Name: ____________________

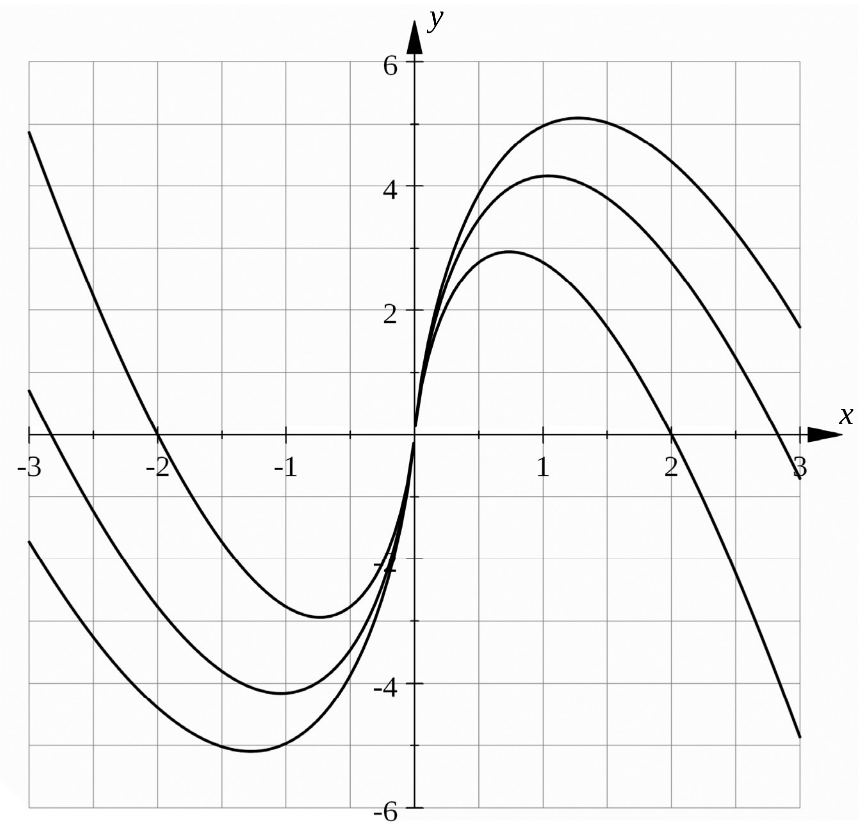
Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die Funktionen f_a sind gegeben durch $f_a(x) = -2x \cdot \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right),\ a > 0$.

In der nachfolgenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und f_3 dargestellt.



a) *Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an und untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_a auf Symmetrie.*

Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_a und berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f_a. (12 Punkte)

Name: ____________________

b) *Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a auf relative Extrempunkte und auf Wendepunkte.*
Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion h, auf deren Graph alle Extrempunkte der Funktionen f_a liegen. (10 Punkte)

[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = -2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4a} x^2\right) - 4$]

c) *Weisen Sie durch partielle Integration nach, dass die Funktion F_a mit*
$F_a(x) = x^2 - x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4a} x^2\right)$ *eine mögliche Stammfunktion von f_a ist.* (6 Punkte)

Im Folgenden wird die Funktion f_1 mit $f_1(x) = -2x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{4}\right)$ betrachtet.

d) Der Graph der Funktion f_1, der Graph der Funktion *h* mit $h(x) = 4x$ und die *x*-Achse schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt A_1 des eingeschlossenen Flächenstücks. (9 Punkte)

e) Die Tangente *t* an den Graphen von f_1 im Punkt $P\left(x_0 \mid f_1(x_0)\right)$, $0 < x_0 \leq 2$, schneidet die *y*-Achse im Punkt $Q\left(0 \mid 4x_0\right)$. Der Punkt P, der Punkt Q und der Punkt $R\left(x_0 \mid 0\right)$ bilden die Eckpunkte eines Dreiecks.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm $A(x_0)$, der für $0 < x_0 \leq 2$ den Flächeninhalt der Dreiecksfläche beschreibt. Ermitteln Sie den Wert von x_0, für den $A(x_0)$ maximal wird. (13 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Maximaler Definitionsbereich der Funktionen f_a: $D_{f_a} = /R^{\neq 0}$

Symmetrieverhalten der Graphen der Funktionen f_a:

Da gilt $f_a(-x) = -2(-x)\cdot\ln(\frac{1}{4a}(-x)^2) = +2x\cdot\ln(\frac{1}{4a}x^2) = -f_a(x)$ für alle $x \in D_{f_a}$, sind die Funktionen f_a ungerade und damit ist der Graph der Funktionen f_a punktsymmetrisch zum Ursprung.

Für $a > 0$ bestimmt man die Nullstellen über:

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow\ -2x\cdot\ln(\frac{1}{4a}x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee \ln(\frac{1}{4a}x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -2\sqrt{a} \vee x = +2\sqrt{a}$$

Da die Stelle Null nicht im Definitionsbereich der Funktionen f_a liegt, sind die Nullstellen $x_1 = -2\sqrt{a}$ und $x_2 = +2\sqrt{a}$.

Als erste und zweite Ableitung der Funktionen f_a erhält man:

$$f_a'(x) = -2\cdot\ln(\frac{1}{4a}x^2) - 2x\cdot\frac{4a}{4a\cdot x^2}\cdot 2x = -2\cdot\ln(\frac{1}{4a}x^2) - 4$$
$$f_a''(x) = -\frac{4}{x}$$

Modelllösung b)

Untersuchung auf Extrempunkte:

$$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\cdot\ln(\frac{1}{4a}x^2) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{1}{4a}x^2) = -2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a}x^2 = e^{-2} \qquad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{e}\cdot\sqrt{a} \vee x = +\frac{2}{e}\cdot\sqrt{a}$$

An der Stelle $x_1 = -\frac{2}{e}\cdot\sqrt{a}$ nehmen alle Funktionen f_a ein relatives Minimum an, da

$f_a''(x_1) = \frac{2e}{\sqrt{a}} > 0$ für $a > 0$ ist.

