Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Durch $O(0|0|0)$ und $G(4|4|4)$ ist der abgebildete Würfel mit der Kantenlänge 4 festgelegt (*Bild 1*). Eingezeichnet sind die Mittelpunkte $P(4|0|2)$, $Q(2|0|4)$, $R(0|2|4)$ und $S(4|2|0)$ von vier Würfelkanten. Alle Ecken der Figuren in *Bild 1* und *Bild 2* haben ausschließlich die Koordinaten 0, 2 oder 4.

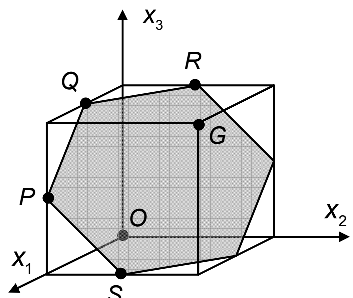

Bild 1

a) *Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PQ}$, den von den Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ eingeschlossenen Innenwinkel des Sechsecks und ermitteln Sie den Abstand der Geraden PQ vom Ursprung.* (10 Punkte)

b) Das grau gefärbte Sechseck in *Bild 1* ist die Schnittfigur des Würfels mit einer Ebene *E*.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform und berechnen Sie ihren Abstand vom Ursprung. Begründen Sie, dass dieses Sechseck regelmäßig ist. (12 Punkte)

c) *Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide, die das Sechseck als Grundfläche und den Punkt G als Spitze hat.* (10 Punkte)

In *Bild 2* ist ein zweites, zum ersten kongruentes Sechseck dargestellt, das Schnittfigur des Würfels mit einer anderen Ebene *E´* ist.

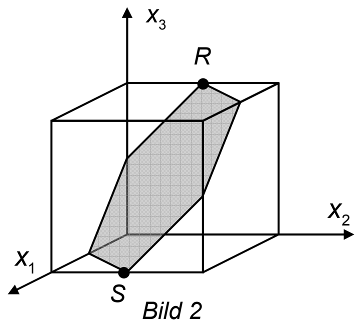

Bild 2

d) *Zeigen Sie, dass jede Ebene der Schar*

$$E_r : \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2r + 4, \; r \in IR,$$ *die Gerade RS enthält.*

Begründen Sie, dass die Sechsecke in Bild 1 und Bild 2 in je einer Ebene der Schar liegen, und bestimmen Sie die zugehörigen Werte von r.

(12 Punkte)

e) Es gibt eine Ebene *F*, die auch die Gerade *RS* enthält, aber nicht zur Schar E_r gehört.

Begründen Sie diesen Sachverhalt und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene F.

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

2 Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für n>2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Mit $P(4\,|\,0\,|\,2)$ und $Q(2\,|\,0\,|\,4)$ ist $|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + 0^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

Mit $Q(2\,|\,0\,|\,4)$ und $R(0\,|\,2\,|\,4)$ ist $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, und für den Winkel φ zwischen den Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ gilt:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| \cdot |\overrightarrow{QR}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ.$$

Wegen $|QO| = |PO|$ hat der Mittelpunkt $M(3\,|\,0\,|\,3)$ der Strecke $\overline{PQ}$ den kleinsten Abstand vom Ursprung: $|MO| = \sqrt{3^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$.

Modelllösung b)

Gleichung von E in Normalenform:

Mit $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den beiden Bedingungen $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1 - n_3 = 0$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = -n_1 + n_2 = 0$, insgesamt $n_1 = n_2 = n_3$ und schließlich mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ als Gleichung der Ebene E in Normalenform:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 6.$$

Den Abstand der Ebene E vom Ursprung liest man aus der Hesseschen Normalenform ab:

$$E: \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46.$$

Das Sechseck ist regelmäßig, z. B. weil nach Pythagoras alle Seiten die Länge $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ [LE] und zugleich alle drei Diagonalen des Sechsecks dieselbe Länge $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [LE] haben, nämlich die Länge der Seitenflächendiagonalen des Würfels.

Andere Begründungen sind denkbar.

Modelllösung c)

Das regelmäßige Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken und hat daher den Flächeninhalt $6 \cdot \left(\frac{1}{2} |PQ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} |PQ| \right) = 6 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \right) = 12\sqrt{3}$ [FE].

