Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h mit $h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9}$ (t in Tagen, $h(t)$ in Metern) beschrieben. Diese Pflanze hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm und ist am Ende des 20. Tages $(t = 20)$ auf eine Höhe von etwa 60 cm gewachsen. Vom Beginn des 21. Tages an verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist nur noch die Zuwachsrate bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit $z(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$.

a) *Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat.*

(5 Punkte)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt innerhalb der ersten zwanzig Tage* $(0 \le t \le 20)$*, an dem die Pflanze am schnellsten wächst. Berechnen Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.*
Begründen Sie, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann. (11 Punkte)

c) *Ermitteln Sie einen Term* $h_2(t)$*, der die Höhe des Strauches nach t Tagen* $(t > 20)$ *beschreibt.*
Begründen Sie anhand dieses Terms, dass der Strauch nicht beliebig hoch wird, und geben Sie die maximale Höhe des Strauches an.
[Zur Kontrolle: $h_2(t) \approx 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$, $t > 20$] (10 Punkte)

Name: ____________________

Die *Abbildung 1* auf Blatt 3 zeigt den Graphen, der die Höhe des Strauches in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen beschreibt. Er ist aus den Funktionen h $(0 < t \leq 20)$ und h_2 $(t > 20)$ zusammengesetzt.

d) Eine Funktion f soll nun die Pflanzenhöhe für den gesamten Zeitraum, also über die ersten zwanzig Tage hinaus, möglichst zutreffend modellieren.

(1) Da der Strauch nicht höher als ungefähr 1,2 m wird, muss die Modellfunktion beschränkt sein. Zunächst wird eine Modellfunktion vom Typ f_1 mit $f_1(t) = G - c \cdot e^{-k \cdot t}$ gewählt. Dabei ist G mit $G = 1{,}2$ die obere Grenze, die die Höhe der Pflanze auf lange Sicht nicht überschreitet.

Bestimmen Sie die Parameter c und k so, dass der Strauch beim Auspflanzen und am 20. Tag die beobachteten Höhen von 0,08 m bzw. von 0,60 m besitzt.

(2) Ein alternativer Ansatz führt zu einer Modellfunktion f_2 mit

$$f_2(t) = \frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-0{,}132 \cdot t}}.$$

Berechnen Sie die Höhen des Strauches zum Zeitpunkt $t = 0$ *und* $t = 20$ *und vergleichen Sie diese mit den tatsächlichen Werten.*

Zeigen Sie, dass die mit der Modellfunktion f_2 *beschriebene Pflanzenhöhe den Wert 1,2 m tatsächlich nicht überschreitet.*

(3) *Begründen Sie anhand des Krümmungsverhaltens, welche der beiden Modellfunktionen* f_1 *und* f_2 *eher geeignet ist, die Strauchhöhe (s. Abbildung 1) in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen zu beschreiben (vgl. Abbildungen 1, 2 und 3 auf Blatt 3).*

(4) *Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen einer (differenzierbaren) Modellfunktion f und der Funktion h im Intervall* $[0;20]$.

(24 Punkte)

Name: ____________________

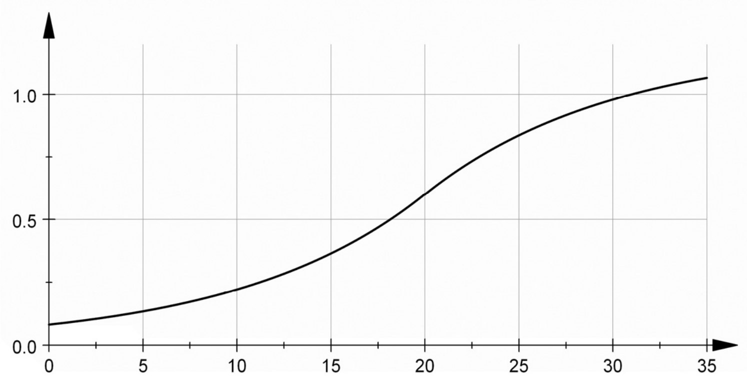

Abbildung 1:
Strauchhöhe *h (einschließlich* h_2*)* in Metern in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Tagen