Für die Lage des Tiefpunktes erhält man:

$$f_a(x_1) = \frac{4}{e}\cdot\sqrt{a}\cdot\ln(e^{-2}) = -\frac{8}{e}\cdot\sqrt{a} \Rightarrow \text{ Tiefpunkt } T(-\frac{2}{e}\cdot\sqrt{a} \mid -\frac{8}{e}\cdot\sqrt{a})$$

Mit Hilfe der Punktsymmetrie der Graphen von f_a zum Ursprung erhält man für die Lage des Hochpunkts H: $H(\frac{2}{e} \cdot \sqrt{a} \mid \frac{8}{e} \cdot \sqrt{a})$

Untersuchung auf Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{x} = 0$. Die Gleichung ist unlösbar. Daher existieren keine Wendepunkte.

Gleichung der Funktion *h*, auf deren Graph alle Extrempunkte der Funktionen f_a liegen:

Durch Vergleich der x- und y-Koordinaten der Hochpunkte und Tiefpunkte der Funktionen f_a erhält man: $h(x) = 4 \cdot x$

Modelllösung c)

Das unbestimmte Integral $\int -2x \cdot \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right)dx$ wird durch partielle Integration bestimmt:

$$u(x) = \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right) \Rightarrow u'(x) = \frac{4a}{x^2} \cdot \frac{2x}{4a} = \frac{2}{x} \qquad v'(x) = -2x \Rightarrow v(x) = -x^2$$

$$\int -2x \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right)dx = -x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}x^2\right) - \int (-x^2 \cdot \frac{2}{x})dx = -x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right) + x^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F_a(x) = x^2 - x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right)$$

Modelllösung d)

Die Flächenmaßzahl A_1 wird ermittelt über:

$$A_1 = \int_0^{\frac{2}{e}} 4x dx + \int_{\frac{2}{e}}^{2} -2x \cdot \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right)dx = [2x^2]_0^{\frac{2}{e}} + [x^2 - x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4a}x^2\right)]_{\frac{2}{e}}^{2}$$

$$= \frac{8}{e^2} + 4 - \frac{4}{e^2} - \frac{8}{e^2} = 4 - \frac{4}{e^2} \approx 3,459.$$

Modelllösung e)

Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks PQR:

Die Längenmaßzahl der Dreieckseite $\overline{PR}$ ist $f_1(x_0)$. Die Maßzahl der dazugehörigen Höhe h ist x_0. Damit erhält man für den Funktionsterm:

$$A(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot f_1(x_0) = -x_0^{\,2} \cdot \ln\left(\frac{x_0^{\,2}}{4}\right),\ \ 0 < x_0 \le 2.$$

Bestimmung des Maximums:

$$A'(x_0) = -2x_0 \cdot \ln\left(\frac{x_0^{\,2}}{4}\right) - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow -2x_0 \cdot \left(\ln\left(\frac{x_0^{\,2}}{4}\right) + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \ \vee\ \frac{x_0^{\,2}}{4} = \frac{1}{e}$$

$\Leftrightarrow x_0 = 0 \ \vee\ x_0 = -\frac{2}{\sqrt{e}} \ \vee\ x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$. Nur $x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ liegt im Intervall $0 < x_0 \le 2$.

Mit $A''(x_0) = -2\ln\left(\frac{1}{4}x_0^{\,2}\right) - 6$ erhält man $A''(x_0) = A''\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = -4 < 0$.

An der Stelle $x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ besitzt die Funktion A das relative Maximum

$$A(x_0) = A\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = \frac{4}{e} \approx 1{,}472.$$

Aus $A(2) = 0 < A(x_0)$ und $\lim\limits_{x_0 \to 0} A(x_0) = \lim\limits_{x_0 \to 0}\left[-x_0^{\,2} \cdot \ln\left(\frac{1}{4}x_0^{\,2}\right)\right] = 0$ folgt, dass $A(x_0) = \frac{4}{e}$ ein absolutes Maximum ist. Für $x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ hat das Dreieck PQR den maximalen Flächeninhalt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt den Definitionsbereich der Funktionen f_a an.	2 (I)
2	untersucht die Graphen der Funktionen f_a auf Symmetrie.	2 (II)
3	ermittelt die Nullstellen der Funktionen f_a.	4 (II)
4	berechnet die erste und zweite Ableitung von f_a	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt mit Hilfe eines geeigneten Kriteriums die Extremstellen der Funktionen f_a.	5 (II)
2	berechnet die y-Koordinaten des Hoch- und Tiefpunktes in Abhängigkeit von a.	2 (I)
3	ermittelt die Gleichung der Funktion h.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	weist durch partielle Integration nach, dass F_a eine mögliche Stammfunktion von f_a ist.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhalts A_1.	5 (II)
2	berechnet den Flächeninhalt A_1.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Funktionsterm $A(x_0)$.	5 (III)
2	berechnet die erste und zweite Ableitung der Funktion *A*.	4 (I)
3	zeigt, dass *A* nur an der Stelle $x_0 = 2/\sqrt{e}$ relative Maximalstelle hat.	2 (II)
4	zeigt, dass die relative Maximalstelle die absolute Maximalstelle im Intervall $0 < x_0 \leq 2$ ist.	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		