Die Pyramidenhöhe ist gleich dem Abstand des Punktes G von der Trägerebene E des Sechsecks: $\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{12-6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ [LE]. [Dieser ist aus Symmetriegründen gleich dem Abstand dieser Ebene E vom Ursprung aus Teilaufgabe b). Es handelt sich jeweils um die Hälfte der Würfeldiagonalen.]

Das Pyramidenvolumen ist schließlich $\frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ [VE].

Modelllösung d)

$RS: \; \vec{x} = \vec{x}_R + \tilde{t}(\vec{x}_S - \vec{x}_R) = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + \tilde{t}\left[\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix}1\\r\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = t + 2r + 4 - t = 2r + 4$ erfüllt der Geradenterm die Ebenengleichung von E_r unabhängig vom Laufparameter t. Das bedeutet, die Gerade RS liegt in jeder Scharebene.

Da beide Sechsecke die Strecke $\overline{RS}$ enthalten, legt ein weiterer Punkt außerhalb dieser Strecke die jeweilige Trägerebene des Sechsecks fest. Einsetzen (des zugehörigen Ortsvektors) in die Ebenengleichung liefert den jeweiligen Wert des Scharparameters r.

Die Scharebene $E_1: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 6$ stimmt mit der Trägerebene E (siehe Teilaufgabe b)) des Sechsecks in *Bild 1* überein, deren Gleichung unter Verwendung des Punktes $P(4\,|\,0\,|\,2)$ bestimmt wurde; also $r_1 = 1$.

Ein Punkt des zweiten Sechsecks ist $T(2\,|\,0\,|\,0)$. Einsetzen des zugehörigen Ortsvektors $\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ in die Gleichung von E_r ergibt: $\begin{pmatrix}1\\r_2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2r_2 + 4 \;\Rightarrow\; 2 = 2r_2 + 4 \;\Rightarrow\; r_2 = -1$.

Modelllösung e)

Zum Beispiel der Punkt $R_2(0\,|\,2\,|\,0)$ gehört zu keiner der Ebenen E_r, denn aus $\begin{pmatrix}1\\r\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=2r+4$ folgt $2r=2r+4$ und $0=4$. Er legt daher zusammen mit der Geraden RS eine Ebene F fest, die nicht zur Ebenenschar gehört.

Bei dieser Ebene F handelt es sich um die Parallelebene zur x_1-x_3-Ebene durch den Punkt $R_2(0\,|\,2\,|\,0)$. $F:\ x_2=2$ bzw. $F:\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=2$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.	2 (I)
2	berechnet den von den Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ eingeschlossenen Innenwinkel.	4 (I)
3	ermittelt den Abstand der Geraden PQ vom Ursprung.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.	5 (II)
2	berechnet den Abstand der Ebene E vom Ursprung.	3 (I)
3	begründet, dass das Sechseck regelmäßig ist.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks.	5 (II)
2	berechnet die Höhe der Pyramide.	3 (I)
3	berechnet das Pyramidenvolumen.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt eine Gleichung der Geraden *RS*.	3 (II)
2	zeigt, dass die Gerade *RS* in jeder Scharebene E_r liegt.	3 (II)
3	begründet, dass ein einziger weiterer Punkt pro Sechseck über dessen Zugehörigkeit zu einer Scharebene entscheidet.	2 (II)
4	bestimmt die Werte des Scharparameters *r*.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet den Sachverhalt.	3 (III)
2	bestimmt eine Gleichung von *F*.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Länge …	2 (I)			
2	berechnet den von …	4 (I)			
3	ermittelt den Abstand …	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (10): ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt eine Gleichung …	5 (II)			
2	berechnet den Abstand …	3 (I)			
3	begründet, dass das …	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (12): ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Flächeninhalt …	5 (II)			
2	berechnet die Höhe …	3 (I)			
3	berechnet das Pyramidenvolumen.	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (10): ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt eine Gleichung …	3 (II)			
2	zeigt, dass die …	3 (II)			
3	begründet, dass ein …	2 (II)			
4	bestimmt die Werte …	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (12): …………………………………………… ……………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	begründet den Sachverhalt.	3 (III)			
2	bestimmt eine Gleichung …	3 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (6): …………………………………………… ……………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**6**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

Die Klausur wird mit der Note: ____________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0