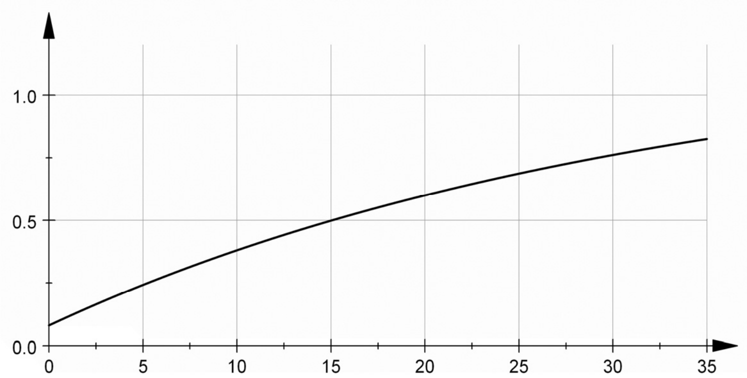

Abbildung 2:
Modellfunktion f_1 zur Beschreibung der Strauchhöhe in Metern in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Tagen

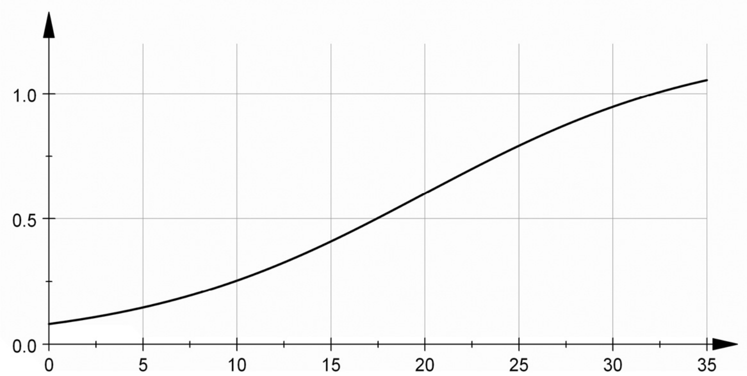

Abbildung 3:
Modellfunktion f_2 zur Beschreibung der Strauchhöhe in Metern in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Tagen

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen auch unter Einbeziehung gebrochen-rationaler Funktionen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 0{,}5 \Rightarrow t = 10 \cdot \ln(2{,}5) + 9 \approx 18{,}2$

Nach 18 Tagen und fast 5 Stunden ist die Pflanze 50 cm hoch. Die Umrechnung in Stunden wird nicht verlangt.

Modelllösung b)

Der gesuchte Zeitpunkt entspricht einer Wendestelle des Graphen, nämlich einer Stelle mit der größten Steigung. Da jedoch für eine Exponentialfunktion wie der vorliegenden die Steigung mit wachsendem *t* ebenfalls stetig zunimmt, existiert in diesem Fall keine Wendestelle. Demnach erreicht für $t = 20$ der Graph die größte Steigung und somit der Strauch die größte Wachstumsgeschwindigkeit. Da die Ableitung der Funktion der Pflanzenhöhe h' der Wachstumsgeschwindigkeit entspricht, muss also $h'(20)$ berechnet werden:

$h'(t) = 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9}$

$h'(20) = 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1 \cdot 20 - 0{,}9} \approx 0{,}060$.

Der Strauch wächst also am zwanzigsten Tag mit einer Geschwindigkeit von 6 cm pro Tag. Da die Werte einer Exponentialfunktion beliebig groß werden, wenn der Exponent gegen unendlich strebt, würde der Strauch dementsprechend unendlich groß. Insofern kann die Funktion *h* nur für einen begrenzten Zeitraum als Modell bzw. zur Modellierung dienen.

Modelllösung c)

Die Höhe des Strauches kann berechnet werden, indem zu der Höhe nach 20 Tagen ein durch Integration der Funktion *z* mit variabler oberer Grenze ermittelter Term addiert wird:

$$h_2(t) \approx 0{,}601 + \int_{20}^{t} 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1} \mathrm{d}u = 0{,}601 + \left[-0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1}\right]_{20}^{t} \approx 1{,}202 - 0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$$

Da der Teilterm im Exponenten der Funktion mit steigendem *t* gegen minus Unendlich strebt, wird der Strauch nicht höher als ca. 1,20 Meter.

