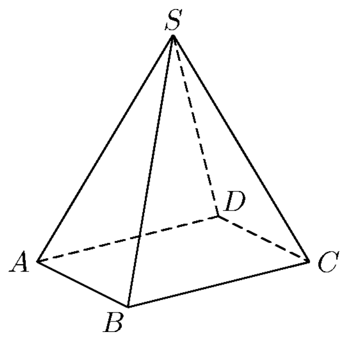
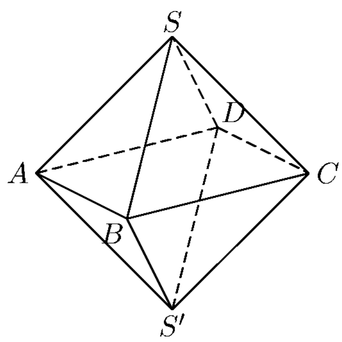
5L1 Mathematik (Kg) **Name:** ____________________

Nachklausur **14. Dezember 2009**

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Punkte $A = (0, 3, 3)$, $B = (3, 0, 3)$, $C = (6, 3, 3)$.
a) Zeigen Sie, dass A, B, C drei Ecken eines Quadrates $ABCD$ sind, und bestimmen Sie D. Welche Kantenlänge hat das Quadrat?
b) Bestimmen Sie alle möglichen Spitzen von *geraden* Pyramiden mit der Grundfläche $ABCD$ (vgl. linke Skizze). [Ein mögliches Ergebnis: $S_t = (3, 3, 3 + 2t)$ mit $t \neq 0$.]





c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat die Pyramide $ABCDS_t$ die Höhe 6? Wie lang sind dann die Kanten dieser Pyramide?
d) Bestimmen Sie eine Pyramide $ABCDS$, deren sämtliche Kanten gleich lang sind. [Ein mögliches Ergebnis: $S = (3, 3, 6)$.]
e) Bestimmen Sie zur Pyramide $ABCDS$ aus d) einen Punkt S' so, dass sich ein *regelmäßiges Oktaeder* (siehe rechte Skizze) ergibt, d. h. so dass alle Kanten des Oktaeders gleich lang sind.
f) Welche besondere Eigenschaft hat dann das Viereck $ASCS'$?

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Punkte $A = (4, -4, 4)$, $B = (2, 4, -2)$ sowie eine Schar von Punkten $C_a = (2a - 3, 5a, 6a + 3)$ ($a \in \mathbb{R}$).
a) Zeigen Sie, dass die Gesamtheit aller Punkte C_a mit $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade h bilden, und geben Sie eine Parameterdarstellung für h an.
b) Zeigen Sie, dass die Gerade $g = g(A, B)$ durch A, B und die Gerade h windschief sind, und bestimmen Sie ihren Abstand. Welche Punkte dieser beiden Geraden haben den kleinsten Abstand voneinander?
c) Es sei $e_a = e(A, B, C_a)$ die Ebene, in der das Dreieck ABC_a liegt. Welche dieser Ebenen wird von der Geraden h orthogonal geschnitten? Welches ist der Schnittpunkt?
d) Der Punkt C_a wird an der Ebene e_0 gespiegelt. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt. Warum liegt dieser auf h?

– bitte wenden –

Aufgabe 3:

Die Umgebung eines Flughafens wird in einem dreidimensionalen Koordinatensystem so beschrieben, dass die ebene Landschaft die x_1-x_2-Ebene darstellt. Die Längeneinheit beträgt dabei 1 km. Im Folgenden werden Flugbewegungen vereinfacht dargestellt.
Beim Abheben eines Flugzeugs F_1 im Punkte $P = (-10, -14, 0)$ von der Startbahn geht das Flugzeug für 20 Minuten in eine geradlinige Flugbahn g über:

$$g: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich in diesem Zeitraum längs der Geraden h mit

$$h: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt t in beiden Fällen die Zeit in Minuten an, die seit dem Start des Flugzeugs F_1 vergangen sind.
a) In welchen Höhen und welchem Abstand voneinander befinden sich die beiden Flugzeuge drei Minuten nach dem Start von F_1?
b) Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1. Was kann man über die Flugbahn des Flugzeugs F_2 sagen?
c) Wann und in welcher Höhe überfliegt das Flugzeug F_1 den Gipfel $G = (2, 2, 1)$ eines nahegelegenen Berges?
d) Überprüfen Sie, ob das Flugzeug F_1 *zu jeder Zeit* von der Bergspitze den vorgeschriebenen Mindestabstand von 1 km einhält.
e) Überprüfen Sie, ob die beiden Flugrouten g und h den vorgeschriebenen Mindestabstand von 1 km einhalten.

Viel Erfolg!

