Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

a) Das Wachstum bestimmter Bakterienkulturen lässt sich, sofern man auf den Einsatz geeigneter Gegenmittel verzichtet, durch Funktionen des Typs $g_{c,k}$ mit $g_{c,k}(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$, $c > 0, k > 0$, beschreiben. [t : Zeit in Tagen; $g_{c,k}(t)$: Bakterienzahl in Millionen]
Zum Ausgangszeitpunkt $(t = 0)$ sind in einer bestimmten Kultur ca. 2 Millionen Bakterien vorhanden, die Messung einen Tag später ergibt ca. 2,21 Millionen.

Berechnen Sie c und k.
Die zu diesen Werten von c und k gehörige Funktion werde der Einfachheit halber mit g bezeichnet. Ihr Graph ist auf Seite 2 abgebildet.

Zeigen Sie, dass die Funktion g der Gleichung $\frac{g'(t)}{g(t)} = k$ *genügt.*

Erklären Sie die Bedeutung dieser Gleichung im Sachzusammenhang. (11 Punkte)

[Zur Kontrolle: $g(t) = 2 \cdot e^{0,1 \cdot t}$]

b) Das Wachstum der Bakterienkultur kann durch den regelmäßigen Einsatz eines geeigneten Gegenmittels (z.B. Medikament/Antibiotikum) abgeschwächt werden, so dass die Bakterienzahl nach einiger Zeit zurückgeht.
Die dieses „vergiftete Wachstum“ beschreibende Funktion sei f mit $f(t) = 2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,03 \cdot t^2}$
[$t \geq 0$: Zeit in Tagen; $f(t)$: Bakterienzahl in Millionen].

Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien, die nach einem bzw. nach 5 Tagen vorhanden sind. Vergleichen Sie diese Werte mit den Werten, die sich bei dem in Teil a) vorliegenden Wachstumsprozess (beschrieben durch die Funktion g) zur jeweils gleichen Zeit ergeben (Werte auf zwei Stellen runden, prozentualer Vergleich). (8 Punkte)

c) *Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs $D_f = IR_0^+$. Berechnen Sie unter Beachtung dieses Definitionsbereichs die relativen Extremstellen und Wendestellen der Funktion f.*

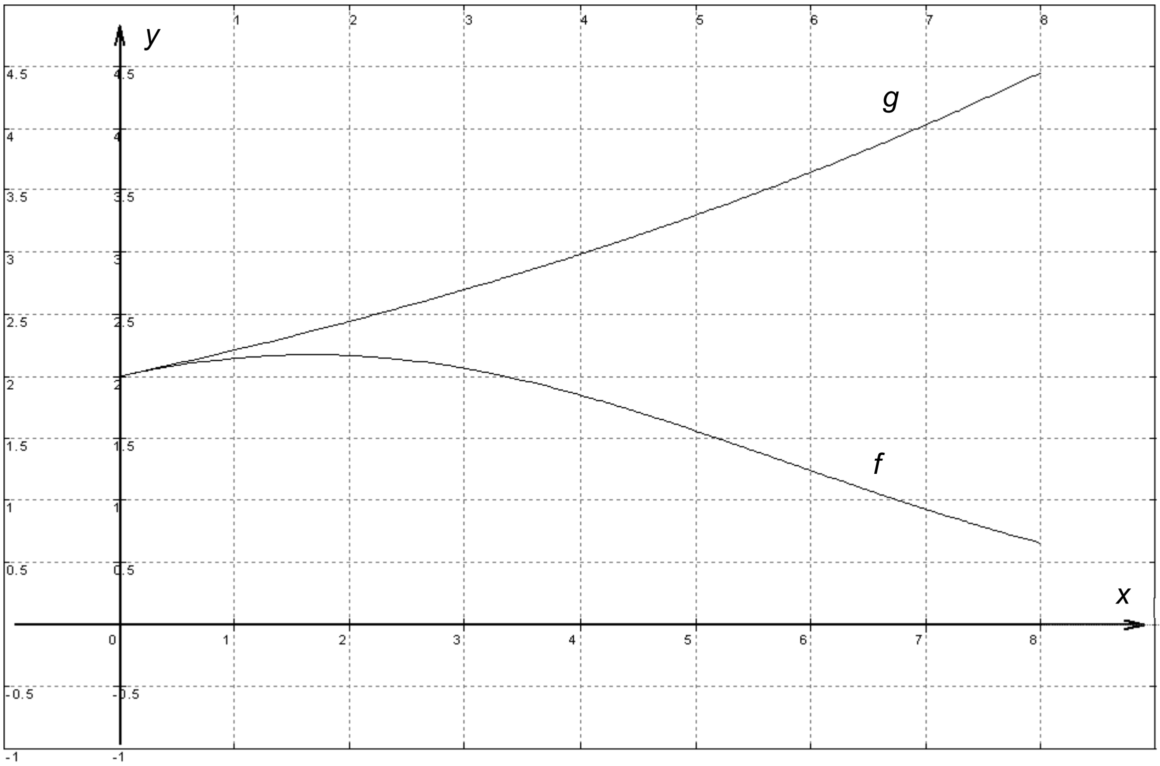
[Zur Kontrolle: $f'(t) = 2 \cdot (0{,}1 - 0{,}06\,t) \cdot e^{0{,}1t - 0{,}03t^2}$. Ohne Nachweis benutzt werden darf: $f'''(t) = 10^{-3} \cdot (-0{,}432\,t^3 + 2{,}16\,t^2 + 18\,t - 34) \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}03 \cdot t^2}$. Der Graph von f ist ebenfalls auf Seite 2 abgebildet.]

