Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

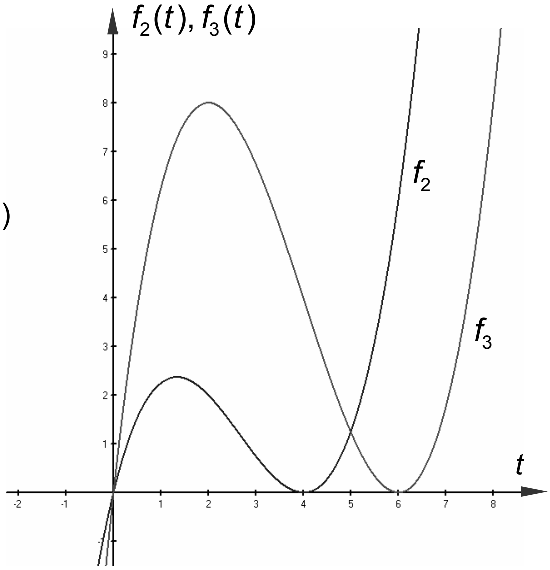
Um die Wasserstände eines Flusses vorherzusagen, kann man versuchen, die Durchflussgeschwindigkeit des Wassers an einer bestimmten Stelle des Flusses mit Hilfe geeigneter Funktionen zu beschreiben.
Solche näherungsweise Beschreibungen der Durchflussgeschwindigkeiten seien z. B. gegeben durch die Funktionenschar f_a mit $f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - at^2 + a^2t,\ a > 0$.
Dabei gibt $f_a(t)$ die Durchflussgeschwindigkeit in 10^6m^3/Monat (Millionen Kubikmeter pro Monat) und *t* die verstrichene Zeit in Monaten seit Beginn der Vorhersage $(t = 0)$ an.
Die Funktionen f_a berücksichtigen, dass es sich um einen Fluss handelt, der zeitweise austrocknet.

a) *Berechnen Sie abhängig vom Parameter a, zu welchen Zeitpunkten gerade kein Wasser durch den Fluss fließt.* (4 Punkte)

b) *Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, zu welchen Zeitpunkten die Durchflussgeschwindigkeit ein relatives Maximum bzw. Minimum annimmt, und berechnen Sie diese Funktionswerte.* (13 Punkte)

c) *Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, wann die Durchflussgeschwindigkeit besonders stark absinkt, und berechen Sie ihren Wert zu diesem Zeitpunkt.* (8 Punkte)

In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f_2 und f_3 dargestellt.



d) *Begründen Sie, warum kein Punkt der Funktionsgraphen von* f_a *im Bereich* $t \geq 0$ *unterhalb der t-Achse liegt und inwiefern dies mit dem zugrunde liegenden Sachverhalt vereinbar ist.*
Geben Sie das Verhalten von f_a *für* $t \to \infty$ *an und begründen Sie, ob die Funktionen auch nach den ersten 8 Monaten noch eine sinnvolle Beschreibung der Durchflussgeschwindigkeit liefern.* (11 Punkte)

e) *Ermitteln Sie für* $a = 3$, *wie viel Liter Wasser in den ersten sechs Monaten durch den Fluss fließen.* (7 Punkte)

f) *Betrachten Sie nun zwei verschiedene Funktionen* f_{a_1} *und* f_{a_2}. *Bestimmen Sie den Zeitpunkt* t_0, *zu dem für beide Funktionsannahmen (seit* $t = 0$ *) genau gleich viel Wasser durch den Fluss geflossen wäre.* (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

1 Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, einschließlich Funktionenscharen, in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
   - Integrationsregeln
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Gesucht sind die Nullstellen von f_a : $f_a(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}t\left(t^2 - 4at + 4a^2\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2a$

Modelllösung b)

Gesucht sind die relativen Extrempunkte.

Ableitungen: $f_a'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 2at + a^2$, $f_a''(t) = \frac{3}{2}t - 2a$

$f_a'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}t^2 - 2at + a^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{8}{3}at + \frac{4}{3}a^2 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{4}{3}a \pm \sqrt{\frac{16}{9}a^2 - \frac{4}{3}a^2} \Leftrightarrow t = 2a \vee t = \frac{2}{3}a$

$f_a''(2a) = 3a - 2a = a > 0$ nach Vor., $f_a''\left(\frac{2}{3}a\right) = a - 2a = -a < 0$ nach Vor.

Also: rel. Minimum bei $x = 2a$ (siehe Nullstelle oben!) und rel. Maximum bei $t = \frac{2}{3}a$.

Zugehörige momentane Durchflussmengen: $f_a(2a) = 0$, $f_a\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{8}{27}a^3$

Modelllösung c)

Gesucht ist ein Wendepunkt.

Hinreichende Bedingung (da Grad $f_a = 3$): $f_a''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t - 2a = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}a$.

Weiter gilt: $f_a'''(t) = \frac{3}{2}$, also auch $f_a'''\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{3}{2} > 0$, d. h. $f'\left(\frac{4}{3}a\right)$ ist lokales Minimum.

