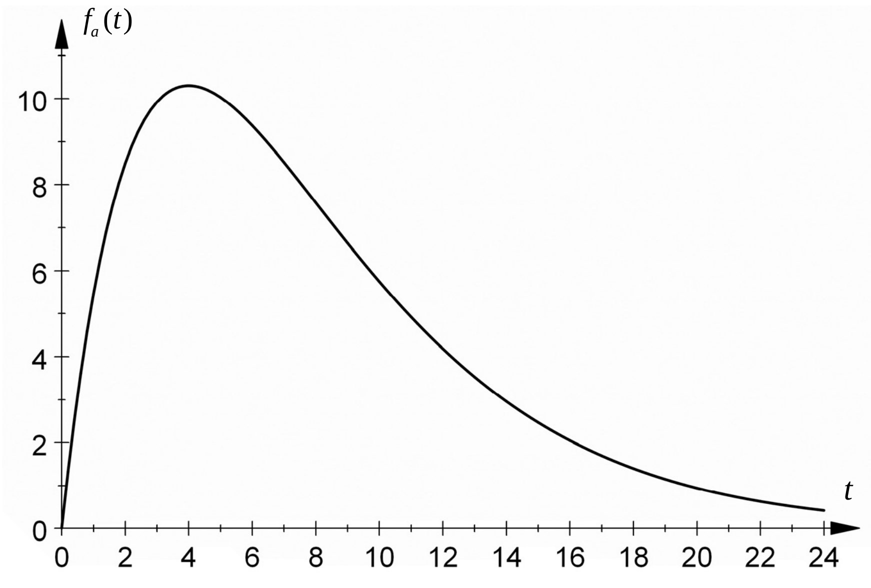
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Ein Pharmaunternehmen produziert ein Medikament in unterschiedlichen Wirkstoffdosierungen, das in Tablettenform verabreicht wird. Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut eines Patienten kann in den ersten 24 Stunden nach Einnahme einer Tablette näherungsweise durch die Funktionenschar $f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0.25 \cdot t}$, $t \in [0;24]$, $a > 0$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden seit der Einnahme und die Wirkstoffkonzentration $f_a(t)$ im Blut in Milligramm pro Liter (mg/l) gemessen; die Höhe der Wirkstoffdosierung wird durch den Parameter a berücksichtigt.



a) Die obenstehende Abbildung zeigt einen zeitlichen Verlauf, bei dem die Wirkstoffkonzentration im Blut des Patienten vier Stunden nach der Einnahme den Wert von 10,3 mg/l erreicht.

Berechnen Sie den Parameter a der Funktion f_a, die diesen zeitlichen Verlauf modelliert, und die Höhe der Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 24$. (5 Punkte)

Name: ____________________

b) *Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a und zeigen Sie, dass die Funktion f_a unabhängig vom Parameter a an der Stelle $t = 4$ ein absolutes Maximum besitzt. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.*

Um eine schädliche Wirkung des Medikaments zu vermeiden, darf eine Wirkstoffkonzentration von 18 mg/l nicht überschritten werden.

Ermitteln Sie die Dosishöhe a, ab der eine schädliche Wirkung des Medikaments eintritt.

(13 Punkte)

c) *Weisen Sie nach, dass die Wirkstoffkonzentration für jede Dosishöhe a zum Zeitpunkt $t = 8$ am stärksten abnimmt.* (10 Punkte)

Im Folgenden soll die Funktion f_{10} mit $f_{10}(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}$, $t \in [0; 24]$, betrachtet werden.

d) *Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F_{10} mit $F_{10}(t) = 40 \cdot (-t - 4) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ eine Stammfunktion von f_{10} ist.*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die mittlere Wirkstoffkonzentration $m(k)$ in den ersten k Stunden nach der Einnahme des Medikaments und berechnen Sie $m(12)$.

