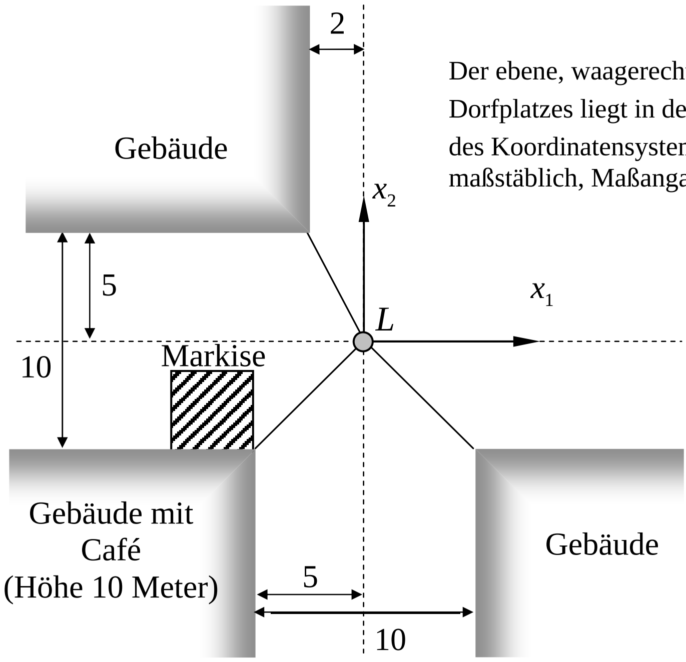
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Der Dorfplatz eines italienischen Dorfes ist ein attraktives Ausflugsziel. Der Platz wird von drei quaderförmigen Gebäuden begrenzt, an denen sich die folgenden Gebäudeecken befinden: $P_1(-2|5|10)$, $P_2(-5|-5|10)$, $P_3(5|-5|10)$. In einem dieser Gebäude befindet sich ein Café. Der Dorfplatz wird durch eine Straßenlampe L beleuchtet.



Der ebene, waagerechte Boden des Dorfplatzes liegt in der x_1-x_2-Ebene des Koordinatensystems (Skizze nicht maßstäblich, Maßangaben in Metern).

Abbildung 1

a) Im Sommer scheint die Sonne auf den Platz. Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dadurch wirft das Gebäude mit dem Café einen Schattenstreifen auf den Boden.

Bestimmen Sie die Breite dieses Schattenstreifens. (7 Punkte)

Name: ____________________

b) Vor dem Café ist eine rechteckige Markise in zwei Punkten M_1 und M_2 gleicher Höhe an der Gebäudefassade angebracht. Die vier Eckpunkte dieser Markise sind M_1, $M_2(-5\,|-5\,|\,3)$, M_3 und $M_4(-9\,|-1\,|\,2{,}5)$. Ein Besucher sitzt unter der Markise. Seine Augenposition wird durch den Punkt $B(-8\,|-3\,|\,1)$ beschrieben.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte M_1 und M_3 an und bestimmen Sie eine Gleichung der Trägerebene E des Rechtecks $M_1M_2M_3M_4$ in Koordinatenform.
Untersuchen Sie, ob der Besucher den Punkt $L(0\,|\,0\,|\,5)$ der Lampe von seiner Position B aus sehen kann oder ob die Markise seinen Blick behindert. (18 Punkte)

[Zur Kontrolle: $E: x_2 + 8x_3 = 19$]

Die Straßenlampe wird im Punkt $L(0\,|\,0\,|\,5)$ von drei Seilen gehalten, die in den Punkten $H_1(-2\,|\,5\,|\,6)$, $H_2(-5\,|-5\,|\,6)$ und $H_3(5\,|-5\,|\,6)$ an den Gebäudekanten verankert sind.

c) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes L von der Geraden durch die Punkte H_1 und H_2.* (11 Punkte)

d) Der Lichtkegel der Lampe erzeugt auf dem Dorfplatz einen Lichtkreis. Der Öffnungswinkel des Lichtkegels beträgt $\alpha = 90°$. Für die Lampe soll eine neue Position im Punkt K gefunden werden, so dass die Punkte $U_1(-2\,|\,5\,|\,0)$, $U_2(-5\,|-5\,|\,0)$ und $U_3(5\,|-5\,|\,0)$, also die unteren Ecken der Gebäude, auf dem Rand des erzeugten Lichtkreises liegen (siehe *Abbildung 2*).

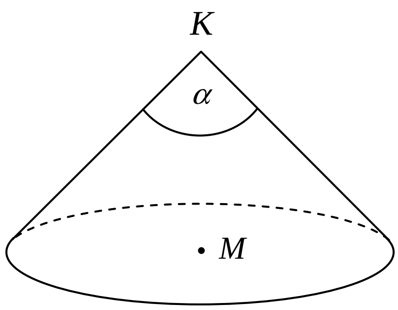


Abbildung 2

Bestimmen Sie den Mittelpunkt M des Lichtkreises.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K. (14 Punkte)

[Zur Kontrolle: $M\left(0\,|-1{,}05\,|\,0\right)$]

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt-Ebene)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Eine Gerade durch z. B. den Punkt $P_2(-5\,|\,-5\,|\,10)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ trifft

wegen $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei $x_2 = 0$, d. h. 5 Meter vor dem Café, den Boden $(x_3 = 0)$.

Der Schattenstreifen ist also 5 m breit.

[Es darf auch elementargeometrisch argumentiert werden.]

