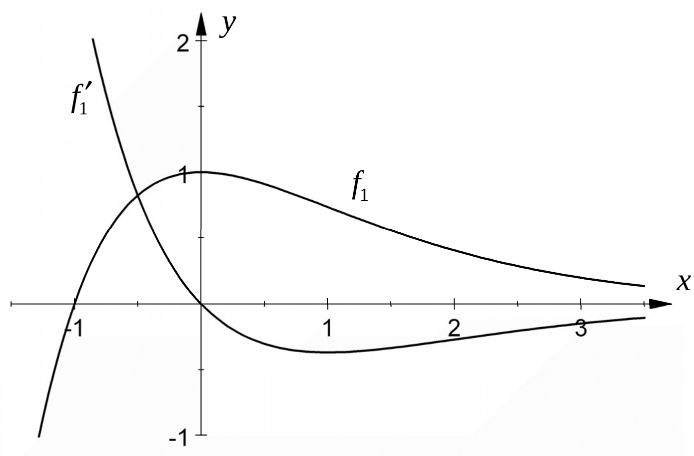
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = (x+a) \cdot e^{-x}$, $a \geq 0$.
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f_1 sowie den Graphen ihrer Ableitungsfunktion f_1'.



Abbildung

a) *Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Extrempunkte.*
Ermitteln Sie das Verhalten von f_a für $x \to +\infty$.

[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = (-x+1-a) \cdot e^{-x}$]

(11 Punkte)

Name: ____________________

b) *Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a und f_a' genau einen Schnittpunkt S_a haben, und berechnen Sie seine Koordinaten in Abhängigkeit von a.*
Geben Sie die Gleichung der Funktion g an, auf deren Graph alle Schnittpunkte S_a liegen.
Bestimmen Sie den Wert von a, für den sich die Graphen von f_a und f_a' rechtwinklig schneiden.

[Zur Kontrolle: $S_a(0,5-a \mid 0,5 \cdot e^{-(0,5-a)})$] (14 Punkte)

Im Folgenden werden die Funktionen f_1 mit $f_1(x)=(x+1)\cdot e^{-x}$ und f_1' mit $f_1'(x)=-x\cdot e^{-x}$ betrachtet, deren Graphen in der Abbildung auf Seite 1 dargestellt sind.

c) Die Parallele zur *y*-Achse mit $x=u,\ u\geq 0,$ schneidet den Graphen von f_1 im Punkt $P_u(u \mid f_1(u))$ und den Graphen von f_1' im Punkt $Q_u(u \mid f_1'(u))$.
Die Punkte P_u und Q_u bilden mit dem Schnittpunkt $S_1(-0,5 \mid 0,5\cdot e^{0,5})$ der Graphen von f_1 und f_1' das Dreieck $S_1Q_uP_u$.

Bestimmen Sie $u\geq 0$ so, dass der Flächeninhalt $A(u)$ dieses Dreiecks maximal wird.

[Zur Kontrolle: $A(u)=(u^2+u+0,25)\cdot e^{-u}$] (12 Punkte)

d) Die Graphen von f_1 und f_1' schließen mit der Parallelen zur *y*-Achse mit $x=u,\ u>0,$ ein Flächenstück ein.

Ermitteln Sie den Inhalt dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von u.

Prüfen Sie, ob für $u\rightarrow +\infty$ das nach rechts unbegrenzte Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt. (13 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

---

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
    - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
    - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)

2. *Medien/Materialien*
    - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$f_a(x) = (x+a)\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -a$; Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(-a\,|\,0)$

$f_a(0) = a$; Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0\,|\,a)$

Bestimmung der Extrempunkte:

$f_a'(x) = (-x+1-a)\cdot e^{-x}$ und $f_a''(x) = (x-2+a)\cdot e^{-x}$ (Produkt-, Kettenregel)

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1-a$ (da $e^{-x} \neq 0$)

$f_a''(1-a) = (1-a-2+a)\cdot e^{-(1-a)} = -\,e^{-1+a} < 0$ (oder Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung)

lokaler Hochpunkt $H_a(1-a\,|\,e^{-1+a})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+a)\cdot e^{-x} = 0$, da $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = 0$. Die x-Achse ist Asymptote der Funktion f_a.

Modelllösung b)

Untersuchung der Graphen von f_a und f_a' auf Schnittpunkte:

$f_a(x) = f_a'(x) \Leftrightarrow (x+a)\cdot e^{-x} = (-x+1-a)\cdot e^{-x} \Leftrightarrow x = 0{,}5-a$, da $e^{-x} \neq 0$

$x = 0{,}5-a$ ist die einzige Schnittstelle der Graphen

$f_a(0{,}5-a) = f_a'(0{,}5-a) = 0{,}5\cdot e^{-(0{,}5-a)}$; Schnittpunkt $S_a(0{,}5-a\,|\,0{,}5\cdot e^{-(0{,}5-a)})$

Bestimmung des Parameters *a*, für den sich die Graphen rechtwinklig schneiden:

Steigung der Tangenten an die beiden Graphen im Punkt S_a:

$m_1 = f_a'(0{,}5-a) = (-0{,}5+a+1-a)\cdot e^{-0{,}5+a} = 0{,}5\cdot e^{-0{,}5+a}$

$m_2 = f_a''(0{,}5-a) = (0{,}5-a-2+a)\cdot e^{-0{,}5+a} = -1{,}5\cdot e^{-0{,}5+a}$

Es muss gelten: $m_1\cdot m_2 = -1$

$0{,}5\cdot e^{-0{,}5+a}\cdot(-1{,}5\cdot e^{-0{,}5+a}) = -1 \Leftrightarrow -0{,}75\cdot e^{-1+2a} = -1$

$\Leftrightarrow e^{2a-1} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 2a-1 = \ln\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow a = 0{,}5\cdot\ln\dfrac{4}{3}+0{,}5 \approx 0{,}64$

Für $a \approx 0{,}64$ schneiden sich die Graphen von f_a und f_a' im rechten Winkel.