Nachklausur — Lösungen

1) a) ABC bildet ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B, denn

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Da beide rechtwinkligen Kantenvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleiche Länge $3\sqrt{2}$ haben, kann man ABC zu einem Quadrat ergänzen. Man wähle D so, dass $ABCD$ ein Parallelogramm bilden, also $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ D = (3,6,3)\,.$$

Die Kantenlänge des Quadrates ist $3\sqrt{2}$.

b) Wir bestimmen den Mittelpunkt M des Bodenquadrates als Mittelpunkt der Diagonale durch A und C: $M = (3,3,3)$. Da die Pyramide *gerade* sein soll, muss $\overrightarrow{MS}$ senkrecht sein zur Bodenebene. Wir bestimmen einen Normalenvektor zur Bodenebene (entweder mit dem Vektorprodukt oder) durch die Beobachtung: Da alle drei Punkte A, B, C dieselbe dritte Koordinate 3 haben, liegen sie in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3$. Diese ist parallel zur x_1-x_2-Ebene und hat als Normalenvektor $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also gilt

$$\overrightarrow{MS} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3+r \end{pmatrix}.$$

Mit $r = 2t$ erhalten wir das Kontrollergebnis.

c) Wir benutzen *nicht* das Kontrollergebnis, sondern setzen $S_r = (3,3,3+r)$. Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{MS_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$, also $|r|$. Die Höhe 6 erhält man für $r = \pm 6$, also die Punkte $S_6 = (3,3,9)$ und $S_{-6} = (3,3,-3)$.
Die Kanten des Bodenquadrates sind bereits berechnet ($3\sqrt{2}$) und die anderen Kanten haben (aus Symmetriegründen) alle die Länge

$$|\overrightarrow{AS_6}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{5}\,.$$

d) Damit alle Kantenvektoren gleich lang sind, muss $\overrightarrow{AS_r}$ die Kantenlänge $3\sqrt{2}$ des Bodenquadrates haben:

$$|\overrightarrow{AS_r}| = 3\sqrt{2} \iff 18 = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\right|^2 = 9 + r^2 \iff r^2 = 9 \iff r = \pm 3\,.$$

(Einzig) Mögliche Spitzen einer solchen gleichmäßigen Pyramide sind $S = S_3 = (3,3,6)$ und $T = S_{-3} = (3,3,0)$.

e) Der gesuchte Punkt S' ist genau der Punkt $T = S_{-3}$, da S und T beide auf der Senkrechten zu e durch M liegen und denselben Abstand $|r| = 3$ zur Ebene e haben.

f) Das Viereck ist zunächst ein Parallelogramm, denn

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{S'C}\,.$$

Das Parallelogramm ist ein Rechteck, da $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu $\overrightarrow{AS'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist (Skalarprodukt ist 0). Schließlich ist dieses Rechteck ein Quadrat, da alle Kanten des Oktaeders gleich lang sind.

2) a) Für die Ortsvektoren $\overrightarrow{OC_a}$ der gegebenen Punkteschar erhält man die folgende Darstellung

$$\overrightarrow{OC_a} = \begin{pmatrix} 2a-3 \\ 5a \\ 6a+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Parameterdarstellung einer Geraden, nämlich der Geraden h durch den Punkt $(-3,0,3)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Also bilden alle Punkte C_a diese Gerade h mit obiger Parameterdarstellung.

b) Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ von h und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ von g sind orthogonal zueinander, die beiden Geraden also keinesfalls parallel.

Wir bestimmen die Fußpunkte eines gemeinsamen Lotes, also einen Punkt $G \in g(A,B)$ und $C_a \in h$ mit $\overrightarrow{GC_a} \perp g, h$:

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OC_a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{GC_a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GC_a} \perp \overrightarrow{AB} &\iff 0 = \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \\
&\iff 0 = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \\
&\iff 0 = 52 - 104r \iff r = \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{GC_a} \perp \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} \iff 0 = \left(\begin{pmatrix} -7\\4\\-1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2\\8\\-6 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix}$$

$$\iff 0 = \begin{pmatrix} -7\\4\\-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} -2\\8\\-6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix}$$

$$\iff 0 = 65a \iff a = 0\,.$$

(Das Gleichungssystem war besonders einfach zu lösen, weil die beiden Richtungsvektoren der Geraden orthogonal zueinander waren, so dass in jeder Gleichung jeweils eine Unbekannte direkt herausfiel.)

Die Punkte auf den beiden Geraden, die den kürzesten Abstand voneinander haben, sind der Punkt $C_0 = (-3, 0, 3)$ und (wegen $r = \frac{1}{2}$) der Mittelpunkt $M_{AB} = (3, 0, 1)$ zwischen A und B. Da der kürzeste Abstand > 0 ist, schneiden sich die Geraden nicht, sind also windschief. Der Abstand der windschiefen Geraden ist $|\overrightarrow{M_{AB}C_0}| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$.

c) Gesucht ist die Ebene e_a, für die der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix}$ von h ein Normalenvektor ist, d. h. gesucht ist a mit $\begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ (ist bereits gezeigt, siehe oben) und zu $\overrightarrow{AC_a}$:

$$0 = \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{AC_a} = \begin{pmatrix} 2\\5\\6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2a-7\\5a+4\\6a-1 \end{pmatrix} = 65a \iff a = 0\,.$$

Die Gerade h ist also zur Ebene e_0 orthogonal. Der Schnittpunkt von h mit e_0 ist C_0, denn $C_0 \in e_0$ und $C_0 \in h$.

d) Der Punkt C_a liegt auf h und h ist orthogonal zu e_0, also liegt der Spiegelpunkt von C_a bzgl. e_0 auch auf h.

