3L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

2. Klausur **18. Dezember 2008**

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}, \qquad g(x) = x^5(x^2 + 1)^3$$

a) auf Symmetrie,
b) berechnen Sie jeweils die Ableitungsfunktion und
c) stellen Sie fest, welcher Art die stationären Stellen sind.
d) Die Tangenten an den Graphen von f in den Schnittpunkten mit der x-Achse bilden zusammen mit der x-Achse ein Dreieck. Wie groß ist dessen Fläche?

Aufgabe 2:

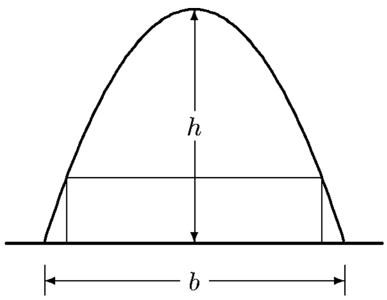
a) Untersuchen Sie die rationale Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

auf Symmetrie, Asymptote, Pol- und Nullstellen, Extrem- und Sattelpunkte.
[Kontrollergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}$.]
b) Skizzieren Sie aufgrund der von Ihnen gefundenen Ergebnisse den Verlauf des Graphen in einem Koordinatensystem.
c) Bestimmen Sie alle Wendestellen von f.

Aufgabe 3:

Aus statischen Gründen werden die Gewölbe von Abwasserkanälen meist parabelförmig gebaut. Der im Querschnitt skizzierte Kanal habe die Breite $b = 4$m und die lichte Höhe $h = 3$m.



a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie eine Gleichung für den Parabelbogen.
[Kontrollergebnis bei passendem Koordinatensystem: $y = \frac{3}{4}(4 - x^2)$.]
b) In diesem Kanal soll ein quaderförmiger Reparaturwagen benutzt werden (in der Skizze ist ein möglicher Wagenquerschnitt eingezeichnet). Wie breit und wie hoch sollte dieser sein, damit er ein größtmögliches Fassungsvermögen hat? Wie groß ist dann seine Querschnittsfläche?

Viel Erfolg!

2. Klausur — Lösungen

1) a) $f(-x) = f(x)$, da $(-x)^2 = x^2$ ist, also ist f achsensymmetrisch (zur y-Achse).
$g(-x) = (-x)^5((-x)^2+1)^3 = -x^5(x^2+1)^3 = -g(x)$, also ist g punktsymmetrisch (zum Koordinatenursprung).
b) Wir berechnen mit Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2-1)\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x \\ &= 2x\sqrt{x^2+1} + \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x(x^2+1)+x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(3x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\,, \\ g'(x) &= 5x^4(x^2+1)^3 + x^5\cdot 3(x^2+1)^2\cdot 2x \\ &= x^4(x^2+1)^2(5(x^2+1)+6x^2) = x^4(x^2+1)^2(11x^2+5) \end{aligned}$$

c) Durch die in b) bereits hergestellte faktorisierte Form von f' bzw. g' erhalten wir sofort: f' und g' haben nur die Nullstelle 0, denn die anderen quadratischen Faktoren sind immer positiv, haben also keine Nullstelle. Außerdem kann man die Vielfachheit der Nullstelle 0 ablesen:
0 ist einfache Nullstelle des Zählers von f', also hat f' dort einen VZW und f dort eine Extremstelle. Da f' schließlich positiv ist, ist die Extremstelle eine Minimalstelle.
0 ist 4-fache Nullstelle von g', also hat g dort eine Sattelstelle.
d) Die Nullstellen von f sind ± 1. Die Tangente an der Stelle $a = 1$ ist gegeben durch die Gleichung

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + \frac{4}{\sqrt{2}}(x-1) = 2\sqrt{2}\cdot(x-1)\,.$$

Wegen der Symmetrie von f sind auch die beiden Tangenten in den Nullstellen symmetrisch zueinander bzgl. der y-Achse, folglich auch das aus diesen Tangenten und der x-Achse gebildete Dreieck (erstellen Sie eine kleine Skizze zur Veranschaulichung). Die beiden Teildreiecke sind rechtwinklig mit Breite 1 und Höhe $2\sqrt{2}$ (=Betrag des y-Achsenabschnittes). Die Fläche des ganzen Dreiecks daher $A = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

2) a) Symmetrie: f ist punktsymmetrisch, da der Zähler punkt-, der Nenner aber achsensymmetrisch ist: $f(-x) = -f(x)$.
Asymptote: Da der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad, hat f eine schräge Asymptote; ihr Anstieg ist 1 (=Quotient der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner). Die Polynomdivision $x^3 : (x^2-4)$ liefert in einem Schritt

$$f(x) = x + \frac{4x}{x^2-4}\,,$$

also ist $y = x$ Gleichung der Asymptote.
Polstellen: Einzige Lücken von f sind ± 2; beide sind einfache Nullstellen des quadratischen Nenners, aber keine Nullstellen des Zählers, also einfache Pole, also hat f dort einen VZW.

