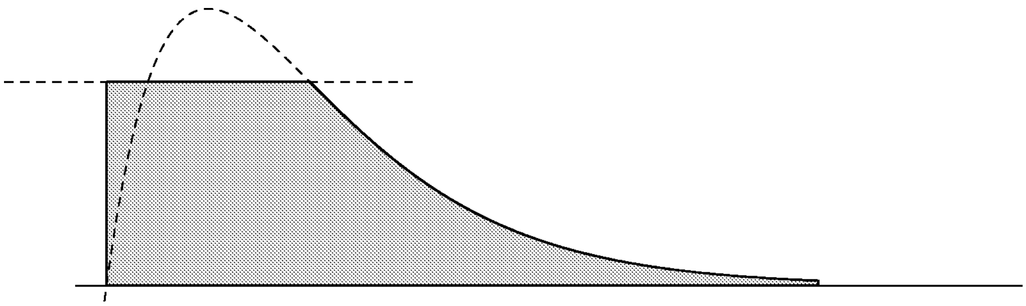
**6L1 Mathematik (Kg)** **Name:** ____________________

**Vorklausur** **12. März 2010**

**Die Klausur umfasst 3 Aufgaben auf je einer Seite!**

50 P. **Aufgabe 1:**

In einem Skatepark soll eine neue Sprungrampe aus Beton gegossen werden.



Der Rand des Querschnitts dieser Rampe wird beschrieben durch horizontale und vertikale Geraden sowie den Graphen einer Funktion

$$f_{a,b}(x) = (x+a)e^{b-x} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

a) (9 P.) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern $a, b$ die Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen sowie das Verhalten an den Definitionsrändern.*

b) (12 P.) *Untersuchen Sie die Funktionen $f_{a,b}$ auf Monotonie und bestimmen Sie das absolute Maximum. Leiten Sie eine Bedingung dafür her, dass der Hochpunkt auf der $y$-Achse liegt.* [Zur Kontrolle: $a = 1$.]

Im Folgenden werden nur die Funktionen $f_{1,b}$ der Schar betrachtet, deren Hochpunkt auf der $y$-Achse liegt.

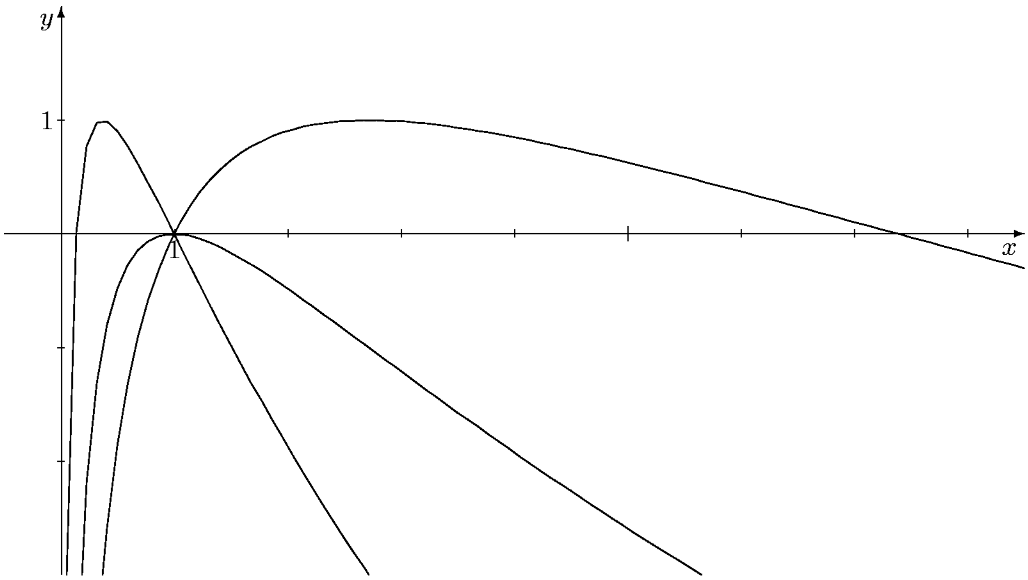
c) (16 P.) Die horizontale Gerade, die die Rampe auf der Oberseite begrenzt, schneidet den Graphen auf der rechten Anfahrtsseite an seiner steilsten Stelle.
*Bestimmen Sie die Breite der Rampe an der Oberseite und die Höhe der Rampe in Abhängigkeit von $b$.*
Damit der Skater bei Anfahrt von rechts möglichst weit springen kann, soll im Absprungpunkt der Steigungswinkel $45^0$ betragen.
*Wie muss man $b$ wählen, damit dies der Fall ist? Wie hoch ist dann die Rampe?*
[Zur Kontrolle: $b = 1$.]

