



Name: _____

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, \text{ und } h: \bar{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

- a) Geben Sie eine Definition für Paare windschiefer Geraden an und zeigen Sie, dass g und h tatsächlich windschief sind. (8 Punkte)
- b) Berechnen Sie alle Punkte auf den Geraden g und h , die vom Ursprung den Abstand 5 [LE] haben, und interpretieren Sie das Ergebnis. (10 Punkte)
- c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(2|1|3) \in g$ von der Geraden h . (8 Punkte)

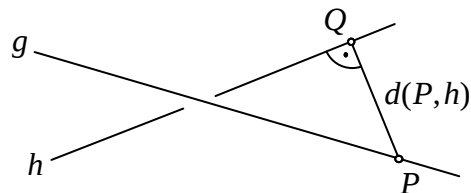


Abbildung 1



Name: _____

d) Der Abstand windschiefer Geraden kann auf den Abstand paralleler Ebenen zurückgeführt werden.

Bestimmen Sie Gleichungen paralleler Ebenen E_g und E_h mit $g \subset E_g$ und $h \subset E_h$ und berechnen Sie den Abstand $d(E_g, E_h)$ der beiden Ebenen.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden k , die g und h orthogonal schneidet (siehe Abbildung 2). (18 Punkte)

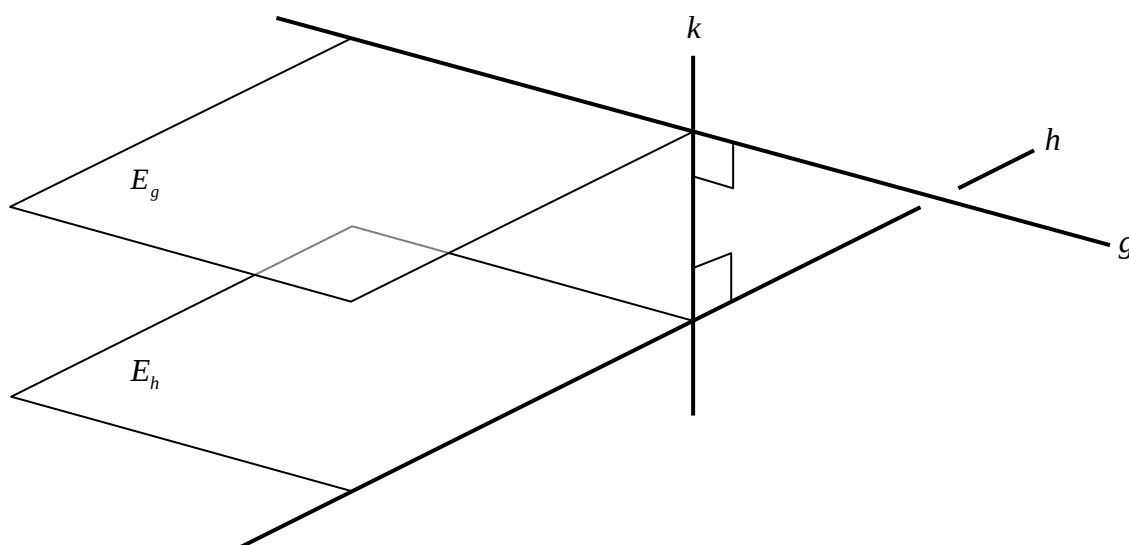


Abbildung 2

e) Begründen Sie:

Wenn die Punkte $P_1, P_2 \in g$, $P_1 \neq P_2$, und $Q_1, Q_2 \in h$, $Q_1 \neq Q_2$ auf den windschiefen Geraden g und h liegen, dann sind auch die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 windschief.

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Alternative 1:

- Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren
- Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Abstandsprobleme

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Zwei Geraden $g, h \subset \mathbb{R}^3$ heißen windschief z. B., wenn sie weder parallel sind, noch einen gemeinsamen Punkt haben.

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung, die Geraden schneiden sich nicht. Offenbar sind die Geraden nicht parallel. Die Geraden g und h sind also windschief.

Modelllösung b)

Punkte P auf g :

Es ist r so zu bestimmen, dass $P(2+3r|1+2r|3-2r) \in g$ zu O den Abstand 5 hat.

$$d(P, O) = 5 \Leftrightarrow (2+3r)^2 + (1+2r)^2 + (3-2r)^2 = 25 \Leftrightarrow r \approx 0,70 \vee r \approx -0,93.$$

Die gesuchten Punkte sind $P_1 \approx (4,1 | 2,4 | 1,6)$ und $P_2 \approx (-0,79 | -0,86 | 4,86)$.

