Kompendium Analytische Geometrie

Vektoren, Punkte, Geraden, Dreieck, Ebenen, Tetraeder: Begriffe und Definitionen

Name	Bezeichnung	Definition	Bedeutung
Vektoraddition	$\vec{u}+\vec{v}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$	Aneinandersetzung von Vektoren
skalare Multiplikation	$r.\vec{v}$	$r.\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru_1 \\ ru_2 \\ ru_3 \end{pmatrix}$	Streckung und evtl. Orientierungsumkehr
Verbindungsvektoren	$\overrightarrow{AB}$	$A=(a_1,a_2,a_3), B=(b_1,b_2,b_3) \implies \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$	Eigenschaften: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Ortsvektoren	$\overrightarrow{OA}$	$A=(a_1,a_2,a_3) \implies \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Punkt A und Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ haben gleiche Koordinaten
Linearkombination		$r\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}$	Vielfachsumme von Vektoren
$\vec{u},\vec{v}$ linear abhängig		einer der Vektoren ist Vielfaches des anderen: $\vec{v}=r\vec{u}$	ein Vektor ist $\vec{o}$ oder beide Vektoren haben gleiche Richtung
$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ linear abhängig		ein Vektor ist Linearkombination der übrigen: $\vec{w}=r\vec{u}+s\vec{v}$	alle drei Vektoren lassen sich als Pfeile in einer Ebene darstellen
A,B,C kollinear A,B,C,D komplanar		$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ linear abhängig $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ linear abhängig	A,B,C liegen auf einer Geraden A,B,C,D liegen in einer Ebene
ABC Dreieck $ABCD$ Tetraeder		$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ linear unabhängig	A,B,C liegen nicht auf einer Geraden A,B,C,D liegen nicht in einer Ebene
Gerade	$g(A,\vec{u})$ $g(A,B)$	$X\in g(A,\vec{u}) \iff \overrightarrow{AX}=r\vec{u}$ für ein geeinetes $r\in I\!R$ $X\in g(A,B) \iff \overrightarrow{AX}=r\overrightarrow{AB}$ für ein geeinetes $r\in I\!R$	Gerade durch A mit Richtungsvektor $\vec{u}\neq\vec{o}$ Gerade durch zwei verschiedene Punkte A, B
Ebene	$e(A,\vec{u},\vec{v})$ $e(A,B,C)$	$X\in e(A,\vec{u},\vec{v}) \iff \overrightarrow{AX}=r\vec{u}+s\vec{v}$ für geignete $r,s\in I\!R$ $X\in e(A,B,C) \iff \overrightarrow{AX}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ für geignete $r,s\in I\!R$	Ebene durch A mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{u},\vec{v}$ Ebene durch drei nicht kollineare Punkte A,B,C

Produkte in der Vektorrechnung (im R^3)

Name	Bezeichnung	Definition	Ergebnis	Bedeutung
Skalarprodukt	$\vec{u} \bullet \vec{v}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$	Zahl	1. Länge eines Vektors: $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ 2. Orthogonalität: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ 3. Winkel für $\vec{u} \neq \vec{o} \neq \vec{v}$: $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert})$.
Vektorprodukt	$\vec{u} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$	Vektor	Eigenschaften: 1. $\vec{u} \times \vec{v}$ ist gemeinsamer Normalenvektor zu $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$: 2. $\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert$ ist Fläche des Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$. 3. $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig $\iff \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{o}$ 4. $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{o} \implies \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ ist rechtshändiges (= positiv orientiertes) linear unabhängiges System
Spatprodukt	$(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$	Kombination von $\times$ und $\bullet$ (siehe oben)	Zahl	Eigenschaften: 1. $\lvert(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}\rvert$ ist das Volumen des Spates mit den Kantenvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. 2. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig $\iff (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w} \neq 0$.

Vektorprodukt und Spatprodukt sind nur für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (dreidimensionaler Vektorraum) definiert!