Modelllösung d)

(1) Aus den Informationen ergeben sich die Koordinaten zweier Punkte, die auf dem Graphen von f_1 mit G = 1,2 liegen.

$P_1(0/0,08)$ und $P_2(20/0,6)$ führen zu den Gleichungen (I) und (II):

(I) $f_1(0)=0,08=1,2-c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=1,2-0,08=1,12$.

Durch Einsetzen in Gleichung (II) ergibt sich:

(II) $f_1(20)=0,6=1,2-1,12\cdot e^{-20\cdot k} \;\Leftrightarrow\; k=-\frac{1}{20}\cdot\ln\left(\frac{15}{28}\right)\approx 0,0312$.

Der Funktionsterm lautet: $f_1(t)=1,2-1,12\cdot e^{-0,0312\cdot t}$.

(2) Durch Einsetzten von t = 0 und t = 20 in $f_2(t)=\dfrac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^{-0,132\cdot t}}$ ergibt sich:

$$f_2(0)=\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^0}=0,08$$

$$f_2(20)=\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^{-0,132\,\cdot\,20}}\approx 0,60.$$

Die Modellfunktion f_2 gibt zu den Zeitpunkten t = 0 und t = 20 die gemessenen Höhen des Strauches korrekt wieder.

Auf lange Sicht wird die Höhe eines Strauches, die mit der Modellfunktion f_2 beschrieben wird, die Höhe von 1,2 m nicht überschreiten, da für $t\to\infty$ der Teilterm $e^{-0.132\cdot t}\to 0$ gegen Null strebt. Insgesamt ergibt sich damit:

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^{-0,132\cdot t}}\to\frac{0,096}{0,08}=1,2\,.$$

(3) Der Graph von f_1 verändert sein Krümmungsverhalten im gesamten Beobachtungszeitraum nicht. Inhaltlich bedeutet das konkret, dass das Pflanzenwachstum, das der Graph von f_1 beschreibt, über den gesamten Beobachtungszeitraum kleiner wird.

Der Graph von f_2 verändert sein Krümmungsverhalten im Wendepunkt, der etwa bei t = 20 liegt. Bis zu diesem Zeitpunkt nimmt das Wachstum des Strauches beinahe exponentiell zu, erst nach dem 20. Tag wird ein sinkendes Pflanzenwachstum beschrieben. Das legt die Vermutung nahe, dass die Strauchhöhe h in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen über den gesamten Beobachtungszeitraum eher durch ein Wachstumsmodell wie in f_2 beschrieben werden kann.

(4) Zunächst muss eine neue (differenzierbare) Funktion $d = h - f$ definiert werden, die die Differenz zwischen den beiden Funktionen angibt. Von dieser müssen dann durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung mögliche lokale Extremstellen im Intervall [0;20] berechnet werden. Durch Vergleich der Beträge der Funktionswerte an diesen Stellen mit den Beträgen der Randwerte $|d(0)|$ und $|d(20)|$ findet man die gesuchte größte Differenz.

Alternative Lösungswege sind denkbar.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
	Der Prüfling	
1	berechnet den Zeitpunkt, zu dem der Strauch eine Höhe von 50 cm hat.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet die erste Ableitung.	3 (I)
2	begründet, warum keine Wendestelle existiert.	3 (II)
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit an der Stelle 20.	2 (I)
4	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Term für die Höhe des Strauches zum Zeitpunkt t.	5 (III)
2	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
3	gibt die maximale Höhe des Strauches an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) bestimmt den Funktionsterm von f_1.	5 (II)
2	(2) berechnet die Pflanzenhöhe zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 20$ mit der Modellfunktion f_2.	4 (I)
3	(2) vergleicht die berechneten Werte mit den beobachteten Werten.	2 (II)
4	(2) bestimmt die maximale Höhe des Strauchs anhand von f_2.	3 (II)
5	(3) begründet die Eignung von f_2 als Modellfunktion für die Strauchhöhe.	5 (II)
6	(4) beschreibt ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen f und h im Intervall [0;20].	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		