Beschreiben Sie zusammenfassend den Prozess des „vergifteten Wachstums“ mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse und anhand des Graphen von f. (23 Punkte)

d) Es ist sinnvoll, das Medikament abzusetzen, wenn die Anzahl der Bakterien unter eine Million sinkt.

Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem das der Fall ist. (8 Punkte)

Wachstum einer Bakterienkultur (zwei Modelle):



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

1 Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von Exponentialfunktionen mit Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$g_{c,k}(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$; $g_{c,k}(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$, $g_{c,k}(1) = 2{,}21 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{k} = 2{,}21 \Leftrightarrow k = \ln 1{,}105 \approx 0{,}1$.

Es gilt: $g(t) = g_{2;\,0,1}(t) = 2 \cdot e^{0,1 \cdot t}$ und $g'(t) = 0{,}2 \cdot e^{0,1 \cdot t}$.

Das ergibt: $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = 0{,}1 (= k)$. (Eine allgemeine Betrachtung mit c und k ist ebenso möglich.)

Das Verhältnis der lokalen Änderungsrate zum Gesamtbestand ist zu jedem Zeitpunkt t konstant, d. h., die lokale (momentane) Änderungsrate ist proportional zum augenblicklichen Bestand (in diesem Fall der Bakterienzahl). Der Proportionalitätsfaktor k (= 0,1) ist die Wachstumskonstante dieses exponentiellen Wachstumsprozesses („Wachstum“, da $k > 0$).

Modelllösung b)

zu g: $g(1) \approx 2{,}21$ (vorgegeben), $g(5) \approx 3{,}30$; zu f: $f(1) = 2e^{0{,}1-0{,}03} \approx 2{,}15$ und $f(5) \approx 1{,}56$. Ausgehend vom Startwert 2 (Mio. Bakterien) hat das Medikament („Gift“) bei $t = 1$ noch keine große Wirkung gezeigt: Der Wert für „vergiftetes Wachstum“ liegt nur ca. 2,7 % unter dem Wert, der sich beim normalen exponentiellen Wachstumsprozess zeigt. Nach 5 Tagen erfolgt aber eine deutliche Absenkung des Werts auf unter 50 % (47,3 %) des Werts, der sich im anderen Fall ergeben hätte. Mit 1,56 (Mio.) liegt die Anzahl der Bakterien sogar erheblich unter dem Ausgangswert von 2 (Mio.).