Modelllösung b)

Die gesuchten Eckpunkte des Rechtecks $M_1M_2M_3M_4$ sind $M_1(-9\,|\,-5\,|\,3)$ und

$M_3(-5\,|\,-1\,|\,2{,}5)$. Orthogonal zu den Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_2M_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ ist der

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Eine Gleichung der Trägerebene E des Rechtecks $M_1M_2M_3M_4$

ist daher $E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 19$ bzw. $E: x_2 + 8x_3 = 19$.

Zu berechnen ist der Schnittpunkt S der Geraden $BL: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, mit der

Ebene E. Durch Einsetzen erhält man $1 \cdot (-3 - 3s) + 8 \cdot (1 - 4s) - 19 = 0 \Leftrightarrow s = -0{,}4$ und

damit $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}8 \\ -1{,}8 \\ 2{,}6 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt ist $S(-4{,}8\,|\,-1{,}8\,|\,2{,}6)$.

Wegen (z. B.) $-4{,}8 \notin [-5; -9]$ liegt S außerhalb des Rechtecks $M_1M_2M_3M_4$. Die Markise behindert also nicht den Blick des Betrachters auf die Lampe L.

Modelllösung c)

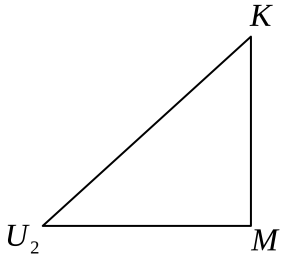
Die Hilfsebene E_H senkrecht zur Geraden H_1H_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$, durch den Punkt $L(0\,|\,0\,|\,5)$ hat die Gleichung $E_H: \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$. Der Schnittpunkt von E_H mit der Geraden H_1H_2 ist der Fußpunkt F des Lotes von L auf H_1H_2. Durch Einsetzen erhält man:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r_F \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow -6 + 9r_F + 50 + 100r_F = 0 \Leftrightarrow r_F = -\frac{44}{109}$. Damit ist der Lotfußpunkt $F\left(-2 - \frac{44}{109} \cdot 3 \middle| 5 - \frac{44}{109} \cdot 10 \middle| 6\right) = F\left(-\frac{350}{109} \middle| \frac{105}{109} \middle| 6\right)$. Der Abstand der Punkte $L(0\,|\,0\,|\,5)$ und F ist damit $|LF| = \sqrt{\left(\frac{350}{109}\right)^2 + \left(\frac{105}{109}\right)^2 + 1^2} \approx 3{,}50$ [m].

Modelllösung d)

Die gesuchten Punkte M und K liegen beide in der Ebene $E_M: x_1 = 0$, der Mittelebene der Strecke $\overline{U_1U_2}$, deren Punkte von $U_2(-5\,|\,-5\,|\,0)$ und $U_3(5\,|\,-5\,|\,0)$ alle gleich weit entfernt sind.
Für den Mittelpunkt M des Lichtkreises gilt daher $M = M(0\,|\,x_2\,|\,0)$. Die Koordinate x_2 lässt sich aus der Bedingung $|U_1M| = |U_2M|$ berechnen:

$$\sqrt{2^2 + (x_2 - 5)^2} = \sqrt{5^2 + (x_2 + 5)^2}$$
$$\Leftrightarrow 4 + x_2^2 - 10x_2 + 25 = 25 + x_2^2 + 10x_2 + 25$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -1{,}05.$$



Der Mittelpunkt des Lichtkreises ist $M(0\,|\,-1{,}05\,|\,0)$.

Für die Koordinate x_3 des Punktes $K(0\,|\,-1{,}05\,|\,x_3)$ gilt:
Das Dreieck U_2MK ist rechtwinklig und gleichschenklig, also ist $|U_2M| = |MK|$ (= x_3-Koordinate von K).

Berechnung von $|U_2M|$: $\sqrt{5^2 + (5 - 1{,}05)^2} \approx 6{,}372$.

K hat die ungefähren Koordinaten $(0\,|\,-1{,}05\,|\,6{,}372)$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (II)
2	berechnet einen geeigneten Schattenpunkt am Boden und gibt die Breite des Schattenstreifens an.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	gibt die Koordinaten der Punkte M_1 und M_3 an.	2 (I)
2	bestimmt eine Gleichung von E in Koordinatenform.	6 (II)
3	ermittelt einen Lösungsansatz (Untersuchung).	3 (II)
4	berechnet den Schnittpunkt der Geraden BL mit der Ebene E.	5 (I)
5	entscheidet, ob der Besucher die Lampe sehen kann.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung des Fußpunkts F des Lotes von L auf die Gerade P_1P_2.	4 (II)
2	bestimmt den Fußpunkt F des Lotes von L auf die Gerade P_1P_2.	5 (II)
3	berechnet den Abstand der Punkte L und F.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen Lösungsansatz zur Bestimmung von M.	5 (III)
2	bestimmt M.	4 (II)
3	ermittelt einen Lösungsansatz zur Bestimmung von K.	3 (II)
4	bestimmt K.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (II)			
2	berechnet einen geeigneten …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die Koordinaten …	2 (I)			
2	bestimmt eine Gleichung …	6 (II)			
3	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (II)			
4	berechnet den Schnittpunkt …	5 (I)			
5	entscheidet, ob der …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	4 (II)			
2	bestimmt den Fußpunkt …	5 (II)			
3	berechnet den Abstand …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz …	5 (III)			
2	bestimmt M.	4 (II)			
3	ermittelt einen Lösungsansatz …	3 (II)			
4	bestimmt K.	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0