Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

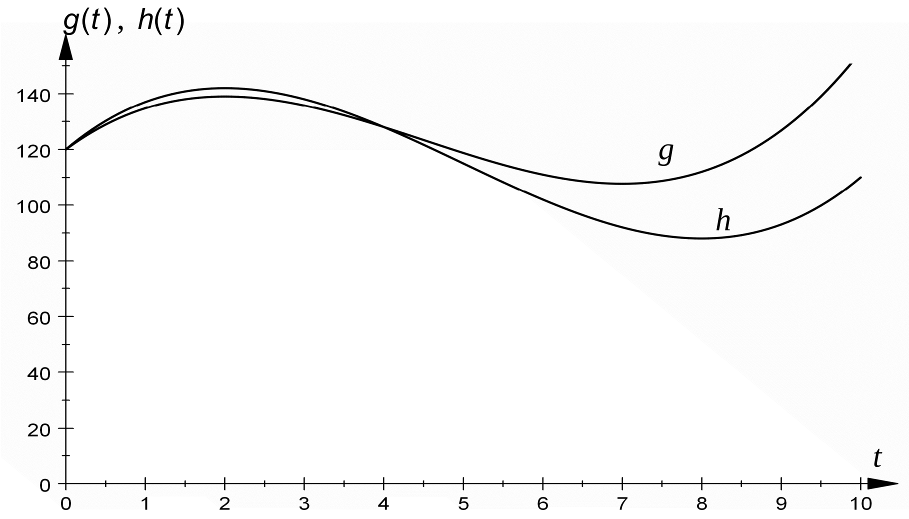
Aufgabenstellung:

Zwei Radsportler setzen zur Belastungskontrolle während des Trainings Pulsmessgeräte ein, die die momentane Herzfrequenz der Sportler anzeigen und aufzeichnen. Die aus den ermittelten Werten erstellten Herzfrequenzkurven eines 10-minütigen Trainingsabschnitts können annähernd durch die Graphen der Funktionen g mit

$$g(t) = 0,5 \cdot t^3 - 6,75 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 120\,,\ \ 0 \le t \le 10,\ \text{und } h \text{ mit}$$

$$h(t) = 0,5 \cdot t^3 - 7,5 \cdot t^2 + 24 \cdot t + 120\,,\ \ 0 \le t \le 10,$$

dargestellt werden (siehe Abbildung). Dabei wird die Zeit t in Minuten (min) seit Beginn des Trainingsabschnitts ($t = 0$) und die Herzfrequenz in Schlägen pro Minute (S/min) angegeben.



a) Der Trainer hatte den Sportlern vorgegeben, ihre Herzfrequenz während des Trainingsabschnitts zwischen 100 S/min und 160 S/min zu halten.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Vorgaben des Trainers eingehalten wurden.
(11 Punkte)

Name: ____________________

b) *Untersuchen Sie, ob die Zeitpunkte, zu denen die Herzfrequenzen der beiden Sportler während des Trainingsabschnitts jeweils am stärksten abgenommen haben, übereinstimmen.* (9 Punkte)

c) *Ermitteln Sie die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers in den ersten k Minuten des Trainingsabschnitts und berechnen Sie diesen Wert für* $k = 10$. (8 Punkte)

Die Funktionen *g* und *h* gehören zur Funktionenschar f_a mit

$f_a(t) = 0{,}5 \cdot t^3 - 1{,}5 \cdot (a+1) \cdot t^2 + 6 \cdot a \cdot t + 120$, $t \in IR, a > 0$,

die im Folgenden betrachtet wird. Es gilt $g(t) = f_{3,5}(t)$ und $h(t) = f_4(t)$.

d) *Untersuchen Sie den Graphen der Funktion* f_a *in Abhängigkeit vom Parameter a auf Extrempunkte.*
Begründen Sie, dass alle Funktionen f_a *mit* $a \geq 5\frac{2}{9}$ *eine Nullstelle im Intervall [2;10] besitzen und somit für eine Beschreibung von Herzfrequenzwerten nicht geeignet sind.* (12 Punkte)

e) *Zeigen Sie, dass sich die Graphen aller Funktionen* f_a *der Funktionenschar in genau zwei Punkten* $S_1(0|120)$ *und* $S_2(4|128)$ *schneiden.*
Ermitteln Sie den Inhalt $A(a_1; a_2)$ *der Fläche, die die Graphen zweier Funktionen* f_{a_1} *und* f_{a_2}, $a_1 < a_2$, *der Funktionenschar einschließen.*
Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die die Funktionen $f_{3,5}$ *und* f_4 *einschließen und interpretieren Sie das Ergebnis im obenstehenden Sachzusammenhang.* (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Bestimmung der Extrema der Funktion *g*:

$g'(t) = 1,5 \cdot t^2 - 13,5 \cdot t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 7$
$g''(t) = 3 \cdot t - 13,5 \Rightarrow g''(2) = -7,5 < 0 \wedge g''(7) = 7,5 > 0$

(Alternativ: Vorzeichenwechsel der Funktion g' an den Stellen $t = 2$; $t = 7$)

Die Funktion *g* besitzt das relative Maximum $g(2) = 139$ und das relative Minimum $g(7) = 107,75$. Beide Werte liegen innerhalb des vorgegebenen Intervalls]100;160[.

