Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

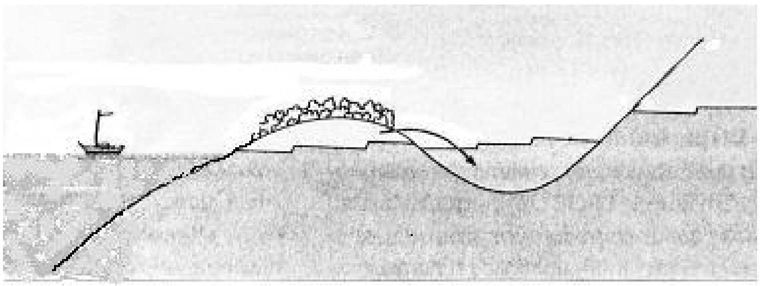

Bild 1

Japan verfügt über zu wenige ebene Flächen. Dieser Mangel ist Anlass, neue Flächen zu schaffen. Dies geschieht durch Abtragung küstennaher Berge und durch Auffüllen angrenzender Vertiefungen mit dem Abtragungsmaterial. Vor allem die Südküsten haben ein Profil, dessen Form näherungsweise dem Graphen der Funktionenschar f_t mit

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}x^3 - \frac{3}{2}x,\ t > 0,$$

entspricht. Dabei beschreibt die *x*-Achse im Koordinatensystem die Meereshöhe. Die Einheit auf der *x*-Achse ist 1 km. Die Einheit auf der *y*-Achse ist 100 m. In *Bild 2* ist der Graph einer solchen Funktion f_t zu sehen.

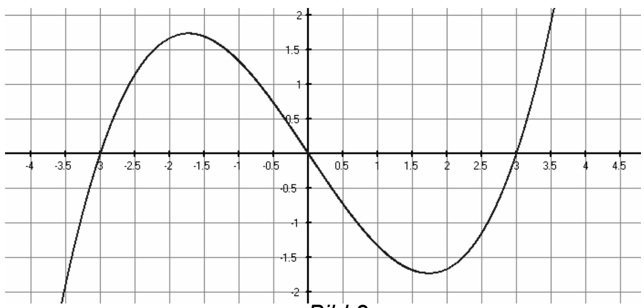

Bild 2

a) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Breite und die Höhe des Berges sowie die Breite und die Tiefe des Tales.* (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: Die Nullstellen sind $-\sqrt{3t}$, 0 und $\sqrt{3t}$.]

Vor dem Auffüllen wird das Tal mit einer Schicht aus speziellem Beton abgedeckt. Der Querschnitt dieser Schicht wird durch die Graphen der Funktionen f_{t_1} und f_{t_2} mit $t_1 < t_2$ und der *x*-Achse begrenzt (siehe *Bild 3*).

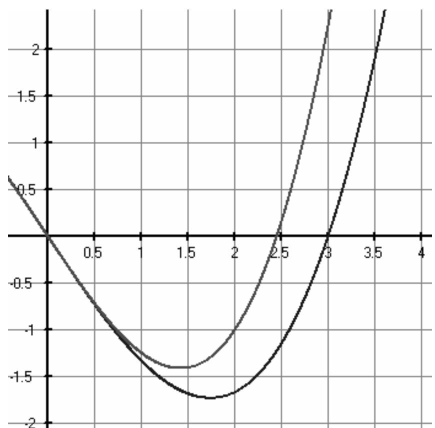

Bild 3

b) *Zeigen Sie, dass sich der Inhalt der Querschnittsfläche, die im 4. Quadranten durch die Graphen von f_{t_1} und f_{t_2} begrenzt wird, durch den Term $\frac{9}{8}(t_2 - t_1)$ beschreiben lässt.* (12 Punkte)

c) Der Graph einer weiteren Funktion f_{t_0} halbiert den Inhalt der Fläche aus b).