d) (13 P.) Zur Ermittlung des Materialbedarfes wird die Querschnittsfläche der Rampe benötigt. *Bestimmen Sie diese, wenn die Form der Rampe alle oben genannten Bedingungen erfüllt und am Boden die Breite 7 hat.*

**Aufgabe 2:** bitte wenden!

50 P. **Aufgabe 2:**

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a$ durch $f_a(x) = (a - \ln x) \cdot \ln x$ $(a \in \mathbb{R})$. Die nachfolgende Skizze zeigt die Graphen von $f_0$, $f_2$ und $f_{-2}$.




a) (10 P.) *Geben Sie den Definitionsbereich von $f_a$ an und bestimmen Sie das Verhalten von $f_a$ an den Definitionsrändern.*
*Zeigen Sie, dass alle Graphen die x-Achse im Punkt $(1, 0)$ schneiden, und bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte mit der x-Achse in Abhängigkeit von a.*
*Beschriften Sie die Graphen mit den zugehörigen Funktionen.*

b) (12 P.) *Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionenschar als Extrempunkt jeweils nur den Hochpunkt $H_a = (e^{\frac{a}{2}}, \frac{a^2}{4})$ besitzen.*
*Bestimmen Sie eine Funktion, auf deren Graphen alle Hochpunkte $H_a$ $(a \in \mathbb{R})$ liegen.*

c) (12 P.) Die Tangenten an die Graphen von $f_{-2}$ und $f_2$ im Punkt $(1, 0)$ bilden mit der Geraden durch die Hochpunkte der Graphen von $f_{-2}$ und $f_2$ ein Dreieck. *Ergänzen Sie die Skizze. Bestimmen Sie Gleichungen für die Tangenten und ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.*

d) (16 P.) *Bestimmen Sie mit Hilfe der partiellen Integration eine Stammfunktion für $f_a$.* (Eine Stammfunktion für $\ln x$ kann der Formelsammlung entnommen werden.)
[Kontrollergebnis: $F_a(x) = (a + 2)x \cdot (\ln(x) - 1) - x \cdot (\ln(x))^2$.]
*Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Fläche, die der Graph von $f_a$ mit der x-Achse einschließt. Spezialisieren Sie Ihr Ergebnis für die drei skizzierten Graphen $f_2$, $f_0$ und $f_{-2}$.*

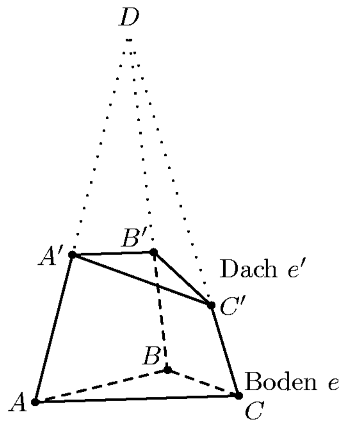
**Aufgabe 3:** nächstes Blatt!

50 P. **Aufgabe 3:**

Gegeben sind 6 Punkte

$$A = (5,2,1)\,,\ B = (-3,6,7)\,,\ C = (1,-1,6) \quad \text{und}$$
$$A' = (3,2,2)\,,\ B' = (-2,5,6)\,,\ C' = (1,0,5)\,.$$

a) (15 P.) *Zeigen Sie, dass diese 6 Punkte einen Tetraederstumpf bilden* (siehe Skizze) *und bestimmen Sie die fehlende Spitze $D$.* [Kontrollergebnis: $D = (1,2,3)$.] *Bestätigen Sie rechnerisch, dass die gegenseitige Lage der Punkte der Skizze entspricht, d. h. $ABC$ bilden die Bodenebene $e$ und $A'B'C'$ die Dachfläche $e'$.*




b) (12 P.) *Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Bodenebene $e$.* [Kontrollergebnis: $19x + 8y + 20z = 131$]
*Welcher der Punkte $A'$, $B'$, $C'$ hat den größten Abstand von der Bodenebene?*
c) (12 P.) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche $ACC'A'$ des Stumpfes sowie den Winkel zwischen dieser Seitenfläche und dem Boden.*
d) (11 P.) *Welches Volumen hat der Tetraederstumpf?*