Punkte Q auf h :

$$d(Q, O) = 5 \Leftrightarrow (12+s)^2 + (-1-2s)^2 + (-12-6s)^2 = 25.$$

Die Gleichung hat keine Lösung: Es gibt auf h keine Punkte, die vom Ursprung den Abstand 5 LE haben.

Die Gerade h ist vom Ursprung weiter als 5 LE entfernt, während es auf Geraden g (zwischen den Punkten P_1 und P_2) Punkte gibt, die weniger als 5 LE vom Ursprung entfernt sind.

Modellösung c)

Der Punkt $Q \in h$ mit kleinstem Abstand von P wird als Durchstoßpunkt der Geraden h durch die Hilfsebene H mit $P \in H$ und $H \perp h$ (oder als Fußpunkt des Lotes von P auf h) bestimmt.

$$H: x_1 - 2x_2 - 6x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -18$$

$$h \cap H: (12+s) - 2(-1-2s) - 6(-12-6s) = -18$$

$$\Leftrightarrow 41s = -104 \Leftrightarrow s = \frac{-104}{41} \approx -2,54$$

$$\Rightarrow Q \approx (9,46 \mid 4,07 \mid 3,22) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| \approx \begin{vmatrix} 7,46 \\ 3,07 \\ 0,22 \end{vmatrix} \approx 8,07 \text{ [LE]}$$

Modellösung d)

Gleichungen der Ebenen E_g, E_h werden ermittelt, die g bzw. h enthalten und parallel zur jeweils anderen Ebene sind.

Berechnung eines Vektors \vec{w} , der auf g und h senkrecht steht:

$$\begin{cases} 3w_1 + 2w_2 - 2w_3 = 0 \\ w_1 - 2w_2 - 6w_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_g: \vec{w} \cdot \vec{x} = \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5, \quad E_h: \vec{w} \cdot \vec{x} = \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} = 14$$

Der Abstand der beiden Ebenen ist z. B. mit Hilfe der Hesseschen Normalform zu bestimmen:

$$d(E_g, E_h) = \frac{1}{|\vec{w}|} \cdot \left| \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \vec{w} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot |5 - 14| = 3$$

Berechnung der Geraden k :

Die Hilfsebene H , die von g und dem Richtungsvektor \vec{w} von k aufgespannt wird, hat die

$$\text{Gleichung } H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, r, t \in \mathbb{R} \text{ bzw. } H: 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 41 = 0.$$

Der Schnitt von H mit der Geraden h liefert S als Punkt der Geraden k :

$$2 \cdot (12 + s) + 7 \cdot (-1 - 2s) + 10 \cdot (-12 - 6s) = 41 \Leftrightarrow s = -2.$$

Ein Punkt der Geraden k ist damit $S(10 | 3 | 0)$.

$$\text{Es ergibt sich } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Modelllösung e)

Wenn die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 nicht windschief wären, dann wären sie parallel oder würden sich schneiden, so dass die Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 in einer Ebene lägen. Damit lägen auch die Geraden $P_1P_2 = g$ und $Q_1Q_2 = h$ in derselben Ebene, wären also nicht windschief. Also müssen die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 windschief sein.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹
	Der Prüfling	
1	gibt eine Definition für Paare windschiefer Geraden an.	2 (I)
2	zeigt, dass g und h windschief sind.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet die Punkte auf g , die vom Ursprung den Abstand 5 LE haben.	5 (I)
2	berechnet, dass auf h keine solchen Punkte liegen.	3 (I)
3	interpretiert das Ergebnis.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt den Punkt Q auf h mit kleinstem Abstand von P .	6 (II)
2	berechnet den Abstand der Punkte P und Q .	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt Gleichungen der parallelen Ebenen E_g, E_h mit $g \subset E_g, h \subset E_h$.	5 (II)
2	berechnet den Abstand der Ebenen.	5 (I)
3	ermittelt eine Gleichung der Geraden k .	8 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	begründet, dass die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 windschief sind.	6 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	gibt eine Definition ...	2 (I)			
2	zeigt, dass $g \dots$	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
	Summe Teilaufgabe a)	8			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	berechnet die Punkte ...	5 (I)			
2	berechnet, dass auf ...	3 (I)			
3	interpretiert das Ergebnis.	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10)					
	Summe Teilaufgabe b)	10			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt den Punkt ...	6 (II)			
2	berechnet den Abstand ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe c)		8			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt Gleichungen der ...	5 (II)			
2	berechnet den Abstand ...	5 (I)			
3	ermittelt eine Gleichung ...	8 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18)					
Summe Teilaufgabe d)		18			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ³	ZK	DK
1	begründet, dass die ...	6 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (6)					
Summe Teilaufgabe e)		6			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

³ EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0