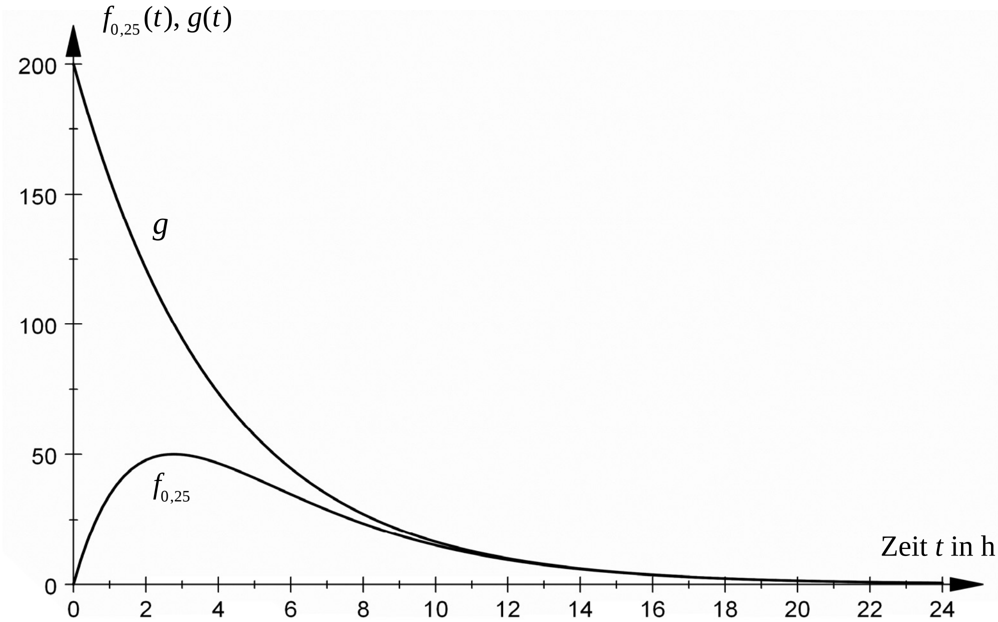
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(t) = 200 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$, $a > 0$, $t \geq 0$, und die Funktion g mit $g(t) = 200 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$, $t \geq 0$.
Die Graphen von $f_{0,25}$ und von g sind in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) *Geben Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $t \to \infty$ an und untersuchen Sie ihr Monotonieverhalten.*

Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a an der Stelle $t = \frac{\ln 2}{a}$ ihr absolutes Maximum annehmen.

Alle Hochpunkte der Funktionen f_a liegen auf einer Geraden.

Geben Sie die besondere Lage dieser Geraden an. (12 Punkte)

Name: ____________________

b) *Berechnen Sie den Term einer Stammfunktion F_a der Funktion f_a. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die begrenzt wird durch den Graphen von f_a, die Koordinatenachsen und durch eine Senkrechte zur t-Achse an der Stelle $t_1 > 0$. Prüfen Sie auch, ob sich für $t_1 \to \infty$ ein endlicher Flächeninhalt ergibt.* (9 Punkte)

[Zur Kontrolle: $F_a(t) = \frac{200}{a} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{-2a \cdot t} - e^{-a \cdot t} \right)$]

c) Für $t > 12$ ist in der obenstehenden Abbildung nicht mehr zu erkennen, ob der Graph der Funktion $f_{0,25}$ ober- oder unterhalb des Graphen von g verläuft.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion $f_{0,25}$ immer unterhalb des Graphen von g verläuft und dass sich die beiden Funktionsgraphen für wachsendes t immer stärker annähern. Berechnen Sie, an welcher Stelle t_2 die Punkte $(t_2 \mid f_{0,25}(t_2))$ und $(t_2 \mid g(t_2))$ der beiden Graphen den Abstand 0,01 LE haben. (8 Punkte)

Funktionen wie g und f_a werden zur Modellierung des sogenannten Mutter-Tochter-Zerfalls verwendet. Als Mutter-Tochter-Zerfall bezeichnet man den Zerfall eines radioaktiven Mutterstoffs in einen Tochterstoff, der ebenfalls zerfällt, weil auch er radioaktiv ist.
Im Folgenden soll $\mathbf{a = 0,25}$ sein.

d) Für $t \geq 0$ wird die Masse des Mutterstoffs durch $g(t)$ beschrieben und die Masse des Tochterstoffs durch $f_{0,25}(t)$. Dabei wird die Zeit t in Stunden ab Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ und $f_{0,25}(t)$ bzw. $g(t)$ in Milligramm angegeben.