*Viel Erfolg!*

**Vorklausur — Lösungen**

1) a) Es ist $f_{a,b}(0) = ae^b$, also $S_y = (0, ae^b)$ der Schnittpunkt mit der $y$-Achse. Wegen $e^{b-x} > 0$ für alle $x$ gilt:

$$f_{a,b}(x) = 0 \iff x + a = 0 \iff x = -a\,.$$

Die Funktionen haben jeweils nur den (einzigen) Schnittpunkt $N = (-a, 0)$ mit der $x$-Achse.
Die Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, die Definitionsränder also $\pm\infty$. Das Verhalten für $x \to \infty$ ergibt sich aus dem Satz von de l'Hospital, demzufolge die Exponentialfunktion die Polynomterme dominiert:

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{(x+a)}_{\to\infty}\underbrace{e^{b-x}}_{\to 0} = 0 \quad \text{(nach dem Satz von de l'Hospital)}\,.$$

Für $x \to -\infty$ gilt $b - x \to \infty$, also $e^{b-x} \to \infty$ und daher

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x+a)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{b-x}}_{\to\infty} = -\infty\,.$$

b) Wir berechnen die Ableitung (mit Produkt- und Kettenregel):

$$f'_{a,b}(x) = e^{b-x} + (x+a)e^{b-x}\cdot(-1) = e^{b-x}(1-a-x)\,,$$

Wegen $e^{b-x} > 0$ ist die Vorzeichenverteilung der Ableitung durch den linearen Faktor bestimmt:

$$f'_{a,b}(x)\begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \iff 1-a-x\begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \iff x\begin{cases} < 1-a \\ = 1-a \\ > 1-a \end{cases}.$$

Damit ist die Monotonie der $f_{a,b}$ bestimmt:

$$f_{a,b}\begin{cases} \text{streng monoton steigend} & \text{für } x \le 1-a, \\ \text{streng monoton fallend} & \text{für } x \ge 1-a. \end{cases}$$

Dies zeigt zugleich, dass $1-a$ die einzige Extremstelle, und zwar eine Maximalstelle ist. Da es die einzige Extremstelle ist, hat $f_{a,b}$ dort sein absolutes Maximum $f_{a,b}(1-a) = e^{b+a-1}$. Damit der Hochpunkt auf der $y$-Achse liegt, muss die Maximalstelle $1-a=0$ sein, also $a = 1$.
c) Auf der rechten Anfahrtsseite ist der Anstieg der Funktion stets negativ. Die steilste Stelle ist also die Stelle des absoluten *Minimums* der Ableitung $f'_{1,b}$ im Bereich $x > 0$. Wir bestimmen zunächst die *lokalen* Extrema von $f'_{1,b}$, das sind die Wendestellen von $f_{1,b}$:

$$f''_{a,b}(x) = -e^{b-x}(1-a-x) + e^{b-x}\cdot(-1) = e^{b-x}(x+a-2)\,,\quad f''_{1,b}(x) = (x-1)e^{b-x}\,.$$

Damit hat $f''_{1,b}$ nur eine Nullstelle bei $x = 1$, und dort liegt ein VZW von $-$ zu $+$ vor, da der Exponentialfaktor postiv ist und daher $x - 1$ das Vorzeichen von $f''_{1,b}$ bestimmt. $+1$ ist also die einzige Extremstelle von $f'_{1,b}$, und zwar ein Minimum. Da es nur eine Extremstelle gibt, liegt hier auch das *absolute* Minimum von $f'_{1,b}$ und damit die steilste Stelle mit *negativem* Anstieg.
Damit erhält man für die obere Breite der Rampe den Abstand der $x$-Koordinaten der Nullstelle $-a = -1$ und der Wendestelle $+1$ von $f_{1,b}$: Die obere Breite ist damit 2. Die Höhe der Rampe ist der Wert von $f_{1,b}$ an der Wendestelle:

$$f_{1,b}(1) = 2e^{b-1}\,.$$

Damit an der Absprungstelle 1 der Steigungswinkel $45^0$ beträgt, muss die Funktion dort den Anstieg $-1$ haben:

$$-1 = f'_{1,b}(1) = e^{b-1}(-1) \iff e^{b-1} = 1 \iff b - 1 = 0 \iff b = 1\,.$$

Die Höhe der Rampe beträgt dann $h = 2e^{b-1} = 2e^{1-1} = 2$.
d) Bestimmung einer Stammfunktion für $f(x) = f_{1,1}(x) = (x + 1)e^{1-x}$ mittels partieller Integration:

$$\int_c^d \underbrace{(x+1)}_{v(x)}\underbrace{e^{1-x}}_{u'(x)}\,dx = \Big[-e^{1-x}\cdot(x+1)\Big]_c^d - \int_c^d (-e^{1-x})\,dx = \Big[-(x+1)e^{1-x} - e^{1-x}\Big]_c^d,$$

also ist $F(x) = -(x + 2)e^{1-x}$ eine Stammfunktion für $f = f_{1,1}$.
Wir zerteilen die Querschnittsfläche an der Wendestelle in zwei Teile, ein Rechteck der Breite 2 sowie der Höhe 2 (wie oben bestimmt), also der Fläche 4. Das zweite Teilstück ist die Fläche unter dem Graphen von $f$ in den Grenzen von 1 bis 6 (da die Gesamtbreite 7 sein soll). Da $f_{1,1}(x)$ im betrachteten Intervall positiv ist, erhalten wir

$$A = \int_1^6 (x + 1)e^{1-x}\,dx = \Big[-(x + 2)e^{1-x}\Big]_1^6 = -8e^{-5} + 3 \approx 2{,}95\,.$$

Die Querschnittsfläche insgesamt beträgt also $7 - 8e^{-5} \approx 6{,}95$.

2) a) Wegen des Terms $\ln x$ hat $f_a(x)$ als Definitionsbereich nur die positiven reellen Zahlen: $\mathbb{D}_{f_a} = ]0, \infty[$. Aus den bekannten Grenzwerten $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ ergeben sich für $f_a$ die Randgrenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{(a - \ln x)}_{\to-\infty}\underbrace{\ln x}_{\to\infty} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0} \underbrace{(a - \ln x)}_{\to\infty}\underbrace{\ln x}_{\to-\infty} = -\infty\,.$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f_a(x) = 0 &\iff a - \ln x = 0 \ \lor\ \ln x = 0 \\ &\iff \ln x = a \ \lor\ \ln x = 0 \iff x = e^a \ \lor\ x = 1\,. \end{aligned}$$

Damit ist sind $(1, 0)$ und $(e^a, 0)$ die Schnittpunkte mit der $x$-Achse.
Für $a = 0$ ergibt sich eine doppelte Nullstelle bei 1: $f_0(x) = -\ln^2 x$, also gehört der mittlere Graph zu $f_0$, während der linke Graph zu $f_{-2}$ (mit der Nullstelle $e^{-2} < 1$)

gehört und der rechte Graph zu $f_2$ (mit der Nullstelle $e^2 > 1$).
b) Berechnung der Ableitung mit der Produktregel:

$$f_a'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + (a - \ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{a - 2\ln x}{x}$$

Damit hat $f_a'$ nur eine Nullstelle:

$$f_a'(x) = 0 \iff a - 2\ln x = 0 \iff \ln x = \frac{a}{2} \iff x = e^{\frac{a}{2}}\,.$$