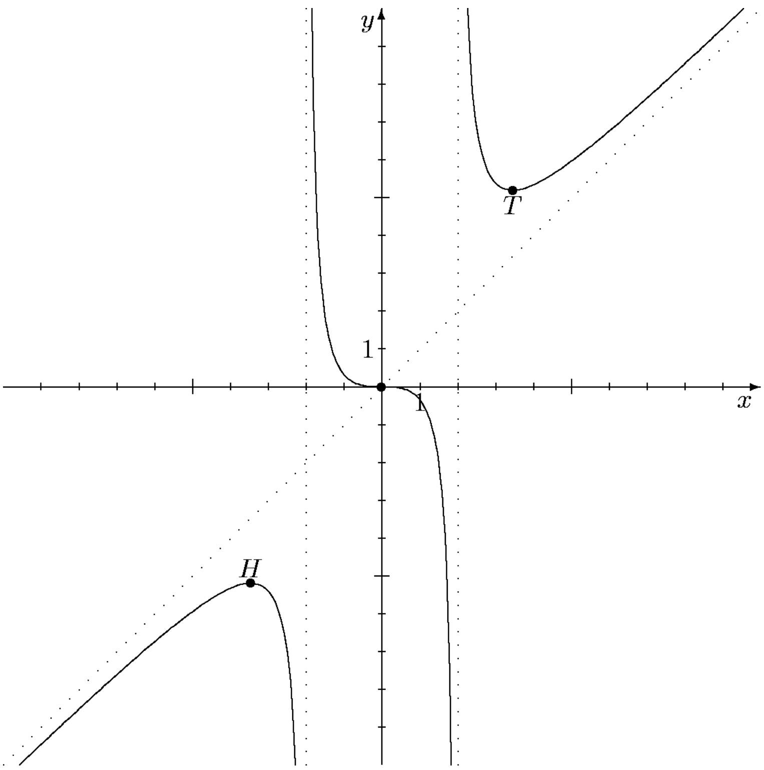
Nullstellen: Einzige Nullstelle von f ist 0, dreifach, also mit VZW.
Extremstellen: Wir berechnen mit der Quotientenregel die Ableitung

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(3x^2-12-2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{x^2-4)^2}\,.$$

f' hat die Nullstelle 0, doppelt, also Sattelstelle von f, und die Nullstellen $\pm\sqrt{12}$, beide einfach, also beide Extremstellen von f. Da f' schließlich positiv ist, ist f schließlich steigend. Da die Extremstelle $\sqrt{12}$ größer ist also die Polstellen ± 2, ist die Funktion f für $x > \sqrt{12}$ streng monoton wachsend und $\sqrt{12}$ Minimalstelle von f. Wegen der Punktsymmetrie ist $-\sqrt{12}$ Maximalstelle von f.
Der Sattelpunkt ist $S = (0,0)$. Die y-Koordinate des Hochpunktes ist

$$f(\sqrt{12}) = \frac{12\sqrt{12}}{(12-4)} = \frac{3}{2}\sqrt{12} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\,.$$

Damit ist der Hochpunkt $H = (\sqrt{12}, \frac{3}{2}\sqrt{12}) \approx (3{,}46; 5{,}2)$ und wegen der Punktsymmetrie der Tiefpunkt $T = (-\sqrt{12}, -\frac{3}{2}\sqrt{12}) \approx (-3{,}46; -5{,}2)$.
b) Skizze:



c) Wendestellen sind notwendig Nullstellen von f'':

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2 - (x^4-12x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{(4x^3-24x)(x^2-4) - 4x(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^3} \\
&= \frac{4x^5-40x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3} \\
&= \frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\,.
\end{aligned}$$

f'' hat also nur eine Nullstelle bei 0; diese ist einfach und folglich die einzige Wendestelle von f: Es ist dies die bereits in a) bestimmte Sattelstelle von f.

