Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine ebene Landschaft, in der sich ein Flughafen und eine Stadt befinden. Das Zentrum der Stadt liegt im Ursprung. Die x_1-Achse weist in die Ostrichtung, die x_2-Achse in die Nordrichtung. Im Folgenden werden die Flugbewegungen vereinfacht dargestellt.
Unmittelbar nach dem Abheben des Flugzeuges F_1 im Punkt $P(-3\,|-11\,|\,0)$ von der Startbahn geht das Flugzeug in eine geradlinige Flugbahn g über:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 15.$$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich längs der Geraden h mit:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Längeneinheit beträgt 1 km; t und s geben jeweils die Anzahl der Minuten an, die seit dem Start von F_1 vergangen sind.

a) Das Flugzeug F_1 überfliegt in der Startphase (Abhebphase) die Spitze $Q(12{,}4\,|\,17\,|\,1{,}3)$ eines nahe gelegenen Berges.

Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Bergspitze überflogen wird, und ermitteln Sie für diesen Zeitpunkt den Abstand, den das Flugzeug F_1 von der Bergspitze hat.

Berechnen Sie das Maß des Steigungswinkels, unter dem das Flugzeug F_1 startet.

(9 Punkte)

Name: ____________________

b) *Weisen Sie nach, dass sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 nicht schneiden.*

Ermitteln Sie den minimalen Abstand, den die Flugzeuge F_1 und F_2 in den ersten 15 Minuten nach Start des Flugzeugs F_1 voneinander haben.

[Zur Kontrolle: $52{,}6t^2 - 358t + 701$ (= Abstand^2 der Flugzeuge nach t Minuten)]

Ermitteln Sie für das Flugzeug F_2 die Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$. (19 Punkte)

c) *Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 im Punkt $S(8\,|\,9\,|\,3)$ schneiden, wenn F_2 genau 1 km tiefer fliegen würde.*

Berechnen Sie für den Fall, dass F_2 genau 1 km tiefer fliegen würde, die Gleichung der Ebene (Flugkorridor) in Koordinatenform, in der die Flugbahnen von F_1 und F_2 enthalten wären.

Beurteilen Sie, ob es zu einer Kollision der beiden Flugzeuge käme. (12 Punkte)

d) Ein militärisches Sperrgebiet wird durch $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $2 \le k \le 3$ und $0 \le m \le 4$ beschrieben.

Prüfen Sie rechnerisch, ob das Flugzeug F_2 das Sperrgebiet überfliegt. (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$$\begin{pmatrix}12{,}4\\17\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-11\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2{,}2\\4\\0{,}6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{l}t=7\\\wedge\ \ t=7\\\wedge\ \ z=0{,}6t\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{l}t=7\\\wedge\ \ t=7\\\wedge\ \ z=4{,}2\end{array}$$

$\Delta z=4{,}2-1{,}3=2{,}9$

Die Bergspitze wird nach 7 Minuten in einem Abstand von 2,9 Kilometern überflogen.

Der Steigungswinkel des Flugzeugs beträgt ungefähr 7,5°. (Mehrere Lösungsmöglichkeiten, z. B. Anwendung des Tangens (rechtwinkl. Dreieck), mit Hilfe des Skalarprodukts)

Modelllösung b)

Gleichsetzen der Geradengleichungen von F_1 und F_2 ergibt:

$$\begin{pmatrix}-3\\-11\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2{,}2\\4\\0{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\15\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{lrcrcr}&2{,}2t&-&4s&=&3\\\wedge&4t&+&3s&=&26\\\wedge&0{,}6t&&&=&4\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{lrcl}&s&=&2\\\wedge&t&=&5\\\wedge&t&=&\frac{20}{3}\end{array}\quad ↯$$

Die Flugbahnen von F_1 und F_2 schneiden sich nicht.

Zum Zeitpunkt $0\le t\le 15$ haben die Flugzeuge eine Entfernung von

$$\left|\left(\begin{pmatrix}-3\\-11\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2{,}2\\4\\0{,}6\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}0\\15\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix}-3-1{,}8t\\-26+7t\\-4+0{,}6t\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-3-1{,}8t)^2+(-26+7t)^2+(-4+0{,}6t)^2}\ .$$

Für die Funktion d mit $d(t)=(-3-1{,}8t)^2+(-26+7t)^2+(-4+0{,}6t)^2$ (Radikand) gilt:

$d(t)>0$ für $0\le t\le 15$, d besitzt an der Stelle $t\approx 3{,}4$ ein relatives Minimum (übliches Verfahren), also einen Tiefpunkt *T*(3,4/91,856). Es ist *d*(0) = 701 und *d*(15) = 7166, damit haben die Flugzeuge 3,4 Minuten nach Start von F_1 den geringsten Abstand voneinander, er beträgt $\sqrt{d(3{,}4)}=\sqrt{91{,}856}\approx 9{,}58$ [km].