Da auch die Randwerte $g(0) = 120$ und $g(10) = 155$ innerhalb dieses Bereichs liegen, wurden die Vorgaben des Trainers vom ersten Sportler eingehalten.

Mit $h(t) = 0,5 \cdot t^3 - 7,5 \cdot t^2 + 24 \cdot t + 120$ erhält man $h(8) = 88$. Der zweite Sportler hat die Vorgaben nicht eingehalten, da er z. B. zur Zeit $t = 8$ nur eine Herzfrequenz von 88 Schlägen pro Minute hatte.

Modelllösung b)

Gesucht ist jeweils die Stelle *t*, an der die Änderungsrate g' bzw. h' ein negatives Minimum besitzt.

Bestimmung des absoluten Tiefpunkts des Graphen der Funktion g':

$g'(t) = 1,5 \cdot t^2 - 13,5 \cdot t + 21 = 1,5 \cdot (t - 4,5)^2 - 9,375$.

Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $G(4,5 \,|\, -9,375)$.

(Alternativ: Bestimmung des Wendepunkts des Graphen von *g* und Untersuchung der Randwerte)

Die Änderungsrate g' besitzt an der Stelle $t = 4,5$ ein absolutes Minimum. Außerdem gilt $g'(4,5) = -9,375 < 0$, d. h., die Änderungsrate ist negativ. Die Herzfrequenz des ersten Sportlers nimmt 4,5 Minuten nach Beginn des Trainingsabschnitts am stärksten ab.

Entsprechend erhält man für den zweiten Sportler:

Die Änderungsrate h' mit $h'(t) = 1,5 \cdot t^2 - 15 \cdot t + 24 = 1,5 \cdot (t - 5)^2 - 13,5$ besitzt an der Stelle $t = 5$ ein absolutes Minimum und es gilt $h'(5) = -13,5 < 0$.

Die Herzfrequenz des zweiten Sportlers nimmt 5 Minuten nach Beginn des Trainingsabschnitts am stärksten ab, die Zeitpunkte stimmen nicht überein.

Modelllösung c)

Die mittlere Herzfrequenz $m(k)$ des ersten Sportlers im Zeitintervall [0;k] beträgt

$$m(k)=\frac{1}{k}\cdot\int_0^k g(t)dt=\frac{1}{k}\cdot\int_0^k 0{,}5\cdot t^3-6{,}75\cdot t^2+21\cdot t+120)\ dt$$
$$=\frac{1}{k}\cdot\left[0{,}125\cdot t^4-2{,}25\cdot t^3+10{,}5\cdot t^2+120\cdot t\right]_0^k$$
$$=0{,}125\cdot k^3-2{,}25\cdot k^2+10{,}5\cdot k+120.$$

Die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers im gesamten Trainingsabschnitts beträgt
$m(10)=125$.

Modelllösung d)

Bestimmung der Extrempunkte:

$$f_a'(t)=1{,}5\cdot t^2-3\cdot(a+1)\cdot t+6\cdot a=0\Leftrightarrow t^2-2\cdot(a+1)\cdot t+4\cdot a=0$$
$$\Leftrightarrow t=a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-4a}=a+1\pm\sqrt{a^2-2a+1}$$
$$\Leftrightarrow t=a+1\pm\sqrt{(a-1)^2}=a+1\pm|a-1|$$
$$\Leftrightarrow t=2\vee t=2a$$

Die Stellen $t=2$ bzw. $t=2a$ sind mögliche Extremstellen des Graphen von f_a.

Mit $f_a''(t)=3\cdot t-3\cdot(a+1)$ folgt $f_a''(2)=-3\cdot(a-1)$ und $f_a''(2a)=3\cdot(a-1)$.

In Abhängigkeit von a kann man folgende Fälle unterscheiden:

1) Für alle $0 < a < 1$ gilt $f_a''(2)=-3\cdot(a-1)>0$ und $f_a''(2a)=3\cdot(a-1)<0$.

   Der Graph der Funktion f_a besitzt für alle $0<a<1$ den relativen Tiefpunkt

   $P_a(2\,|\,6a+118)$ und den relativen Hochpunkt $Q_a(2a\,|\,-2a^3+6a^2+120)$.

2) Für $a = 1$ gilt $f_1''(2)=0$ und $f_1'''(2)=3$.

   Der Graph der Funktion f_1 besitzt den Sattelpunkt $SP(2\,|\,124)$.

3) Für alle $a > 1$ gilt $f_a''(2)=-3\cdot(a-1)<0$ und $f_a''(2a)=3\cdot(a-1)>0$.

   Der Graph der Funktion f_a besitzt für alle $a > 1$ den relativen Hochpunkt

   $P_a(2\,|\,6a+118)$ und den relativen Tiefpunkt $Q_a(2a\,|\,-2a^3+6a^2+120)$.