3) a) Man wählt das Koordinatenkreuz mit der x-Achse auf dem Boden des Querschnitts und der y-Achse in der Symmetrieachse der Parabel. Damit hat der Parabelbogen zwei Schnittpunkte mit der x-Achse bei $x = \pm 2$. Also setzt man die Gleichung an als $y = a(x+2)(x-2) = a(x^2-4)$. Da der Scheitelpunkt bei $(0,3)$ liegt, gilt $3 = a(0^2-4) \iff a = -\frac{3}{4}$. Die Parabelgleichung ist (wie angegeben) $y = -\frac{3}{4}(x^2-4)$.

b) Es sei x die halbe Breite des Wagenquerschnitts, also $x > 0$; die Höhe ist dann $y = f(x) = -\frac{3}{4}(x^2-4)$, die Fläche also

$$A(x) = x \cdot \frac{3}{4}(4-x^2) = 3x - \frac{3}{4}x^3 \,.$$

Wir untersuchen die möglichen Extremstellen:

$$0 = A'(x) = 3 - \frac{9}{4}x^2 \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15 \,.$$

Beide Nullstellen von A' sind einfach, also Extremstellen von A. A' ist schließlich negativ, die Zielfunktion A also schließlich fallend, die letzte Extremstelle $\sqrt{\frac{4}{3}}$ daher ein Maximum. (Die andere Extremstelle ist negativ, kommt also für die Problemlösung nicht in Frage.) Die Höhe des maximalen Kastens beträgt

$$f(\sqrt{\frac{4}{3}}) = 3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

und die maximale Querschnittsfläche folglich

$$A_{max} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot 2 = \frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62 \,.$$

3L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

1. Klausur **17. Oktober 2008**

Aufgabe 1:

Aus rechteckigen Metallplatten mit der Breite 40 cm und der Länge 50 cm werden an den vier Ecken Quadrate der Kantenlänge 7 cm herausgeschnitten und die entstehenden Seitenflächen hochgebogen. Auf diese Weise entstehen Metallkästen ohne Deckel.
a) Bestimmen Sie das Volumen dieser Kästen!
b) Kann man durch Herausschneiden anderer Quadrate Metallkästen vom gleichen Volumen herstellen? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten!
c) Welcher Kasten hat das geringere Gewicht?

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist ein rationaler Funktionsterm $f(x)$. Nennen Sie jeweils eine am Funktionsterm $f(x)$ überprüfbare (äquivalente) Bedingung dafür, dass die rationale Funktion f für die Grenzübergänge $x \to \pm\infty$ ...

i) ... eine Asymptote besitzt.
ii) ... eine waagerechte Asymptote hat.
iii) ... einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt.
iv) ... den gleichen Grenzwert besitzt.

b) Bestimmen Sie für die folgenden rationalen Funktionen die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ sowie evtl. Asymptoten:

i) $f(x) = \dfrac{4x^4 + 3x^3 + 3}{2x^3 + x^2 - 2}$, ii) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x^3}{2x^5 + 7x^3 - 5}$.

c) Bestimmen Sie ggf. die Schnittstellen von Funktion und Asymptote.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die ganzrationale Funktion h mit dem Funktionsterm

$$h(x) = x^6 - 2x^4 - 8x^2$$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von h sowie ihre Vielfachheiten. Zerlegen Sie $h(x)$ soweit wie möglich in Linearfaktoren.
b) Es sei

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 10}{h(x)}\,.$$

Untersuchen Sie die rationale Funktion f (Pole, hebbare Lücken mit Grenzwert, Vorzeichenverteilung, Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, evtl. Asymptote) und skizzieren Sie einen Ihren Ergebnissen entsprechenden möglichen Verlauf des Graphen.

Viel Erfolg!