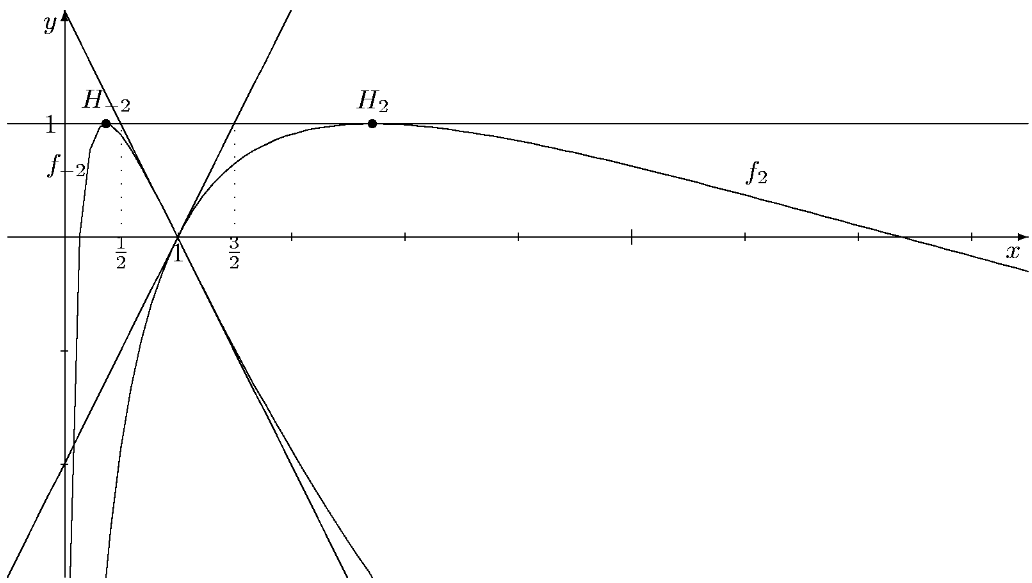
Wegen $x > 0$ ist das Vorzeichen von $f_a'$ gleich dem Vorzeichen von $a - 2\ln x$. Da $-\ln x$ streng monoton fällt, findet an der Nullstelle ein VZW von $+$ zu $-$ statt, also hat $f_a$ bei $e^{\frac{a}{2}}$ ein Maximum. Wegen $f_a(e^{\frac{a}{2}}) = (a - \frac{a}{2}) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ erhält man den Hochpunkt wie angegeben.
Zur Bestimmung der Ortskurve aller Hochpunkte eliminieren wir den Parameter $a$:

$$x = e^{\frac{a}{2}} \iff a = 2\ln x \implies y = \frac{a^2}{4} = \frac{4\ln^2 x}{4} = \ln^2 x\,.$$

Damit liegen alle Hochpunkte auf dem Graphen von $g(x) = \ln^2 x$.
c) Die Anstiege der Tangenten an der Stelle 1 sind

$$f_a'(1) = \frac{a - 2 \cdot 0}{1} = a\,,$$

also $+2$ für die eine und $-2$ für die andere Tangente.




Die Tangentengleichungen sind demnach

$$t_2(x) = 2(x-1)\,,\ t_{-2}(x) = -2(x-1)\,.$$

Die Hochpunkte von $f_2$ und $f_{-2}$ sind $H_2 = (e, 1)$ und $H_{-2} = (e^{-1}, 1)$. Die Gerade durch die beiden Hochpunkte hat also die Gleichung $y = 1$. Sie schneidet die Tangenten an den Stellen:

$$2(x-1) = 1 \iff x = \frac{3}{2} \quad \text{bzw.} \quad -2(x-1) = 1 \iff x = \frac{1}{2}\,.$$

Damit hat das Dreieck die Höhe 1 und die Breite 1, also die Fläche $\frac{1}{2}$.
d) Laut Formelsammlung ist $x\ln x - x$ eine Stammfunktion für $\ln x$. Mittels partieller Integration erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\int_c^d \underbrace{(a-\ln x)}_{v(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{u'(x)} \, dx &= \Big[(a-\ln x)(x\ln x - x)\Big]_c^d - \int_c^d (-\frac{1}{x} \cdot (x\ln x - x)\, dx \\
&= \Big[(a-\ln x)(x\ln x - x)\Big]_c^d + \int_c^d (\ln x - 1)\, dx \\
&= \Big[(a-\ln x)(x\ln x - x) + (x\ln x - x) - x\Big]_c^d \\
&= \Big[ax\ln x - ax - x\ln^2 x + 2x\ln x - 2x\Big]_c^d, \\
&= \Big[(a+2)x(\ln x - 1) - x\ln^2 x\Big]_c^d,
\end{aligned}$$

also ist $F_a(x) = (a+2)x(\ln x - 1) - x\ln^2 x$ eine Stammfunktion für $f_a$.
Die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen von $f_a$, also 1 und $e^a$. Die gesuchte Fläche ist der Betrag des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^a} f_a(x)\, dx = \Big[F_a(x)\Big]_1^{e^a} &= \Big[(a+2)x(\ln x - 1) - x\ln^2 x\Big]_1^{e^a} \\
&= (a+2)\cdot e^a \cdot (a-1) - e^a \cdot a^2 + (a+2) \\
&= e^a(a^2 + a - 2 - a^2) + a + 2 = e^a(a-2) + a + 2\,.
\end{aligned}$$