Die Durchflussgeschwindigkeit sinkt besonders stark ab bei $t = \frac{4}{3}a$, sie beträgt dort

$f_a\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3$.

Modelllösung d)

Für $t \geq 0$ ist $f_a(t) = \frac{1}{4}t(t^2 - 4at + 4a^2) = \frac{1}{4}t(t-2a)^2 \geq 0$ (sogar unabhängig von *a*). Daher treten im Bereich $t \geq 0$ keine negativen Funktionswerte bzw. Punkte der Graphen unterhalb der *t*-Achse auf.

Dies ist eine sinnvolle Beschreibung des Sachverhaltes, da das Wasser nur in einer Richtung durch den Fluss fließt und kein Wasser wieder zurück (d. h. bergauf) fließt.

Für $t \to \infty$ gilt $f_a(t) \to \infty$.

Bereits im achten Monat steigt bei den beiden Beispielfunktionen die Durchflussgeschwindigkeit stark an und später immer stärker. Darum stellen die Funktionen für spätere Monate kaum mehr eine sinnvolle Beschreibung der Durchflussgeschwindigkeit dar, zumal für $a \to 0$ und für besonders hohe Parameter *a* der Verlauf des Graphen sehr verzerrt wird

und unabhängig von der Zeitdauer extreme Durchflussgeschwindigkeiten in diesen Vorhersagen auftreten können.
Darüber hinaus könnte man vermuten, dass sich die Durchflussgeschwindigkeiten im Abstand von einem Jahr annähernd periodisch wiederholen, was durch die gegebenen Funktionen nicht berücksichtigt wird.

Modelllösung e)

Die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f_3 mit der t-Achse im Intervall [0;6] einschließt, liefert die gesuchte Wassermenge:

$$\int_0^6 f_3(t)dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t\right)dt = \left[\frac{1}{16}t^4 - t^3 + \frac{9}{2}t^2\right]_0^6 = 81 - 216 + 162 = 27\ .$$

Für a = 3 fließen in den ersten 6 Monaten 27 Mio. Liter Wasser durch den Fluss.

Modelllösung f)

Wie in der vorangegangenen Aufgabe geht es um die Flächen, die die Graphen jeweils mit der t-Achse einschließen. Gesucht ist die obere Integrationsgrenze, für die die Integrale denselben Wert liefern:

$$\int_0^{t_0} f_{a_1}(t)dt = \int_0^{t_0} f_{a_2}(t)dt \Leftrightarrow \left[\frac{1}{16}t^4 - \frac{a_1}{3}t^3 + \frac{a_1^2t^2}{2}\right]_0^{t_0} = \left[\frac{1}{16}t^4 - \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_2^2t^2}{2}\right]_0^{t_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}t_0^4 - \frac{a_1}{3}t_0^3 + \frac{a_1^2t_0^2}{2} = \frac{1}{16}t_0^4 - \frac{a_2}{3}t_0^3 + \frac{a_2^2t_0^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}t_0^3\left(a_2 - a_1\right) + \frac{1}{2}t_0^2\left(a_1^2 - a_2^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t_0 = 0 \vee t_0 = \frac{3\left(a_1^2 - a_2^2\right)}{2\left(a_1 - a_2\right)} = \frac{3}{2}\left(a_1 + a_2\right) \text{ für } t_0 \neq 0 \text{ und } a_1 \neq a_2\,.$$

Da ein Zeitpunkt nach Beginn des Zuflusses gefragt ist $(t_0 \neq 0)$, und es sich um zwei verschiedene Vorhersagen handeln soll $(a_1 \neq a_2)$, wäre nach $\frac{3}{2}\left(a_1 + a_2\right)$ Monaten bei beiden Vorhersagen gleich viel Wasser durch den Fluss geflossen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die Nullstellen.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Ableitungen.	3 (I)
2	ermittelt mit einem Kriterium, wo ein rel. Minimum bzw. rel. Maximum vorliegt.	6 (II)
3	berechnet diese Funktionswerte.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt mit einem Kriterium, wo eine Wendestelle vorliegt.	5 (II)
2	berechnet den entsprechenden Funktionswert.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet, warum für $t \geq 0$ kein Punkt der Graphen unterhalb der t-Achse liegt.	4 (II)
2	begründet, inwiefern dies mit dem zugrunde liegenden Sachverhalt vereinbar ist.	3 (III)
3	gibt den Grenzwert von f_a für $t \to \infty$ an.	2 (I)
4	begründet, dass die Funktionen nach 8 Monaten keine sinnvolle Beschreibung der Durchflussmenge mehr liefern.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Ansatz für die Berechnung der gesuchten Wassermenge.	4 (II)
2	berechnet das Integral.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt die Integralgleichung mit variabler oberer Grenze t_0 als die Bestimmungsgleichung für t_0.	3 (II)
2	bestimmt die Lösung der Gleichung.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		