1. Klausur — Lösungen

1) a) Ist x die Kantenlänge der ausgeschnittenen Quadrate, so hat der Kasten die Höhe x, während die Grundfläche die Kantenlängen $50-2x$ bzw. $40-2x$ hat. Das Volumen beträgt also

$$V(x) = (40-2x)(50-2x)x = 4x^3 - 180x^2 + 2000x\,.$$

Also ist $V(7) = (40-14)\cdot(50-14)\cdot 7 = 6552$.
b) Gesucht sind Lösungen der Gleichung $V(x) = V(7) = 6552$. Eine Lösung ist offenbar $x = 7$. Daher lässt sich aus $V(x) - V(7)$ der Linearfaktor $x - 7$ abspalten:

$$(V(x)-V(7)) : (x-7) = (4x^3-180x^2+2000x-6552) : (x-7) = 4(x^2-38x+234)\,.$$

Also

$$V(x) = V(7) \iff V(x) - V(7) = 0 \iff x = 7 \ \vee\ x^2 - 38x + 234 = 0$$
$$\iff x = 7 \ \vee\ x = 19 \pm \sqrt{361-234} = 19 \pm \sqrt{127}\,.$$

Von diesen zwei zusätzlichen Lösungen ist $19 + \sqrt{127} \approx 30{,}27 > 20$ und kommt daher nicht in Frage. Dagegen ist die zweite Möglichkeit $19-\sqrt{127} \approx 7{,}73$ durchaus realisierbar.
c) Je größer die ausgeschnittenen Quadrate sind, desto geringer ist der tatsächliche Materialverbrauch und damit das Gewicht. Also ist der Kasten mit der Höhe $x = 7{,}73\,\text{cm}$ leichter (bei gleichem Volumen).

2) a) i) Zählergrad $\leq$ Nennergrad $+1$.
ii) Zählergrad $\leq$ Nennergrad.
iii) $\iff$ ii): Gleiche Bedingung.
iv) Zählergrad $<$ Nennergrad oder Zählergrad$-$Nennergrad ist gerade.
b) i) Diese Funktion f hat eine schräge Asymptote mit dem Anstieg 2; also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Polynomdivision ergibt $f(x) = 2x + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}x^2-4x-4}{2x^3+x^2-2}$. Also ist $y = 2x + \frac{1}{2}$ eine Gleichung für die Asymptote.
ii) Für diese Funktion f ist die x-Achse Asymptote, also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
c) i) Schnittstellen von f mit ihrer Asymptote sind die Nullstellen von $\frac{1}{2}x^2 - 4x - 4$ bzw. von $x^2 - 8x - 8$, also $4 \pm \sqrt{24} = 4 \pm 2\sqrt{6}$.
ii) Schnittstellen dieser Funktion f mit ihrer Asymptote sind die Nullstellen von g, d. h. von $-3x^3 + 3x^2 = -3x^2(x-1)$. Dies sind 0 und 1.

3) a) Berechnung der Nullstellen von h durch Ausklammern und Substitution:

$$0 = h(x) = x^2(x^4 - 2x^2 - 8) \iff x = 0 \ \vee\ (z = x^2 \ \wedge\ z^2 - 2z - 8 = 0)$$
$$\iff x = 0 \ \vee\ (z = x^2 \ \wedge\ (z-4)(z+2) = 0)$$
$$\iff x = 0 \ \vee\ x^2 = 4 \ \vee\ x^2 = -2 \iff x = 0 \ \vee\ x = \pm 2\,.$$

Damit hat h die Nullstellen 0 (doppelt) und ± 2. Es gilt $h(x) = x^2(x^2-4)(x^2+2) = x^2(x-2)(x+2)(x^2+2)$. Damit ist 0 doppelte und ± 2 einfache Nullstellen.

b) Die Lücken von f sind die Nullstellen von h, also in a) bestimmt worden. 0 ist keine Nullstelle des Zählers, also ein Pol von f, und zwar doppelt.
2 ist Nullstelle des Zählers; Polynomdivision des Zählers durch $x-2$ ergibt $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = (x-2)(x^2-5)$. Damit folgt

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5)}{x^2(x-2)(x+2)(x^2+2)} = \frac{x^2-5}{x^2(x+2)(x^2+2)} =: \tilde{f}(x)\,.$$

Neben dem doppelten Pol bei 0 hat f also noch den einfachen Pol -2, während $+2$ eine hebbare Lücke ist mit dem Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(2) = \frac{-1}{4\cdot 4\cdot 6} = -\frac{1}{96} = -0{,}0104\,.$$

Nullstellen von $\tilde{f}$ und f sind $\pm\sqrt{5}$, beide einfach.
Da der Quotient der führenden Koeffizienten positiv ist, ist $f(x)$ schließlich positiv, wechselt aber an allen einfachen Polen und beiden (einfachen) Nullstellen das Vorzeichen.
Da der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad, hat f die x-Achse als Asymptote und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.