Interpretieren Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus a) den Verlauf des Graphen von $f_{0,25}$ in diesem Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Masse des Tochterstoffs am stärksten abnimmt. (13 Punkte)

Name: ____________________

e) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die mittlere Masse $m(k)$ des Tochterstoffs während der ersten k Stunden nach Beobachtungsbeginn.*

Berechnen Sie die mittlere Masse des Tochterstoffs während der ersten 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn. (8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Verhalten der Funktionen f_a für $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty}(200 \cdot e^{-a\cdot t} \cdot (1-e^{-a\cdot t})) = \lim_{t\to\infty}(200 \cdot e^{-a\cdot t} - 200 \cdot e^{-2a\cdot t}) = 0$$

$f_a'(t) = -200 \cdot a \cdot e^{-a\cdot t} + 400 \cdot a \cdot e^{-2a\cdot t}$ (Summen-, Kettenregel oder Produkt-, Kettenregel)

Aus $f_a'(t) > 0$ folgt: $a \cdot e^{-a\cdot t}(-200 + 400 \cdot e^{-a\cdot t}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{\ln 2}{a}$,

d. h., f_a ist streng monoton steigend für t < $\frac{\ln 2}{a}$.

Entsprechend gilt $f_a'(t) < 0$ für $t > \frac{\ln 2}{a}$, d. h., f_a ist streng monoton fallend für $t > \frac{\ln 2}{a}$.

$f_a'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{-a\cdot t}(-200 + 400 \cdot e^{-a\cdot t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{a}$ und VZW (+/–) von f_a' an der

Stelle $t = \frac{\ln 2}{a}$ (oder: $f_a''(\frac{\ln 2}{a}) < 0$) $\Rightarrow$

An der Stelle $t = \frac{\ln 2}{a}$ besitzt f_a das relative Maximum $f_a(\frac{\ln 2}{a}) = 50$.

Aus dem Monotonieverhalten folgt, dass $f_a(\frac{\ln 2}{a}) = 50$ absolutes Maximum der Funktion f_a ist.

Da der Funktionswert der Funktionen f_a an der Stelle $t = \frac{\ln 2}{a}$ unabhängig von a ist, liegen alle Hochpunkte der Schar auf einer Parallelen zur t-Achse im Abstand 50.

Modelllösung b)

Durch Integration erhält man eine mögliche Stammfunktion F_a:

$$\int f_a(t)dt = 200 \cdot \int (e^{-a\cdot t} - e^{-2a\cdot t})dt = \frac{200}{a} \cdot (\frac{1}{2}e^{-2a\cdot t} - e^{-a\cdot t}) = F_a(t)$$

Die Maßzahl des Flächeninhalts ist:

$$A(t_1) = \int_0^{t_1} f_a(t)dt = F_a(t_1) - F_a(0) = \frac{200}{a} \cdot (\frac{1}{2}e^{-2a\cdot t_1} - e^{-a\cdot t_1} + \frac{1}{2})$$

Da die ersten beiden Summanden in der Klammer für $t_1 \to \infty$ den Grenzwert Null haben,

ergibt sich für $t_1 \to \infty$ als endliche Maßzahl für den Flächeninhalt: $A = \lim_{t_1\to\infty} A(t_1) = \frac{100}{a}$.

Modelllösung c)

Die Gleichung der Differenzfunktion d der Funktionswerte von g und $f_{0,25}$ lautet:

$$d(t) = g(t) - f_{0,25}(t) = 200 \cdot e^{-0,25 \cdot t} - 200 \cdot e^{-0,25 \cdot t} \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t}) = 200 \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

Da die Funktion d nur positive Werte annimmt, ist für alle t der Funktionswert von g an der Stelle t stets größer als der Funktionswert von $f_{0,25}$. Deshalb verläuft der Graph von g oberhalb des Graphen von $f_{0,25}$.

Da d streng monoton fallend ist, nähern sich die Graphen immer stärker an.

Aus dem Ansatz $200 \cdot e^{-\frac{1}{2}t_2} = 0,01$ erhält man $t_2 = 2 \cdot \ln 20000 \approx 19,8$.

Modelllösung d)

Der Graph von $f_{0,25}$ beginnt im Ursprung, d. h., zum Zeitpunkt t = 0 ist noch keine Masse des Tochterstoffs registriert.

Der Graph steigt zunächst wegen der anfänglich hohen „Massenlieferungsrate" des Mutterstoffes streng monoton an. An der Stelle $t = 4\ln 2$ erreicht die Masse des Tochterstoffs ihren Maximalwert. Anschließend nimmt sie wieder ab, weil der eigene Zerfall die „Nachlieferung" durch den Mutterstoff übertrifft. Für große *t* strebt die Masse gegen Null.