Also $A_a = |e^a(a-2) + a + 2|$.
Für $a = 0$ ergibt sich $A_0 = |-2+2| = 0$ (in Übereinstimmung mit dem Graphen von $f_0$), für $a = -2$ ist $A_{-2} = |-4e^{-2}| = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$ und für $a = 2$ erhält man den glatten Wert $A_2 = 2 + 2 = 4$.

3) a) Wir zeigen, dass sich die drei Geraden $g(A, A')$, $g(B, B')$ und $g(C, C')$ in einem Punkt schneiden.

$$\begin{aligned}
X \in g(A, A') &\iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
X \in g(B, B') &\iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
X \in g(C, C') &\iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Schnittpunktsbestimmung von $g(A, A')$ und $g(C, C')$ (wegen der Nullen in den Richtungsvektoren):

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\iff\ & 2r = 4 \ \wedge\ t = 3 \ \wedge\ 1 + r = 6 - t \\
\iff\ & r = 2 \ \wedge\ t = 3 \ \wedge\ 3 = 3\,.
\end{aligned}$$

Die beiden Geraden schneiden sich also in einem Punkt $D$ mit den Koordinaten

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen, dass $D$ auch auf der Geraden $g(B, B')$ liegt:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s = 4\,.$$

Da die Parameterwerte von $D$ in allen drei Fällen größer als 1 sind, liegen die Punkte $A', B', C'$ (Parameterwerte 1) zwischen $A, B, C$ (Parameterwert 0) und $D$; also bildet $ABC$ das Bodendreieck und $A'B'C'$ das Dach.
b) Wir berechnen die Abstände mit Hilfe der Hesseschen Abstandsformel. Dazu bestimmen wir zunächst eine Gleichung der Bodenebene. Einen Normalenvektor erhalten wir durch das Vektorprodukt

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Koordinatengleichung hat daher die Form $19x + 8y + 20z = d$ und durch Einsetzen von $C$ erhalten wir $d = 19 - 8 + 20 \cdot 6 = 131$. Da in der Hesseschen Abstandsformel der Nenner unabhängig vom Punkt ist, genügt es die Zähler zu vergleichen. Diese sind die Beträge der nachfolgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} A': &\quad 19 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 20 \cdot 2 - 131 = -18\,, \\ B': &\quad 19 \cdot (-2) + 8 \cdot 5 + 20 \cdot 6 - 131 = -9\,, \\ C': &\quad 19 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 20 \cdot 5 - 131 = -12\,. \end{aligned}$$

Damit hat $A'$ den größten Abstand von der Bodenebene; er beträgt

$$d_{A'} = \frac{|-18|}{\sqrt{19^2 + 8^2 + 20^2}} = \frac{18}{\sqrt{825}} \approx 0{,}63$$

c) Man berechnet die Fläche des Seitenvierecks $ACC'A'$ als Summe von zwei Dreiecksflächen $ACC'$ und $AC'A'$.

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AC'} \times \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Vierecksfläche ist daher

$$A_{ACC'A'} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot 2 = 2\sqrt{9} = 6\,.$$

Der Winkel zwischen der Seitenfläche und dem Boden ist der spitze Winkel zwischen zwei Normalenvektoren. Wir haben bereits berechnet

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_2 = \vec{n}_{ACC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der gesuchte Winkel

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \arccos \frac{75}{5\sqrt{33} \cdot \sqrt{9}} = \arccos \frac{5}{\sqrt{33}} \approx \arccos 0{,}87 \approx 29{,}5^0\,.$$

d) Das Volumen des Tetraederstumpfes ist die Differenz zweier Tetraedervolumina. Diese betragen ein Sechstel des zugehörigen Spatvolumens und berechnen sich über das Spatprodukt.

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = 2\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -72\,,$$

$$(\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}) \bullet \overrightarrow{A'D} = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -18\,.$$

Das Volumen des Tetraederstumpfes beträgt also $\frac{1}{6} \cdot 72 - \frac{1}{6} \cdot 18 = 9$.