Längen, Flächen, Volumina (im R^3)

Maß	Objekt	Formel	Merkregel
Länge	Strecke AB	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Betrag eines Vektors
Fläche	Parallelogramm $ABCD$	$\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\rvert$	Betrag des Vektorproduktes der Kantenvektoren
	Dreieck ABC	$\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\rvert$	Betrag des Vektorproduktes durch 2
Volumen	Spat mit Kantenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	$\lvert(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}\rvert$	Spatprodukt der Kantenvektoren
	allg. Pyramide $ABCDS$		Grundfläche mal Höhe durch 3
	Pyramide $ABCDS$ über Parallelogramm $ABCD$	$\frac{1}{3} \cdot \lvert(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \bullet \overrightarrow{AS}\rvert$	Betrag des Spatproduktes durch 3
	allg. Tetraeder $ABCD$	$\frac{1}{6} \cdot \lvert(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}\rvert$	Betrag des Spatproduktes durch 6

Darstellungen von Geraden und Ebenen

Name	Objekt	Definition	Bedeutung
Parameterdarstellung	Gerade $g(A,\vec{u})$ Gerade $g(A,B)$	$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+r\vec{u}$ $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{AB}$	A Ursprung (Stützpunkt), $\vec{u}\neq\vec{o}$ Richtungsvektor der Gerade A Ursprung (Parameter $r=0$), $B\neq A$ zweiter Geradenpunkt (Parameter $r=1$) Punkte $X\in g$ werden durch *einen* Parameter (r) eindeutig beschrieben (1-dim. affines Koordinatensystem)
Parameterdarstellung	Ebene $e(A,\vec{u},\vec{v})$ Ebene $e(A,B,C)$	$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+r\vec{u}+s\vec{v}$ $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$	A Ursprung (Stützpunkt), $\vec{u},\vec{v}$ linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene A,B,C Basisdreieck: A $(r=0,s=0)$, B $(r=1,s=0)$ und C $(r=0,s=1)$ Punkte $X\in e$ werden zwei Parameter (r,s) eindeutig beschrieben (2-dim. affines Koordinatensystem)
Normalengleichung	Ebene $e(A,\vec{n})$ Ebene $e(A,\vec{u},\vec{v})$ Ebene $e(A,B,C)$	$\overrightarrow{AX}\bullet\vec{n}=0$ bzw. $\overrightarrow{OX}\bullet\vec{n}=\overrightarrow{OA}\bullet\vec{n}$ $\overrightarrow{AX}\bullet\vec{n}=0$ für $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ $\overrightarrow{AX}\bullet\vec{n}=0$ für $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$	Die Ebene durch A mit Normalenvektor $\vec{n}$ besteht genau aus den Punkten X, die diese Gleichung erfüllen. Die Ebene durch A mit RV-en $\vec{u},\vec{v}$ besteht genau aus den Lösungen dieser Gleichung. Die Ebene durch A,B,C besteht genau aus den Lösungen dieser Gleichung.
Koordinatengleichung	Ebene $e=e(\vec{n},d)$	$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$	1. Ebene e besteht genau aus den Lösungen (x_1,x_2,x_3) dieser Gleichung, 2. $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene, 3. $d=n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3$ für $A=(a_1,a_2,a_3)\in e$

Normalen- und Koordinatengleichungen gibt es nur für Ebenen im Raum (oder für Geraden in der Ebene)!

Wechseln der Darstellungen

Objekt	von $\rightarrow$ zu	gegeben	zu berechnen	Ergebnis
Ebene	PD $\rightarrow$ Normalenglg.	$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+r\vec{u}+s\vec{v}$	NV $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$	$\vec{n}\bullet\overrightarrow{OX}=\vec{n}\bullet\overrightarrow{OA}$
	PD $\rightarrow$ Koord.Glg.	$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+r\vec{u}+s\vec{v}$	NV $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, $d=\vec{n}\bullet\overrightarrow{OA}$	$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$

Schnittpunktsberechnung

Typ	Gegeben	Ansatz	Rechnung	mögliches Ergebnis
Punkt – Gerade	P, PD von g	Punkt in PD einsetzen	LGS 1 Unbekannte, Lösbarkeit überprüfen	1. unlösbar: $P \notin g$ 2. lösbar: $P \in g$
Punkt – Ebene	P, PD von e	Punkt in PD einsetzen	LGS 2 Unbekannte, Lösbarkeit überprüfen	1. unlösbar: $P \notin e$ 2. lösbar: $P \in e$
Gerade – Gerade	zwei PD-en	PD-en gleichsetzen	LGS mit 2 Unbekannten lösen, falls lösbar einen Lösungsparameter in zugehörige PD einsetzen	1. unlösbar: kein Schnittpunkt Geraden parallel oder windschief 2. eine Lösung: genau ein Schnittpunkt 3. unendliche viele Lösungen: Geraden identisch
Gerade – Ebene	PD für g, Koord.Glg für e	PD in Koord.Glg einsetzen	1 Gleichung mit 1 Unbekannten lösen, falls lösbar Geradenparameter in PD einsetzen	1. unlösbar: kein Schnittpunkt, $g \parallel e$ 2. eine Lösung: ein Schnittpunkt 3. unendlich viele Lösungen: Gerade g liegt in der Ebene e
Ebene – Ebene	zwei Koord.Glg-en	Glg-en zusammensetzen zu LGS	LGS lösen, Lösungsmenge durch PD beschreiben	1. unlösbar: kein Schnittpunkt, Ebenen parallel 2. unendlich viele Lösungen: Schnittgerade

Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Typ	Gegeben	Möglichkeit	Bedingung	in Worten
Gerade – Gerade	$g = g(A, \vec{u})$, $h = g(A', \vec{v})$	1. parallel a. und identisch b. und verschieden 2. nicht parallel a. genau ein Schnittpunkt b. windschief	1. $\vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig a. und $A \in h$ b. und $A \notin h$ 2. $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig a. und ein Schnittpunkt b. und kein Schnittpunkt	1. RV-en der Geraden linear abhängig a. und Ursprung von g liegt auf h b. und Ursprung von g liegt nicht auf h 2. RV-en der Geraden liner unabhängig
Gerade – Ebene	$g = g(A, \vec{u})$, $e = e(A', \vec{n})$	1. g parallel zu e a. und in e enthalten b. und nicht in e enthalten 2. genau ein Schnittpunkt	1. $\vec{n} \perp \vec{u} \iff \vec{n} \bullet \vec{u} = 0$ a. und $A \in e$ b. und $A \notin e$ 2. $\vec{n} \not\perp \vec{u} \iff \vec{n} \bullet \vec{u} \neq 0$	1. RV der Geraden orthogonal zu NV der Ebene a. und Ursprung von g liegt in e b. und Ursprung von g liegt nicht e 2. RV der Geraden nicht orthogonal zu NV der Ebene
Ebene – Ebene	$e = e(A, \vec{n})$, $e' = e(A', \vec{n}')$	1. parallel a. und identisch b. und verschieden 2. eine Schnittgerade	1. $\vec{n}, \vec{n}'$ linear abhängig a. und $A \in e'$ b. und $A \notin e'$ 2. $\vec{n}, \vec{n}'$ linear unabhängig	1. NV-en der Ebenen linear abhängig a. und Ursprung einer Ebene liegt in der anderen b. und Ursprung der einen Ebene liegt nicht der anderen 2. NV-en der Ebenen linear unabhängig

Lotfußpunkte

Lot	Gegeben	Ansatz für F	Formel	Bedingung	Gleichung(en)	Ergebnis
Punkt – Gerade	$P, \quad g = g(A, \vec{u})$	F liegt auf g:	$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u}$	$\overrightarrow{PF} \perp g$:	$0 = \vec{u} \bullet \overrightarrow{PF} = \vec{u} \bullet \overrightarrow{PA} + r \cdot \lvert\vec{u}\rvert^2$	$r = \dfrac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{AP}}{\lvert\vec{u}\rvert^2}$
Punkt – Ebene	$P, \quad e = e(A, \vec{u}, \vec{v})$	F liegt in der Ebene	$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}$	$\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}, \vec{v}$	$\begin{cases} 0 = \vec{u} \bullet \overrightarrow{PF} \\ 0 = \vec{v} \bullet \overrightarrow{PF} \end{cases}$	2×2-LGS lösen
	$P, \quad e = e(A, \vec{n})$, $\vec{n}$ NV von e	F auf Lotgerade $g(P, \vec{n})$:	$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} - s\vec{n}$	$F \in e(A, \vec{n})$	$0 = \vec{n} \bullet \overrightarrow{AF} = \vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} - s \cdot \lvert\vec{n}\rvert^2$	$s = \dfrac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}}{\lvert\vec{n}\rvert^2}$
Gerade – Gerade	$g = g(A, \vec{u})$, $h = g(A', \vec{v})$	$\begin{cases} F \in g \\ F' \in h \end{cases}$	$\begin{cases} \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} \\ \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OA'} + s\vec{v} \end{cases}$	$\overrightarrow{FF'} \perp \vec{u}, \vec{v}$	$\begin{cases} 0 = \vec{u} \bullet \overrightarrow{FF'} \\ 0 = \vec{v} \bullet \overrightarrow{FF'} \end{cases}$	2×2-LGS lösen

Abstände

Der Abstand Punkt–Gerade und Punkt–Ebene ist der Abstand des Punktes vom Lotfußpunkt.
Der Abstand zwischen Geraden ist der Abstand zwischen den Fußpunkten eines gemeinsamen Lotes – sofern es existiert, andernfalls ist der Abstand 0 (weil sich die Geraden schneiden).