(12 Punkte)

e) *Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f_{10} für $t \to \infty$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den langfristigen Abbau des Wirkstoffs.*

Für $t > 24$ soll der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration durch eine lineare Funktion g beschrieben werden.

Bestimmen Sie eine Gleichung der linearen Funktion g so, dass die zusammengesetzte Funktion h mit $h(t) = \begin{cases} f_{10}(t) \text{ für } 0 \le t \le 24 \\ \mathrm{g(t)} \text{ für } t > 24 \end{cases}$ an der Stelle $t = 24$ differenzierbar ist.

Berechnen Sie für diese Modellierung den Zeitpunkt, zu dem das Medikament im Blut vollständig abgebaut ist. (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Bestimmung des Parameters *a*: $f_a(4) = a \cdot 4 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 4} = 10{,}3 \Leftrightarrow a \approx 7{,}0$.

Bei einer Dosishöhe von $a \approx 7{,}0$ erreicht die Wirkstoffkonzentration den Wert 10,3 [mg/l].

Die Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 24$ [h] beträgt $f_7(24) \approx 0{,}42$ [mg/l].

Modelllösung b)

$f_a'(t) = a \cdot (1 - 0{,}25 \cdot t) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ (Produkt-, Kettenregel)

$f_a'(t) > 0$ für $0 \le t < 4$, da a > 0 und $e^{-0{,}25 \cdot t} > 0$, d. h., f_a ist streng monoton steigend in [0;4[.

Entsprechend gilt $f_a'(t) < 0$ für $4 < t \le 24$, d. h., f_a ist streng monoton fallend in]4;24].

$f_a'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}25 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 4$; VZW (+/–) von f_a' an der Stelle $t = 4$ (oder: $f_a''(4) < 0$)

An der Stelle $t = 4$ besitzt f_a das relative Maximum $f_a(4) = 4 \cdot a \cdot e^{-1}$.

Aus dem Monotonieverhalten (oder: Untersuchung der Randwerte) folgt, dass

$f_a(4) = 4 \cdot a \cdot e^{-1}$ absolutes Maximum der Funktion f_a ist.

Die Wirkstoffkonzentration nimmt im Zeitintervall [0;4[zu und erreicht vier Stunden nach Einnahme des Medikaments ihre maximale Höhe; danach nimmt die Wirkstoffkonzentration bis zum Zeitpunkt $t = 24$ wieder ab.

Bestimmung der Dosishöhe a: $f_a(4) > 18 \Leftrightarrow 4 \cdot a \cdot e^{-1} > 18 \Leftrightarrow a > 4{,}5 \cdot e \approx 12{,}23$.

Ab einer Dosishöhe von a ≈ 12,23 tritt eine schädliche Wirkung des Medikaments ein.

Modelllösung c)

Es ist zu zeigen, dass die Änderungsrate f_a' der Wirkstoffkonzentration an der Stelle $t = 8$ ein Minimum mit negativem Wert besitzt.

$f_a''(t) = 0{,}25 \cdot a \cdot (-2 + 0{,}25 \cdot t) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ (Produkt-, Kettenregel)

$f_a''(t) = 0 \Leftrightarrow -2 + 0{,}25 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 8$

$f_a''(t) < 0$ für $0 \le t < 8$ und $f_a''(t) > 0$ für $8 < t \le 24$ (da $a > 0$); d. h., VZW (–/+) der 2. Ableitung f_a'' an der Stelle $t = 8$ (oder $f_a'''(8) = 0{,}0625 \cdot a \cdot (3 - 0{,}25 \cdot 8) \cdot e^{-0{,}25 \cdot 8} > 0$).

Wegen $f_a'(8) = -a \cdot e^{-2} < 0$ ist die Änderungsrate f_a' der Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 8$ negativ; sie nimmt dort unter Berücksichtigung von $f_a'(0) = a > f_a'(8)$ und $f_a'(24) = -5a \cdot e^{-6} > f_a'(8)$ ihr absolutes Minimum im Intervall [0;24] an.