Modelllösung c)

$D_f = I\!R_0^+$; linker Rand: $f(0) = 2$ (Startwert); $\lim\limits_{t\to\infty}(0{,}1\,t - 0{,}03\,t^2) = -\infty$ und deswegen gilt: $\lim\limits_{t\to\infty}(f(t)) = 0_+$ (rechter Rand). Notwendige Ableitungen: $f'(t) = 2\cdot(0{,}1-0{,}06t)\cdot e^{0{,}1t-0{,}03t^2}$ und $f''(t) = 2\cdot[(0{,}1-0{,}06t)^2 - 0{,}06]\cdot e^{0{,}1t-0{,}03t^2}\left[= (0{,}0072t^2 - 0{,}024t - 0{,}1)\cdot e^{0{,}1t-0{,}03t^2}\right]$.

$f'(t) = 0$ ergibt die potentielle Extremstelle $t_e = \frac{5}{3}$. Da dieser Wert in D_f liegt und $f''(t_e) < 0$ ist, wird bei t_e ein lokales Maximum angenommen. Bei der Wendestellenuntersuchung ist z.B. die Berechnung der Lösungen von $(0{,}1 - 0{,}06t)^2 - 0{,}06 = 0$ angemessen: $t_1 \approx 5{,}75$ und $t_2 \approx -2{,}41$. Wegen $t_2 \notin D_f$ und $f'''(t_1) \neq 0$ ist t_1 die einzige Wendestelle im Definitionsbereich.

Bei dem vergifteten Prozess wächst die Bakterienzahl zunächst auch noch an, aber etwas langsamer als ohne medikamentösen Einfluss. Nach knapp 2 Tagen wird das Maximum erreicht, es liegt bei etwa 2,25 Mio. Dann bewirkt das Medikament einen immer schneller zunehmenden Rückgang (maximale Abnahmegeschwindigkeit nach knapp 6 Tagen (siehe Wendestelle)). Die Bakterienzahl liegt dann bereits deutlich unter 1,5 Millionen. Mit zunehmender Zeit nimmt die Anzahl der Bakterien weiter ab (Grenzwert 0_+), die Abnahmeraten werden dabei geringer.

Modelllösung d)

Gesucht ist der Wert t^* für den gilt: $f(t^*) = 1$. Für $t > t^*$ folgt dann $f(t) < 1$, da f streng monoton fällt (Begründung mit 1. Ableitung oder ggf. anschaulich).

$2\cdot e^{0{,}1t-0{,}03t^2} = 1 \Leftrightarrow 0{,}1t - 0{,}03t^2 = \ln(0{,}5)$ ... mit den Lösungen $t_{1/2} = \dfrac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{100}{3}\cdot\ln(0{,}5)}$

Nur $t_1 \approx 6{,}75 \in D_f$. Dies ist der gesuchte Wert t^* (s.o.). Nach knapp 7 Tagen geht die Anzahl der Bakterien auf unter 1 Mio. zurück.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
	Der Prüfling	
1	berechnet c und k.	5 (I)
2	zeigt, dass g die Gleichung erfüllt.	2 (II)
3	erklärt die Bedeutung.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet die fehlenden Werte.	3 (I)
2	vergleicht die Werte (prozentual).	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	untersucht das Verhalten an den Rändern.	3 (II)
2	berechnet die ersten zwei Ableitungen.	6 (I)
3	berechnet die Extremstelle.	3 (I)
4	bestimmt die Wendestelle(n).	6 (II)
5	beschreibt den Prozess.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt den Zeitpunkt t^*.	6 (III)
2	begründet, dass $f(t) < 1$ für $t > t^*$.	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

---
[1] AFB = Anforderungsbereich

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet *c* und …	5 (I)			
2	zeigt, dass *g* …	2 (II)			
3	erklärt die Bedeutung.	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (11): ……………………………………… ………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die fehlenden …	3 (I)			
2	vergleicht die Werte …	5 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (8): ……………………………………… ………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht das Verhalten …	3 (II)			
2	berechnet die ersten …	6 (I)			
3	berechnet die Extremstelle.	3 (I)			
4	bestimmt die Wendestelle(n).	6 (II)			
5	beschreibt den Prozess.	5 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (23): ……………………………………… ………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**23**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Zeitpunkt …	6 (III)			
2	begründet, dass $f(t) < 1$ für $t > t^*$.	2 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (8): ………………………………………… …………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.