Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Es soll untersucht werden, auf welchem Weg eine Kugel (Radius: 2 LE) eine schiefe Ebene *E* hinunter- und anschließend in der x_1-x_2-Ebene weiterrollt (vgl. *Bild 1*).

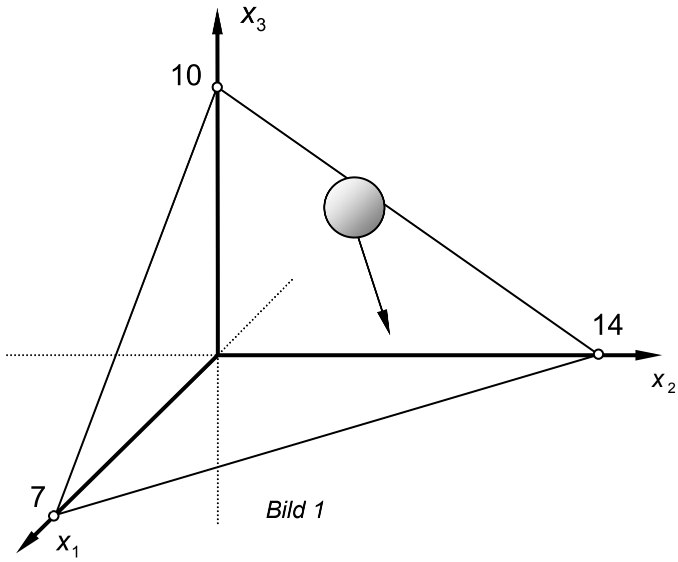

Bild 1

a) *Bestimmen Sie aus den Angaben der nebenstehenden Abbildung (Bild 1) eine Gleichung von E in Koordinatenform.* (4 Punkte)

[Zur Kontrolle: $10x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 70$]

b) *Zeigen Sie, dass die Punkte* $A(0\,|\,7\,|\,5)$, $B(1\,|\,-2\,|\,10)$, $C(2\,|\,-11\,|\,15)$ *in der Ebene E liegen, diese aber nicht eindeutig festlegen.* (8 Punkte)

c) Die Kugel wird so gehalten, dass sie die Ebene *E* im Punkt $P(1\,|\,5\,|\,5)$ berührt.

Berechnen Sie die Lage des Kugelmittelpunktes. (8 Punkte)

d) Sobald die Kugel losgelassen wird, rollt sie (auf dem kürzesten Weg) die Ebene *E* hinunter.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g in der Ebene E, auf der die Kugel zur x_1-x_2*-Ebene hinunterrollt.* (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -25 \end{pmatrix},\ r \in IR,$ ist eine Gleichung der Geraden.]

e) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Berührpunktes S der Kugel mit der x_1-x_2-Ebene und bestimmen Sie eine Gleichung der Spur (Strahl), die die rollende Kugel in der x_1-x_2-Ebene hinterlässt.*

(18 Punkte)

[Idealisiert stellen wir uns vor, dass die Kugel nicht springt.]

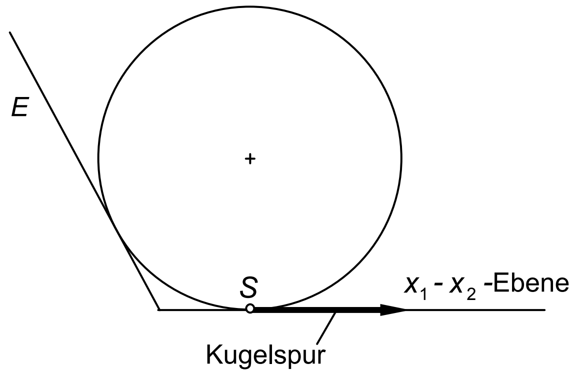

Bild 2: Kugel beim Auftreffen auf die x_1 - x_2 -Ebene

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

2 Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt-Ebene)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Standardverfahren führen auf Darstellungen der Form $\frac{x_1}{7}+\frac{x_2}{14}+\frac{x_3}{10}=1$.

