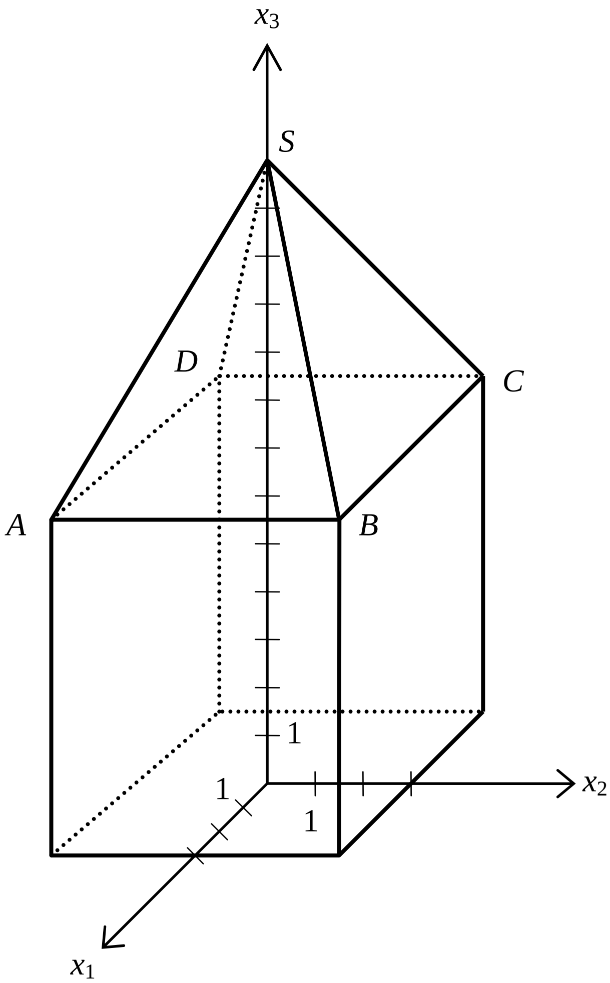
Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Auf einen Quader mit der Grundfläche in der x_1-x_2-Ebene ist eine Pyramide mit folgenden Eckpunkten aufgesetzt: $A(3\,|-3\,|\,7)$, $B(3\,|\,3\,|\,7)$, $C(-3\,|\,3\,|\,7)$, $D(-3\,|-3\,|\,7)$ und $S(0\,|\,0\,|\,13)$ (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Die Dreiecksfläche *BCS* liegt in einer Ebene E_1.

(1) *Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform.*
[Zur Kontrolle: $E_1:\ 2x_2 + x_3 - 13 = 0$]

(2) Eine von einem Punkt $M(0\,|\,7\,|\,15)$ ausgehende Gerade, die in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$ zeigt, durchstößt die Ebene E_1 im Punkt M^*.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M^* der Ebene E_1 und zeichnen Sie die Punkte M und M^* und deren Verbindungslinie in die obenstehende Abbildung der Pyramide ein.

(15 Punkte)

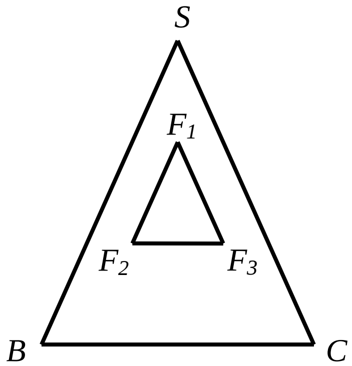
Name: ____________________

b) Die Ebene E_2 enthält den Punkt C und ist orthogonal zur Pyramidenkante $\overline{AS}$.

(1) *Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_2.*
[Zur Kontrolle: $E_2: -x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$]

(2) *Berechnen Sie den Abstand des Punktes B von der Ebene E_2.* (9 Punkte)

c) In die Seitenfläche BCS der Pyramide wird ein gleichschenkliges Dreieck $F_1F_2F_3$ mit den Eckpunkten $F_1(0\,|\,1\,|\,11)$ und $F_3(-1\,|\,2\,|\,9)$ und der Basis $\overline{F_2F_3}$ eingetragen. Die Seiten $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{F_1F_3}$ verlaufen parallel zu den Pyramidenkanten $\overline{SB}$ bzw. $\overline{SC}$ (siehe nebenstehende Abbildung).



(1) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunktes F_2 und berechnen Sie den von den Seiten $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{F_1F_3}$ eingeschlossenen Innenwinkel.*
[Zur Kontrolle: $F_2(1\,|\,2\,|\,9)$]

(2) *Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $G(0\,|\,1{,}5\,|\,10)$ der Seitenfläche BCS der Pyramide von der Seite $\overline{F_2F_3}$ des Dreiecks $F_1F_2F_3$.* (19 Punkte)

d) Der Punkt S^* bewegt sich auf der Geraden k mit der Gleichung

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Gerade k parallel zur x_1-x_2-Ebene verläuft, und begründen Sie, dass sich das Volumen der Pyramide $ABCDS^*$ nicht ändert, wenn S^* sich längs der Geraden k bewegt. (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Als Parametergleichung von E_1 ergibt sich: $E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Der Ansatz $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ führt auf den Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit entsteht die Normalenform der Ebenengleichung zu

$E_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 13 = 0$ bzw. $E_1: 2x_2 + x_3 = 13$.