Gesucht ist die Stelle, an der die Änderungsrate $f'_{0,25}$ der Masse des Tochterstoffs ein Minimum besitzt.

$$f''_{0,25}(t) = \frac{25}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}t} - 50 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{25}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}t}(1 - 4 \cdot e^{-\frac{1}{4}t})$$

$$f''_{0,25}(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4 \cdot e^{-\frac{1}{4}t} = 0 \Leftrightarrow t = 8 \cdot \ln 2$$

$f''_{0,25}(t) < 0$ für $0 \le t < 8 \cdot \ln 2$ und $f''_{0,25}(t) > 0$ für $t > 8 \cdot \ln 2$; d. h., VZW (–/+) der 2. Ableitung $f''_{0,25}$ an der Stelle $t = 8 \cdot \ln 2$ (oder $f'''_{0,25}(8 \cdot \ln 2) = -\frac{25}{8} \cdot e^{-2\ln 2} + \frac{50}{2} \cdot e^{-4\ln 2} = \frac{25}{32} > 0$).

Außerdem gilt: $f'_{0,25}(8 \cdot \ln 2) = -\frac{25}{4} < 0$, d. h., an der Stelle $t = 8 \cdot \ln 2$ ist die Änderungsrate f'_a der Masse des Tochterstoffs negativ und sie besitzt dort ein Minimum.

Die Masse des Tochterstoffs nimmt zum Zeitpunkt $t = 8 \cdot \ln 2$ am stärksten ab.

Modelllösung e)

$$F_a(t) = \frac{200}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}e^{-2a\cdot t} - e^{-a\cdot t}\right) \quad \rightarrow \quad F_{0,25}(t) = 800 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-0,5\cdot t} - e^{-0,25\cdot t}\right)$$

Die mittlere Masse in den ersten k Stunden lässt sich ermitteln über:

$$m(k) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^k f_{0,25}(t)dt = \frac{1}{k} \cdot \left[F_{0,25}(t)\right]_0^k = \frac{1}{k} \cdot (F_{0,25}(k) - F_{0,25}(0)) = \frac{800}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}e^{-0,5\cdot k} - e^{-0,25\cdot k} + \frac{1}{2}\right)$$

$$m(12) = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f_{0,25}(t)dt = \frac{1}{12} \cdot \left[F_{0,25}(t)\right]_0^{12} = \frac{1}{12} \cdot (F_{0,25}(12) - F_{0,25}(0)) = \frac{200}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}e^{-6} - e^{-3} + \frac{1}{2}\right) \approx 30,097 \cdot$$

Damit erhält man in den ersten 12 Stunden eine mittlere Masse von ca. 30,097 mg.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt das Verhalten der Funktionen f_a für $t \rightarrow \infty$ an.	2 (I)
2	berechnet die 1. Ableitung von f_a.	2 (I)
3	untersucht das Monotonieverhalten der Funktion f_a.	3 (II)
4	zeigt, dass die Funktionen f_a an der Stelle $t = \ln 2 / a$ ihr absolutes Maximum annehmen.	3 (II)
5	gibt die Lage der Geraden an, auf der alle Hochpunkte liegen.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Term einer Stammfunktion F_a der Funktion f_a.	4 (I)
2	ermittelt die Maßzahl des beschriebenen Flächeninhalts mit Hilfe des Hauptsatzes.	3 (II)
3	prüft, ob sich ein endlicher Flächeninhalt ergibt.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass der Graph der Funktion $f_{0,25}$ immer unterhalb des Graphen von g verläuft.	4 (II)
2	zeigt, dass sich die beiden Funktionsgraphen für wachsendes t immer stärker annähern.	2 (II)
3	berechnet die Stelle t_2 .	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	interpretiert den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang.	3 (III)
2	berechnet die 2. Ableitung von $f_{0,25}$.	3 (I)
3	zeigt, dass $f'_{0,25}$ an der Stelle $t = 8{\cdot}\ln 2$ ein Minimum besitzt.	3 (II)
4	stellt den Zusammenhang zwischen Massenabnahme und Änderungsrate dar und begründet, dass die Masse an der Stelle $t = 8{\cdot}\ln 2$ am stärksten abnimmt.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maxi-mal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Ansatz für die mittlere Masse des Tochterstoffs m(k).	3 (III)
2	bestimmt m(k) mit Hilfe des Hauptsatzes.	3 (II)
3	berechnet die mittlere Masse für k = 12.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		