Bestimmung der Ortslinie der Schnittpunkte S_a:

Die Funktionsgleichung $g(x) = 0,5 \cdot e^{-x}$ kann den Koordinaten der Schnittpunkte

$S_a(0,5 - a \mid 0,5 \cdot e^{-(0,5-a)})$ (ohne Rechnung) entnommen werden.

(oder: Für die *x*-Koordinate gilt: $x = 0,5 - a \Leftrightarrow a = 0,5 - x$. Damit ergibt sich für die

y-Koordinate $y = 0,5 \cdot e^{-0,5+a} = 0,5 \cdot e^{-0,5+0,5-x} = 0,5 \cdot e^{-x}$.)

Alle Schnittpunkte S_a liegen auf dem Graphen der Funktion *g* mit $g(x) = 0,5 \cdot e^{-x}$.

Modelllösung c)

Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks $S_1Q_uP_u$:

Die Länge der Dreieckseite $\overline{P_uQ_u}$

beträgt $|f_1(u) - f_1'(u)| = (2u+1) \cdot e^{-u}$ (da $(u \geq 0)$).

Die zugehörige Höhe h beträgt |–0,5|+u=0,5+u. Damit erhält man den Flächeninhalt des

Dreiecks $A(u) = 0,5 \cdot (0,5+u) \cdot (2u+1) \cdot e^{-u} = (u^2 + u + 0,25) \cdot e^{-u}$; $(u \geq 0)$.

Bestimmung des Maximums:

$A'(u) = (-u^2 + u + 0,75) \cdot e^{-u} = 0 \Leftrightarrow -u^2 + u + 0,75 = 0 \Leftrightarrow u = 1,5 \vee u = -0,5$

$A''(u) = (u^2 - 3u + 0,25) \cdot e^{-u} \Rightarrow A''(1,5) = (1,5^2 - 3 \cdot 15 + 0,25) \cdot e^{-1,5} = -2 \cdot e^{-1,5} < 0$

An der Stelle *u* = 1,5 besitzt A das relative Maximum $A(1,5) = 4 \cdot e^{-1,5} \approx 0,89$.

Aus *A*(0) = 0,25 < *A*(1,5) und $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} (u^2 + u + 0,25) \cdot e^{-u} = 0$

(da $\lim\limits_{u \to +\infty} u \cdot e^{-u} = 0$) folgt, dass *A*(1,5) ein absolutes Maximum ist. Für *u* = 1,5 hat

das Dreieck $S_1Q_uP_u$ den maximalen Flächeninhalt.

Modelllösung d)

Ansatz zur Ermittlung des Flächeninhalts $M(u)$ des eingeschlossenen Flächenstücks:

$$M(u) = \left| \int_{-0,5}^{u} (f_1(x)dx - f_1'(x))dx \right| = \int_{-0,5}^{u} (2x+1)\cdot e^{-x}dx \quad (\text{Für } x \geq -0,5 \text{ gilt } f_1(x) \geq f_1'(x).)$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_{-0,5}^{u} (2x+1)\cdot e^{-x}dx = [(2x+1)\cdot(-e^{-x})]_{-0,5}^{u} - \int_{-0,5}^{u} 2\cdot(-e^{-x})dx$$

$$= [-(2x+3)\cdot e^{-x}]_{-0,5}^{u} = -(2u+3)\cdot e^{-u} + 2\cdot e^{0,5}$$

Der Flächeninhalt beträgt $M(u) = -(2u+3)\cdot e^{-u} + 2\cdot e^{0,5}$.

Für $u \to \infty$ gilt:

$$\lim_{u\to+\infty} (-(2u+3)\cdot e^{-u} + 2\cdot e^{0,5}) = 0 + 2\cdot e^{0,5} = 2\cdot e^{0,5} \approx 3,3\,.$$

Für $u \to +\infty$ hat das unbegrenzte Flächenstück den endlichen Flächeninhalt $2\cdot e^{0,5}$ [FE].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
	Der Prüfling	
1	berechnet die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.	2 (I)
2	berechnet die 1. Ableitung.	3 (I)
3	bestimmt mit einem geeigneten Verfahren den lokalen Hochpunkt.	4 (II)
4	ermittelt den Grenzwert für $x \to +\infty$.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass die Graphen von f_a und f_a' genau einen Schnittpunkt haben.	3 (II)
2	berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts.	2 (I)
3	gibt die Gleichung der Funktion g an.	3 (I)
4	ermittelt die Steigungen m_1 und m_2 der Tangenten im Punkt S_a.	3 (II)
5	bestimmt den Wert von a, für den sich die Graphen rechtwinklig schneiden.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks.	5 (III)
2	bestimmt das lokale Maximum der Flächeninhaltsfunktion.	5 (II)
3	ermittelt durch Ausschluss von Randextrema das gesuchte u.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Ansatz zur Flächenberechnung des eingeschlossenen Flächenstücks.	4 (II)
2	bestimmt durch partielle Integration eine Stammfunktion.	4 (II)
3	berechnet den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von u.	2 (I)
4	prüft, ob das unbegrenzte Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		