2e^{-4v^2} \cdot (-8v) = ke^{-4v^2} \cdot (2v - 8v^3) = 2ke^{-4v^2} \cdot v(1 - 4v^2).$$

Die Nullstellen von $A'(v)$ sind die Nullstellen des kubischen Faktors 0 und $\pm\frac{1}{2}$. Da diese alle verschieden sind, sind sie einfach und A hat an allen Stellen Extrema. Im Bereich $v > 0$ gibt es nur ein Extremum. Dieses ist ein Maximum, da A' schließlich negativ ist

(führender Koeffizient des kubischen Terms ist negativ, alle anderen Faktoren positiv) und A daher schließlich fällt. Bei $v = \frac{1}{2}$ ergibt sich das Dreieck mit dem absolut größten Flächenwert (da es das einzige Extremum im Bereich $v > 0$ ist). Der größte Flächenwert ist

$$A_{max} = A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4} \cdot e^{-1} = \frac{k}{4e}.$$

(2) Die Spiegelung an der x -Achse erfolgt durch den Übergang $y \mapsto -y$. Wegen $f_{-k}(x) = -2ke^{-4x^2} = -f_k(x)$ sind die beiden Graphen spiegelbildlich zueinander bzgl. der x -Achse.

Bei dieser Spiegelung gehen auch die entsprechenden Dreiecke ineinander über, da sie rechtwinklig sind mit einer Kathete auf der Spiegelachse, haben also stets denselben Flächeninhalt. Der Maximalwert ist folglich auch derselbe.

c) (1) Wir leiten ab gemäß der Kettenregel

$$F'_k(x) = -\frac{k}{4}e^{-4x^2} \cdot (-8x) = 2kxe^{-4x^2} = f_k(x).$$

Damit ist F_k eine Stammfunktion für f_k .

(2) Nachrechnen oder folgende Überlegung: Es ist $f_2 = 2f_1$, also $f_2 - f_1 = f_1$. Die Fläche *zwischen* den Graphen von f_1 und f_2 ist gleich der Fläche zwischen der Differenzfunktion $f_2 - f_1$ und der x -Achse. Wegen $f_2 = 2 \cdot f_1$ ist letzteres die Fläche zwischen f_1 und der x -Achse. Dies gilt für beliebige Intervallgrenzen, womit (2) (ohne Rechnung) bewiesen ist.

[Anmerkung: Auch diese Behauptung beruht auf der sehr speziellen Form der Funktionschar als reine Streckungsschar (vgl. nachfolgende Bemerkungen).]

Funktionenscharen mit reinem Streckungsfaktor

In den Abituraufgaben der Projekte 1 und 5 wurden Funktionenscharen der besonders simplen Art behandelt, in der der Scharparameter (a in Projekt 1, k in Projekt 5) als reiner *Streckungsfaktor* vorkommt. Dies bedeutet, dass $f_k(x) = k \cdot f_1(x)$ ist für alle k und x : f_k ist ein konstantes Vielfaches von f_1 . Nach der Faktorregel gilt dies dann auch für alle Ableitungen und für Stammfunktionen. Daraus ergibt sich unmittelbar: Alle Funktionen f_k haben dieselben Null-, Extrem-, Sattel- und Wendestellen wie f_1 ! Der Scharparameter beeinflusst nur die y -Koordinaten der Extrem-, Sattel- und Wendepunkte sowie evtl. Integralwerte, und zwar einfach durch Multiplikation der entsprechenden Werte von f_1 mit dem Streckungsfaktor k .

Außerdem beeinflusst das *Vorzeichen* von k die *Art* der Extremstellen:

Bei $k > 0$ sind die Maximalstellen von f_1 auch die Maximalstellen von f_k , während bei $k < 0$ die Maximalstellen von f_1 genau die Minimalstellen von f_k sind. Sollte (was nicht so selten vorkommt, vgl. Projekt 1) der Streckungsparameter als positiv vorausgesetzt sein ($k > 0$), so haben alle Funktionen dieselben Maximal- und Minimalstellen wie f_1 .