Die Wirkstoffkonzentration nimmt daher unabhängig von a zum Zeitpunkt $t = 8$ am stärksten ab.

Modelllösung d)

Durch partielle Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int f_{10}(t)dt = 10 \cdot \int t \cdot e^{-0,25 \cdot t} dt &= 10 \cdot (-4 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t} - \int -4 \cdot e^{-0,25 \cdot t} dt) \\ &= 10 \cdot (-4 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t} + 4 \cdot (-4 \cdot e^{-0,25 \cdot t})) \\ &= 40 \cdot (-t - 4) \cdot e^{-0,25 \cdot t} = F_{10}(t).\end{aligned}$$

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten k Stunden beträgt

$$m(k) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^k f_{10}(t)dt = \frac{1}{k} \cdot \left[F_{10}(t)\right]_0^k = \frac{1}{k} \cdot (F_{10}(k) - F_{10}(0)) \approx \frac{1}{k} \cdot (-40 \cdot (k+4) \cdot e^{-0,25 \cdot k} + 160).$$

Damit ergibt sich die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden:

$$m(12) = \frac{1}{12} \cdot (F_{10}(12) - F_{10}(0)) \approx \frac{1}{12} \cdot (-31,86 + 160) \approx 10,68 \text{ [mg/l]}.$$

Modelllösung e)

Für $t > 0$ ist $f_{10}(t) > 0$. Aus $\lim\limits_{t \to \infty} t \cdot e^{-t} = 0$ folgt $\lim\limits_{t \to \infty} f_{10}(t) = \lim\limits_{t \to \infty} 10 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t} = 0$.

Die t-Achse ist Asymptote des Graphen von f_{10}. Der Wirkstoff würde bei einer solchen Modellierung nie vollständig abgebaut.

Gleichung der linearen Funktion g:

$$g(t) = f_{10}'(24) \cdot (t - 24) + f_{10}(24) = -50 \cdot e^{-6} \cdot t + 1440 \cdot e^{-6} \approx -0,124 \cdot t + 3,569$$

Bestimmung der Nullstelle: $g(t) = 0 \Leftrightarrow t = 28,8$ (bzw. $t \approx 28,78$)

Nach 28h 48min (bzw. rund 28h 47min) ist bei dieser Modellierung der Wirkstoff im Blut vollständig abgebaut.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	berechnet den Parameter a.	3 (I)
2	berechnet die Höhe der Wirkstoffkonzentration nach 24 Stunden.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet die 1. Ableitung f_a'	3 (I)
2	untersucht das Monotonieverhalten der Funktion f_a.	2 (II)
3	zeigt, dass f_a an der Stelle $t = 4$ ein absolutes Maximum besitzt.	3 (II)
4	interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	2 (II)
5	ermittelt die Dosishöhe a, ab der eine schädliche Wirkung eintritt.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet die 2. Ableitung f_a''.	3 (I)
2	zeigt, dass f_a' an der Stelle $t = 8$ ein Minimum besitzt.	3 (II)
3	stellt den Zusammenhang zwischen Wirkstoffabbau und Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration dar und begründet, dass die Wirkstoffkonzentration an der Stelle $t = 8$ am stärksten abnimmt.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	zeigt durch partielle Integration, dass F_{10} eine Stammfunktion von f_{10} ist.	5 (II)
2	ermittelt einen Ansatz für die mittlere Wirkstoffkonzentration *m(k)*.	2 (III)
3	ermittelt *m(k)* mit Hilfe des Hauptsatzes.	3 (II)
4	berechnet die mittlere Wirkstoffkonzentration für $k = 12$.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt den Grenzwert für $t \to \infty$.	2 (II)
2	interpretiert das Ergebnis im Hinblick auf den langfristigen Abbau des Wirkstoffs.	2 (II)
3	bestimmt eine Gleichung der linearen Funktion *g*.	4 (II)
4	berechnet den Zeitpunkt, zu dem der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		