Ermitteln Sie das zugehörige t_0. Zeigen Sie, dass die Nullstelle $\sqrt{3t_0}$ der Funktion f_{t_0} nicht in der Mitte des Intervalls $[\sqrt{3t_1};\sqrt{3t_2}]$ liegt. (11 Punkte)

[Zur Kontrolle: $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$]

d) In der Mitte zwischen zwei benachbarten Nullstellen wird die Tangente an den Graphen von f_t gelegt.

Zeigen Sie: Diese Tangente schneidet die x-Achse an der dritten Nullstelle von f_t. (15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

1 Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, einschließlich Funktionenscharen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Breite des Berges bzw. des Tales über Abstand der Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
& f_t(x) &&= 0\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2t}x^3 - \frac{3}{2}x &&= 0\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{t}x^2 - 3\right) &&= 0\\
\Leftrightarrow\quad & x = 0 \quad \vee \quad x &&= \sqrt{3t} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3t}
\end{aligned}
$$

Nullstellen $-\sqrt{3t}$, 0 und $\sqrt{3t}$. Breite des Berges bzw. Tales: $\sqrt{3t}$ [km]

Höhe des Berges bzw. Tiefe des Tales über Extremwerte:

Anwendung des hinreichenden Kriteriums:

$$
\begin{aligned}
& f_t'(x) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3}{2t}x^2 - \frac{3}{2} = 0\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}x^2 - 1\right) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & x = \sqrt{t} \quad \vee \quad x = -\sqrt{t}
\end{aligned}
$$

$$f_t'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_t''(x) \neq 0$$

$x = \sqrt{t}$: Da $f_t'\left(\sqrt{t}\right) = 0 \quad \wedge \quad f_t''\left(\sqrt{t}\right) = \frac{3}{t}\sqrt{t} > 0$, da $t > 0$, ist bei $x = \sqrt{t}$ Minimum $T\left(\sqrt{t} \mid -\sqrt{t}\right)$

$x = -\sqrt{t}$: analog Maximum $H\left(-\sqrt{t} \mid \sqrt{t}\right)$

Die Höhe des Berges bzw. die Tiefe des Tales beträgt $\sqrt{t}\,[\cdot 100 \text{ m}]$.

Modelllösung b)

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_0^{\sqrt{3t_2}} f_{t_2}(x)\,dx - \int_0^{\sqrt{3t_1}} f_{t_1}(x)\,dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{8t_2}x^4 - \frac{3}{4}x^2 \right]_0^{\sqrt{3t_2}} - \left[\frac{1}{8t_1}x^4 - \frac{3}{4}x^2 \right]_0^{\sqrt{3t_1}} \right| \\
&= \left| \frac{9t_2^{\,2}}{8t_2} - \frac{3}{4}\cdot 3t_2 - \left(\frac{9t_1^{\,2}}{8t_1} - \frac{3}{4}\cdot 3t_1 \right) \right| \\
&= \left| \frac{9}{8}t_2 - \frac{9}{4}t_2 - \frac{9}{8}t_1 + \frac{9}{4}t_1 \right| \\
&= \left| -\frac{9}{8}t_2 + \frac{9}{8}t_1 \right| \\
&= \frac{9}{8}\cdot |t_1 - t_2| \\
&= \frac{9}{8}\cdot (t_2 - t_1)
\end{aligned}
$$

Modelllösung c)

Es soll gelten

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3t_2}} f_{t_2}(x)\,dx - \int_0^{\sqrt{3t_0}} f_{t_0}(x)\,dx &= \int_0^{\sqrt{3t_0}} f_{t_0}(x)\,dx - \int_0^{\sqrt{3t_1}} f_{t_1}(x)\,dx \\
-\frac{9}{8}t_2 + \frac{9}{8}t_0 &= -\frac{9}{8}t_0 + \frac{9}{8}t_1 \\
-t_2 + t_0 &= -t_0 + t_1 \\
2t_0 &= t_1 + t_2 \\
t_0 &= \frac{t_1 + t_2}{2}
\end{aligned}
$$