Längenbestimmung des Richtungsvektors $\vec{u}$ der Geraden *h*:

$$|\vec{u}|=\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}=5\left[\frac{\text{km}}{\text{min}}\right].$$

$v=5\cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=300\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Das Flugzeug F_2 fliegt mit einer Geschwindigkeit von $300\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Modelllösung c)

$$h': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von h' mit der Geraden g ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \wedge \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & 5 \end{array}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten S(8/9/3).

Für $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ist $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -113 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Die Koordinatenform des Flugkorridors lautet: $E: 9x_1 + 12x_2 - 113x_3 + 159 = 0$.

Es kommt **nicht** zu einer Kollision, da die Flugzeuge zu verschiedenen Zeitpunkten am Punkt S sind. F_1 passiert den Punkt S drei Minuten später gegenüber F_2.

Modelllösung d)

Übergang in die x_1-x_2-Ebene: Angabe der Spurgeraden zu h.

Gleichsetzen der Spurgeradengleichung von F_2 mit der Ebenengleichung ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \wedge \begin{array}{rcrcl} 4s & = & 12 & - & k \\ -3s & = & -17 & + & m \end{array}$$

Wird das Sperrgebiet überflogen, muss gelten:

$$s = 3 - \frac{k}{4} \ \wedge \ m = 8 + \frac{3k}{4} \ \wedge \ 2 \le k \le 3 \ \wedge \ 0 \le m \le 4$$

Das Sperrgebiet wird **nicht** überflogen, da die Bedingung $m = 8 + \frac{3k}{4}$ mit

$2 \le k \le 3 \ \wedge \ 0 \le m \le 4$ nicht erfüllbar ist. Für $2 \le k \le 3$ gilt: $\frac{19}{2} \le m \le \frac{41}{4}$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die Zeitdauer in Minuten bis zum Überflug der Bergspitze.	4 (I)
2	ermittelt den Abstand des Flugzeugs zur Bergspitze.	3 (II)
3	berechnet das Maß des Steigungswinkels.	2 (I)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet nach Gleichsetzen der Geradengleichungen Lösungen für die Parameter.	4 (I)
2	weist mittels der widersprüchlichen Ergebnisse (Parameter) nach, dass sich die Flugbahnen nicht schneiden.	4 (II)
3	ermittelt den minimalen Abstand.	5 (II)
4	ermittelt die Länge des Richtungsvektors von *h*.	3 (I)
5	ermittelt die Geschwindigkeit von F_2.	3 (II)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die Gleichung der neuen Flugbahn an.	2 (I)
2	weist nach, dass sich die Flugbahnen in $S(8/9/3)$ schneiden.	4 (II)
3	berechnet die Gleichung der Ebene (Flugkorridor).	4 (I)
4	beurteilt die Kollisionsgefahr der beiden Flugzeuge.	2 (II)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt im Lösungsansatz den Übergang zur Spurgeraden und zur Spurebene (in der x_1-x_2-Ebene) an.	2 (I)
2	ermittelt nach Gleichsetzung der Spurgeraden- und der Spurebenengleichung die Abhängigkeiten der Parameter m, k und (bspw.) s.	4 (II)
3	prüft die erhaltenen Beziehungen der Parameter auf Zulässigkeit.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Zeitdauer …	4 (I)			
2	ermittelt den Abstand …	3 (II)			
3	berechnet das Maß …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet nach Gleichsetzen …	4 (I)			
2	weist mittels der …	4 (II)			
3	ermittelt den minimalen …	5 (II)			
4	ermittelt die Länge …	3 (I)			
5	ermittelt die Geschwindigkeit …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**19**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die Gleichung …	2 (I)			
2	weist nach, dass …	4 (II)			
3	berechnet die Gleichung …	4 (I)			
4	beurteilt die Kollisionsgefahr …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt im Lösungsansatz …	2 (I)			
2	ermittelt nach Gleichsetzung …	4 (II)			
3	prüft die erhaltenen …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0