3) a) Da die Bodenebene die x_1-x_2-Ebene ist, gibt die x_3-Koordinate eines Punktes seine Höhe über der Bodenebene an. Flugzeug F_2 fliegt also in konstanter Höhe 4 km, während die Höhe von F_1 nach 3 Minuten $x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5$ Kilometer beträgt. Die Positionen der Flugzeuge nach 3 Minuten und ihr Abstand sind

$$\begin{aligned} F_1 :&\quad \begin{pmatrix} -10\\-14\\0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3\\4\\\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\-2\\1{,}5 \end{pmatrix}, \\ F_2 :&\quad \begin{pmatrix} 0\\16\\4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4\\-3\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\\7\\4 \end{pmatrix} \\ \text{Abstand} :&\quad \sqrt{13^2 + 9^2 + 2{,}5^2} \approx 16{,}01 \end{aligned}$$

b) Wir berechnen den Winkel zwischen dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3\\4\\\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ der Flugbahn von F_1 und der Bodenebene. Diese ist die x_1-x_2-Ebene, also $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor. Für den gesuchten Winkel α gilt also

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3^2+4^2+(\frac{1}{2})^2\cdot 1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{101}{4}}} \implies \alpha = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{101}}) \approx 5{,}7^0\,.$$

c) Wir bestimmen zunächst, wann sich das Flugzeug F_1 über dem Punkt $(2,2)$ der Bodenebene befindet und in welcher Höhe h es dann fliegt:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-14\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \iff 12 = 3t \wedge 16 = 4t \wedge h = \frac{t}{2} \iff t = 4 \wedge h = 2\,.$$

Also befindet sich das Flugzeug F_1 4 Minuten nach dem Start über dem Berggipfel in einer Flughöhe von 2 km, also 1 km über dem Gipfel.
d) Wir bestimmen den Punkt auf der Flugbahn von F_1, der von der Bergspitze $S = (2,2,1)$ den geringsten Abstand hat. Dies ist der Lotfußpunkt F auf der Flugbahn:

$$\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix}-10\\-14\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-16\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{SF} \perp \begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \iff 0 = \overrightarrow{SF}\bullet\begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -100{,}5 + t\cdot\frac{101}{4} \iff t = \frac{402}{101}$$

Zu diesem Zeitpunkt $t \approx 3{,}98$ Minuten nach dem Start hat das Flugzeug F_1 den geringsten Abstand zur Bergspitze; er ist die Länge des Vektors

$$\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix}-12\\-16\\-1\end{pmatrix} + \frac{402}{101}\begin{pmatrix}3\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{101}\begin{pmatrix}-6\\-8\\100\end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$\frac{1}{101}\cdot\sqrt{36+64+10000} = \frac{\sqrt{10100}}{101} = \frac{10}{\sqrt{101}} \approx 0{,}995\,.$$

Flugzeug F_1 nähert sich also der Bergspitze bis auf 995 m; der Mindestabstand wird nicht eingehalten.
d′) Alternative Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden im Raum ohne Bestimmung des Lotfußpunktes (vgl. 5L1 1. Klausur, Aufgabe 1).

Der Abstand eines Punktes S von einer Geraden $g(A,B)$ ist die Höhe des Dreiecks ABS und daher der Quotient aus Dreiecksfläche und halber Grundseite.

Da man die Dreiecksfläche als halbe Parallelogrammfläche mit Hilfe des Vektorproduktes berechnen kann, erhält man (für Punkte $A \neq B$ und S im Raum)

$$d(S, g(A,B)) = \frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}\,.$$

In unserem Falle $S = (2,2,1)$, $A = (-10,-14,0)$ sowie $\overrightarrow{AB} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt den Abstand

$$d(S, g(A,B)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{101}} = \frac{10}{\sqrt{101}}\,.$$

e) Wir bestimmen den kürzesten Abstand der beiden Flugrouten. Dieser wird für die Punkte P_1 bzw. P_2 auf den Flugrouten angenommen, deren Verbindungsvektor zu beiden Routen orthogonal ist:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$0 = \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -50 + 25r \iff r = 2\,,$$

$$0 = \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 152 - \frac{101}{4}s \iff s = \frac{608}{101}\,.$$

Der Abstand der beiden Flugrouten ist daher die Länge des Vektors

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{608}{101}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat die Länge $\frac{10}{\sqrt{101}} \approx 0{,}995$ (s. o.). Der Mindestabstand ist mit 995 m geringfügig unterschritten.