Modelllösung b)

Durch Nachrechnen wird überprüft, dass die Punkte *A*, *B*, *C* die Ebenengleichung erfüllen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Die Punkte *A*, *B*, *C* liegen auf einer Geraden, d. h., die Ebene ist nicht eindeutig bestimmt.

Modelllösung c)

Der Normalenvektor der Ebene wird normiert: $\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{174}$.

M erhält man aus $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{174}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,52 \\ 5,76 \\ 6,06 \end{pmatrix}$.

Modelllösung d)

Die Richtung der größten Neigung erhält man zum Beispiel, wenn man die kürzeste Strecke zur Schnittgeraden von *E* mit der x_1-x_2-Ebene bestimmt.
Man wählt aus den Richtungsvektoren der Ebene einen Richtungsvektor $\vec{v}$ aus, der zu den Vektoren $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht steht:

$$\left| \begin{array}{l} 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ 7x_1 - 14x_2 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \text{mit } x_3 = -25 : x_1 = 14 \wedge x_2 = 7 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Die Kugel läuft also auf der Halbgeraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -25 \end{pmatrix}, r \in IR, r \geq 0$.

Modelllösung e)

Die Kugel berührt die x_1-x_2-Ebene, wenn der Kugelmittelpunkt sich 2 LE oberhalb der x_1-x_2-Ebene befindet. Es wird der Schnittpunkt der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2,52 \\ 5,76 \\ 6,06 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -25 \end{pmatrix}, r \in IR$,

auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt, mit der Parallelebene $x_3 = 2$ zur x_1-x_2-Ebene durch (0|0|2) berechnet: $(6,06 - 25r) = 2 \Rightarrow r \approx 0,162$.

Der Schnittpunkt ist (4,79|6,89|2), der Berührpunkt ist S(4,79|6,89|0).

Da die Kugel senkrecht auf die Schnittgerade von E mit der x_1-x_2-Ebene zuläuft, erfährt sie in x_1-Richtung und in x_2-Richtung keine Ablenkung. Die Kugel hinterlässt in der x_1-x_2-Ebene also die Spur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}79 \\ 6{,}89 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in IR, r \geq 0.$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	bestimmt eine Ebenengleichung.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass A, B, C Punkte der Ebene E sind.	3 (II)
2	zeigt, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Länge des Normalenvektors.	4 (I)
2	bestimmt M.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet einen Ansatz zur Berechnung des Richtungsvektors der Geraden g.	4 (III)
2	ermittelt den Richtungsvektor der Geraden g.	5 (II)
3	gibt eine Gleichung der Geraden g an.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Zusammenhang zwischen der Lage des Kugelmittelpunktes beim Aufprall auf die x_1-x_2-Ebene und dem Aufprallpunkt.	4 (III)
2	berechnet die Koordinaten des Kugelmittelpunktes beim Aufprall.	5 (I)
3	gibt die Koordinaten des Punktes S an, in dem die Kugel aufprallt.	2 (I)
4	bestimmt die weitere Rollrichtung.	5 (II)
5	gibt die Spur an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt eine Ebenengleichung.	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (4):					
	Summe Teilaufgabe a)	**4**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass *A*, *B*, *C* …	3 (II)			
2	zeigt, dass die …	5 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (8):					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Länge …	4 (I)			
2	bestimmt *M*.	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (8):					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet einen Ansatz …	4 (III)			
2	ermittelt den Richtungsvektor …	5 (II)			
3	gibt eine Gleichung …	3 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (12): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Zusammenhang …	4 (III)			
2	berechnet die Koordinaten …	5 (I)			
3	gibt die Koordinaten …	2 (I)			
4	bestimmt die weitere…	5 (II)			
5	gibt die Spur …	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (18): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

Die Klausur wird mit der Note: ____________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0