Annahme:
Die Nullstelle $\sqrt{3t_0}$ der Funktion f_{t_0} liegt in der rechten Hälfte des Intervalls $[\sqrt{3t_1};\sqrt{3t_2}]$.
Es muss also gezeigt werden: $\frac{\sqrt{3t_1}+\sqrt{3t_2}}{2} \le \sqrt{3t_0}$.

$$\frac{\sqrt{3t_1}+\sqrt{3t_2}}{2} \le \sqrt{3t_0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3t_1}+\sqrt{3t_2}}{2} \le \sqrt{3\frac{t_1+t_2}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3t_1+6\sqrt{t_1t_2}+3t_2}{4} \le \frac{3t_1+3t_2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{t_1+2\sqrt{t_1t_2}+t_2}{2} \le t_1+t_2$$
$$\Leftrightarrow 0 \le t_1-2\sqrt{t_1t_2}+t_2$$
$$\Leftrightarrow 0 \le (\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2})^2.$$

Gleichheit gilt nur für $t_1 = t_2$.

Damit ist gezeigt, dass für $t_1 < t_2$ die Nullstelle $\sqrt{3t_0}$ der Funktion f_{t_0} in der rechten Hälfte des Intervalls $[\sqrt{3t_1};\sqrt{3t_2}]$ liegt.

Modelllösung d)

Nullstellen

$x = -\sqrt{3t} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3t}$

Mitte zweier benachbarter Nullstellen z. B.:

$x = \frac{1}{2}\sqrt{3t} \qquad f\left(\frac{1}{2}\sqrt{3t}\right) = -\frac{9}{16}\sqrt{3t}$

Tangentensteigung bei $x = \frac{1}{2}\sqrt{3t}$: $f_t'\left(\frac{1}{2}\sqrt{3t}\right)$

$$f_t'\left(\frac{1}{2}\sqrt{3t}\right) = \frac{3}{2t}\cdot\frac{3}{4}t - \frac{3}{2} = -\frac{3}{8} \text{ (unabhängig von } t\text{)}$$

$$y = mx + n$$
$$-\frac{9}{16}\sqrt{3t} = -\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3t} + n$$
$$-\frac{9}{16}\sqrt{3t} + \frac{3}{16}\sqrt{3t} = n$$

Tangente: $y = -\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sqrt{3t}$

Nullstelle der Tangente: $-\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sqrt{3t} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3t}$

Die Nullstelle der Tangente ist also die dritte Nullstelle der Funktion.

[Der zweite Fall (Tangente: $y = -\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sqrt{3t}$) könnte analog gelöst werden.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die Nullstellen der Funktion f_t.	3 (I)
2	berechnet die ersten beiden Ableitungen von f_t.	3 (I)
3	ermittelt die Extrempunkte mit Hilfe der Ableitungen.	3 (II)
4	gibt die Werte für die Höhe und die Breite an.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt die Integrationsgrenzen und stellt damit die beiden entsprechenden Integrale dar.	4 (II)
2	gibt eine Stammfunktion zu f_t an.	3 (I)
3	bestimmt den Lösungsterm.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet mit Hilfe allgemeiner Parameter als Integrationsgrenze den Lösungsweg.	4 (II)
2	ermittelt den gesuchten Parameter in Abhängigkeit von den beiden anderen Parametern.	4 (II)
3	zeigt, dass die Nullstelle $\sqrt{3t_0}$ der Funktion mit dem Parameter t_0 nicht in der Mitte des Intervalls $[\sqrt{3t_1}; \sqrt{3t_2}]$ liegt.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Mitte zweier Nullstellen in Abhängigkeit von t.	3 (I)
2	ermittelt die Tangentensteigung.	3 (II)
3	bestimmt die Gleichung der Tangente.	4 (II)
4	berechnet die Nullstelle der Tangente.	3 (I)
5	begründet den geforderten Zusammenhang.	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		