Abstände ohne Lotfußpunktbestimmung

zwischen	Gegeben	Voraussetzung	Formel	Merkregel
Punkt – Gerade	Punkt $P, \quad g = g(A, B)$		Fußpunkt berechnen	alternativ: siehe Abstände und Höhen
Punkt – Ebene	Punkt P, Koord.Glg. $\vec{n} \bullet \vec{x} = d$ für e		$d(P, e) = \dfrac{\lvert\vec{n} \bullet \overrightarrow{OP} - d\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$	HESSEsche Abstandsformel: P in Koordinatengleichung einsetzen und Betrag durch Länge des Normalenvektors dividieren
Gerade – Ebene	$g = g(A, \vec{u})$, Koord.Glg. $\vec{n} \bullet \vec{x} = d$ für e	$g \parallel e$ (d. h. $\vec{u} \perp \vec{n}$)	$d(g, e) = d(A, e) = \dfrac{\lvert\vec{n} \bullet \overrightarrow{OA} - d\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$	Abstand eines beliebigen Geradenpunktes von der Ebene
		$g \nparallel e$	$d(g, e) = 0$	Abstand 0, wenn ein Schnittpunkt existiert
Gerade – Gerade	$g = g(A, \vec{u}), \quad h = g(A', \vec{v})$	$g \parallel h$,	$d(g, h) = d(A', g) = \dfrac{\lvert\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$	Abstand eines beliebigen Punktes der einen Geraden von der anderen
		$g \nparallel h$, $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{o}$	$d(g, h) = \dfrac{\lvert\vec{n} \bullet \overrightarrow{AA'}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert} = \dfrac{\lvert(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \overrightarrow{AA'}\rvert}{\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert}$	Abstand zwischen A' und der Ebene $e = e(A, \vec{n})$ durch A mit NV $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
Ebene – Ebene	$e = e(A, \vec{n}), \quad e' = e(A', \vec{n}')$	$e \parallel e'$ (d. h. $\vec{n}, \vec{n}'$ lin.abh.)	$d(e, e') = d(A', e) = \dfrac{\lvert\vec{n} \bullet \overrightarrow{AA'}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$	Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene von der anderen
		$e \nparallel e'$	$d(e, e') = 0$	Abstand 0, weil Schnittpunkte existieren

Abstände als Höhen

Abstand	Gegeben	Abstand ist eine Höhe im	Formel	Merkregel
Punkt – Gerade	$P, \quad g(A,B)$	Dreieck ABP bzw. Parallelogramm mit KV $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$	$d(P,g) = \dfrac{\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$	Parallelogrammfläche durch Grundseite
Punkt – Ebene	$P, \quad e(A,B,C)$	Tetraeder $ABCP$ bzw. Spat mit KV $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}$	$d(P,e) = \dfrac{\lvert(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AP}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\rvert}$	Spatvolumen durch Grundfläche
Geraden	$g = g(A,\vec{u}) \nparallel h = g(A',\vec{v})$	Tetraeder bzw. Spat mit Kantenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AA'}$	$d(g,h) = \dfrac{\lvert(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \overrightarrow{AA'}\rvert}{\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert}$	Spatvolumen durch Grundfläche
	$g = g(A,B) \parallel h = g(A',B')$	Dreieck ABA' bzw. Parallelogramm mit KV $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}$	$d(g,h) = \dfrac{\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$	Parallelogrammfläche durch Grundseite

Winkel

zwischen	gegeben	Formel	Ergebnis im Bereich
Vektoren	$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$	$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$	$0^0 \leq \alpha \leq 180^0$
Geraden	RV-en $\vec{u}, \vec{v}$	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert\vec{u} \bullet \vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$	$0^0 \leq \alpha \leq 90^0$
Gerade–Ebene	RV $\vec{u}$ von g, NV $\vec{n}$ von e	$\sin\alpha = \dfrac{\lvert\vec{u} \bullet \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$	$0^0 \leq \alpha \leq 90^0$
Ebenen	NV-en $\vec{n}, \vec{n}'$	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert\vec{n} \bullet \vec{n}'\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert \cdot \lvert\vec{n}'\rvert}$	$0^0 \leq \alpha \leq 90^0$