(Alternativ: Vorzeichenwechsel von f_a' an den Stellen $t=2$ *bzw.* $t=2a$)

Für alle $a > 0$ gilt $f_a(2) = 6a + 118 > 0$ und es gilt $f_a(10) = 470 - 90 \cdot a < 0 \Leftrightarrow a > 5\frac{2}{9}$,

d. h. $f_a(10) < 0$ für alle $a > 5\frac{2}{9}$.

Damit folgt, dass die Funktion f_a für alle $a > 5\frac{2}{9}$ eine Nullstelle im Intervall [2;10] besitzt.

Modelllösung e)

Bestimmung der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f_{a_1} *und* f_{a_2} der Funktionen-schar mit $a_1 \neq a_2$:

$$
\begin{aligned}
& f_{a_1}(t) = f_{a_2}(t) \\
& \Leftrightarrow -1,5 \cdot (a_1 + 1) \cdot t^2 + 6 \cdot a_1 \cdot t - (-1,5 \cdot (a_2 + 1) \cdot t^2 + 6 \cdot a_2 \cdot t) = 0 \\
& \Leftrightarrow -1,5 \cdot (a_1 - a_2) \cdot t \cdot (t - 4) = 0 \\
& \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4
\end{aligned}
$$

Die Graphen aller Funktionen f_a schneiden sich in den Punkten $S_1(0\,|\,120)$ und $S_2(4\,|\,128)$.

Ermittlung des Flächeninhalts $A(a_1;a_2)$ des eingeschlossenen Flächenstücks:

$$
\begin{aligned}
A(a_1;a_2) &= \left| \int_0^4 (f_{a_2}(t) - f_{a_1}(t))dt \right| = \left| \int_0^4 (-1,5 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t^2 + 6 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t)dt \right| \\
&= \left| \left[-0,5 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t^3 + 3 \cdot (a_2 - a_1) \cdot t^2 \right]_0^4 \right| = \left| 16 \cdot (a_2 - a_1) \right| = 16 \cdot (a_2 - a_1) \quad (\text{da } a_1 < a_2)
\end{aligned}
$$

Für $a_1 = 3,5$ und $a_2 = 4$ $\left(a_1, a_2 < 5\frac{2}{9}\right.$ vgl. Teilaufgabe d)) erhält man die Flächenmaßzahl

$A(3,5;4) = 16 \cdot 0,5 = 8$.

Die Flächenmaßzahl gibt den Unterschied der Gesamtzahl der Herzschläge beider Sportler in den ersten vier Minuten des Trainingsabschnitts an. Die Anzahl aller Herzschläge im Zeitintervall $[0;4]$ ist bei beiden Sportlern annähernd gleich, der Unterschied beträgt (lt. Modellrechnung) lediglich 8 Schläge.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die 1. Ableitung g' und die möglichen Extremstellen des Graphen von g.	3 (I)
2	bestimmt die relativen Extrema der Funktion g.	2 (II)
3	berechnet die Randwerte $g(0)$ und $g(10)$.	2 (I)
4	gibt einen Funktionswert $h(t)$ mit $t \in [0;10]$ an, der nicht im vorgegebenen Intervall $]100;160[$ liegt.	2 (I)
5	gibt an, dass die Vorgaben des Trainers vom ersten Sportler eingehalten und vom zweiten Sportler nicht eingehalten wurden.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die Koordinaten der absoluten Tiefpunkte der Graphen der Ableitungen g' und h'.	4 (II)
2	beschreibt den Zusammenhang zwischen der Abnahme der Herzfrequenz und der Änderungsrate g' bzw. h'.	3 (II)
3	gibt die Zeitpunkte $t = 4{,}5$ und $t = 5$ an, zu denen die Herzfrequenzen der beiden Sportler am stärksten abgenommen haben.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Ansatz $\frac{1}{k} \cdot \int_0^k g(t)dt$.	3 (III)
2	bestimmt die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers im Zeitintervall $[0;k]$.	3 (II)
3	berechnet die mittlere Herzfrequenz des 1. Sportlers im gesamten Trainingsabschnitt $[0;10]$.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die 1. Ableitung f_a'.	2 (I)
2	bestimmt die möglichen Extremstellen des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.	2 (II)
3	ermittelt durch Fallunterscheidung die Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a.	5 (III)
4	zeigt, dass die Funktion f_a für alle $a > 5\frac{2}{9}$ eine Nullstelle im Intervall [2;10] besitzt.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass sich die Graphen aller Funktionen f_a in den Punkten $S_1(0\,|\,120)$ und $S_2(4\,|\,128)$ schneiden.	2 (II)
2	ermittelt den Ansatz $\left|\int_0^4 (f_{a_2}(t) - f_{a_1}(t))dt\right|$ und bestimmt den Flächeninhalt $A(a_1;a_2)$ der eingeschlossenen Fläche.	4 (II)
3	berechnet die Maßzahl der von den Graphen der Funktionen $f_{3,5}$ und f_4 eingeschlossenen Fläche.	2 (I)
4	interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		