(2) Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes M^* wird die Gleichung der Geraden

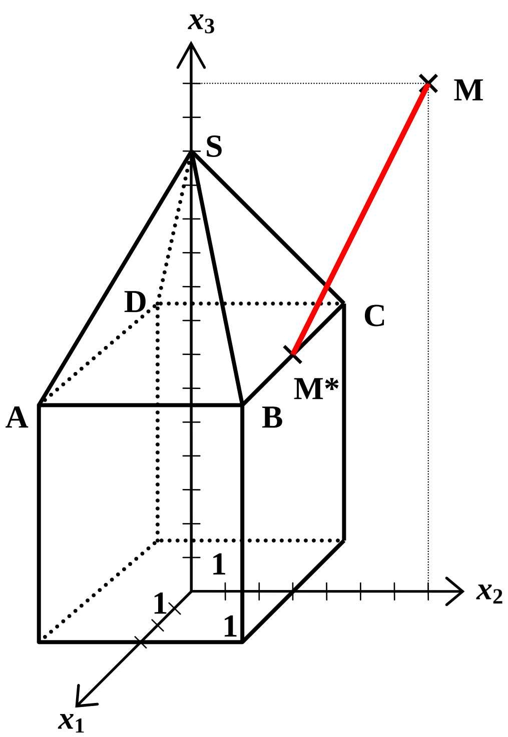
$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$ in die Normalenform

von E_1 eingesetzt:

g in E_1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = 13$

$\Leftrightarrow \quad s = 1{,}6$

Es ergibt sich $\boldsymbol{M^*}(0|3|7)$. Zur Zeichnung von M, M^* und der Verbindungslinie von M nach M^* vergleichen Sie die nebenstehende Skizze.



Modelllösung b)

(1) Die Ebene E_2 wird in Koordinatenform angegeben. Die Pyramidenkante $\overline{AS}$ liefert den Normalenvektor $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten von C führt auf die Gleichung: $E_2\colon \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 9 + 9 + 42 = 60$

$\Leftrightarrow \quad E_2\colon \; -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 60 \quad \Leftrightarrow \quad E_2\colon \; -x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$.

(2) Für den Abstand d von B zu E_2 ergibt sich:

$$d(B,E_2) = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 20 \right) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (14 - 20) \right| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \text{ (LE)}.$$

Modelllösung c)

(1) Die Koordinaten von F_2 ergeben sich als Schnittpunkt der Dreiecksseiten $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{F_2F_3}$ bzw. der zugehörigen Geraden, wobei die Dreiecksseite $\overline{F_2F_3}$ (wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $F_1F_2F_3$) parallel zur Pyramidenkante $\overline{BC}$ ist:

$$g_{F_1F_2}\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g_{F_2F_3}\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{F_1F_2} = g_{F_2F_3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad t = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \quad F_2\,(1|2|9)$

Für den Innenwinkel φ zwischen den Dreiecksseiten $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{F_1F_3}$ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \overrightarrow{F_1F_3}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{F_1F_3}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-1+1+4}{6} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 48{,}19°.$$

(2) Die Gleichung einer Geraden durch die Dreiecksseite $\overline{F_2F_3}$ lautet:

$$g_{F_2F_3}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix} + t\cdot\overrightarrow{F_2F_3} = \begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dazu ist die Ebene $E_3: \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad E_3: x_1 = 0$ durch den Punkt $G(0|1{,}5|10)$ der Dachfläche BCS orthogonal. Die Koordinaten des Durchstoßpunktes H der Geraden $g_{F_2F_3}$ durch die Ebene E_3 lassen sich durch Einsetzen der Geradengleichung von $g_{F_2F_3}$ in die Ebenengleichung von E_3 ermitteln:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = -\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad H(0|2|9).$$

Der gesuchte Abstand d der Seite $\overline{F_2F_3}$ vom Punkt G ergibt sich als Entfernung der Punkte H und G zu: $d = \left|\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1{,}5\\10\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1{,}118\ \text{(LE)}.$

Modelllösung d)

Die Gerade k ist parallel zur x_1-x_2-Ebene, da der Richtungsvektor von k offensichtlich komplanar zur x_1-x_2-Ebene ist.
Der Punkt S^* bewegt sich also auf einer Geraden k parallel zur x_1-x_2-Ebene. Damit ändert sich der Abstand des Punktes S^* von der x_1-x_2-Ebene nicht, wenn S^* sich irgendwo auf der Geraden k befindet. Da die Grundfläche der Pyramide in der x_1-x_2-Ebene liegt, ändert sich der Abstand des Punktes S^* von der Grundfläche der Pyramide nicht. Somit bleibt die Höhe h der Pyramide $ABCDS^*$ unverändert für alle Punkte S^* auf der Geraden k. Also verändert sich auch das Volumen $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ der Pyramide nicht (bei immer gleicher Grundfläche G).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	berechnet eine Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform.	8 (I)
2	ermittelt die Koordinaten des Punktes M^*.	5 (II)
3	zeichnet die Punkte M und M^* und deren Verbindungslinie ein.	2 (I)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt eine Ebenengleichung für die Ebene E_2 (mit bekanntem Normalenvektor).	5 (II)
2	berechnet den Abstand des Punktes B von der Ebene E_2.	4 (I)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt die Koordinaten des Punktes F_2.	7 (II)
2	berechnet den eingeschlossenen Innenwinkel.	4 (I)
3	ermittelt den Abstand des Punktes G von der Dreiecksseite $\overline{F_2F_3}$.	8 (III)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass die Gerade *k* parallel zur x_1-x_2-Ebene liegt.	2 (II)
2	begründet, dass sich das Volumen der Pyramide nicht ändert.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet eine Gleichung …	8 (I)			
2	ermittelt die Koordinaten …	5 (II)			
3	zeichnet die Punkte …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt eine Ebenengleichung …	5 (II)			
2	berechnet den Abstand …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Koordinaten …	7 (II)			
2	berechnet den eingeschlossenen …	4 (I)			
3	ermittelt den Abstand …	8 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**19**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass die …	2 (II)			
2	begründet, dass sich …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0