

Norbert Klingen

Darstellungstheorie

Vorlesung (4-stdg.)

Universität zu Köln SS 1978

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
§1 Lineare Darstellungen	4
a. Grundbegriffe	5
b. Satz von Maschke, Irreduzibilität	9
c. Das Lemma von Schur	13
§2 Charaktere	14
a. Grundbegriffe, der Hauptsatz	14
b. Folgerungen aus dem Hauptsatz	17
c. Die Orthogonalitätsrelationen	19
d. Die reguläre Darstellung	22
§3 Gruppentheoretische Anwendungen	24
a. Charakterwerte	24
b. Charaktertafeln	29
c. Burnsidess (p, q) -Theorem	35
d. Permutationsgruppen	37
§4 Induzierte Darstellungen.	45
a. Frobeniussches Reziprozitätsgesetz	45
b. Induzierte Darstellungen und Permutationsdarstellungen	50
c. Monomiale Darstellungen	52
d. Der Satz von Artin	54
e. Frobeniusgruppen	57
§5 Zerfällungskörper	60
a. Absolut irreduzible Darstellungen	60
b. Zerfällungskörper	62
c. Die Sätze von Brauer	64
d. Der Schurindex	65
§6 Abschließende Bemerkungen	68
a. Die Gruppenalgebra	68
b. Halbeinfache Ringe	69
Literaturhinweise	71

Einleitung

G. FROBENIUS entwickelte in den beiden letzten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts die *Darstellungstheorie* endlicher Gruppen. Zusammen mit I. SCHUR und W. BURNSIDE wurde diese Theorie schon bis 1911 (Erscheinungsjahr von W. Burnside: *Theory of groups of finite order*, 2. Aufl.) erstaunlich weit und abgerundet entwickelt. Aus ihr entsprangen eine Reihe von rein gruppentheoretischen Resultaten – bewiesen mit Hilfe von Gruppencharakteren. Um zwei zu nennen, die mit zwei der o. g. Mathematiker verbunden sind: Burnside's Resultat, daß Gruppen mit höchstens 2 Primteilern in ihrer Ordnung auflösbar sind, und Frobenius Beweis der Struktur der heute nach ihm benannten Frobeniusgruppen.

Eine neue Entwicklung in der Darstellungstheorie leitete 1929 EMMY NOETHER ein, die diese Theorie einbettete in das Studium von Moduln über Ringen bzw. genauer Algebren. Für den Aufbau dieser Vorlesung sollen jedoch nur elementare Kenntnisse der Algebra vorausgesetzt werden, wie sie etwa im Rahmen einer Grundvorlesung zur Linearen Algebra über Gruppen, Körper und Vektorräume bereitgestellt werden, so dass sie bereits im 2. Studiensemester gehört werden kann. Die Verbindung zur Theorie halbeinfacher Algebren wird am Ende der Vorlesung kurz entwickelt.

Etwa gleichzeitig mit E. Noethers Arbeiten und am gleichen Ort Göttingen wurde die Bedeutung der Darstellungstheorie für die Physik erkannt. Dieser unbestritten sehr wichtige Aspekt bleibt in dieser Vorlesung unberücksichtigt. Zum einen erforderte er eine eigene (Physik-) Vorlesung und davon abgesehen die Behandlung unendlich-dimensionaler Darstellungen. Letzteres erscheint mir ohne vorherige Kenntnis des endlichen Falles wenig sinnvoll.

Unser Thema soll also die Darstellungstheorie endlicher Gruppen sein auf der Basis nur elementarer Algebra-Kenntnisse.

§1 Lineare Darstellungen

Unter einer “Darstellung” einer Gruppe G versteht man zunächst einen Isomorphismus von der “abstrakten” Gruppe G auf eine “konkrete” Gruppe $\tilde{G}$; man “stellt” also eine gegebene Gruppe durch eine vertrautere, der Rechnung eher zugängliche Gruppe “dar”.

Aus den Anfangsgründen der Algebra kennt man bereits eine Darstellung für jede beliebige endliche Gruppe, nämlich die Darstellung von G als Permutationsgruppe auf der G unterliegenden Menge $\underline{G}$ (Satz von Cayley):

$$G \hookrightarrow \mathcal{S}(\underline{G}), \quad \sigma \mapsto (\tau \mapsto \sigma\tau).$$

Dieses Beispiel gibt einen Eindruck von dem, was man als “konkret” betrachtet, nämlich Gruppen, in denen man “rechnen” kann, wie etwa Permutationsgruppen (d. h. Untergruppen der symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_n$), Matrixgruppen (d. h. Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(K)$ über einem Körper K , etwa $\mathbb{C}$ o. ä.) Entscheidend für die Darstellungstheorie ist aber die zusätzliche Struktur, die bei Permutationsgruppen bzw. Matrixgruppen gegeben ist (Objekte, auf denen die Gruppe operiert, Vektorraumstruktur evtl. zusätzlich, außerdem ist $\mathrm{GL}_n(K)$ Einheitengruppe eines Ringes). Permutationsdarstellungen werden hier nicht so sehr im Vordergrund stehen, da sie sich den linearen Darstellungen unterordnen (siehe Abschnitt 3.d, p. 37).

Von der obigen vorläufigen “Definition” weicht man noch in folgendem Sinne ab. Eine Darstellung ist nicht notwendig ein Isomorphismus, sondern braucht nur ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$$

zu sein (siehe z. B. beim Satz von Cayley, dort ist die Surjektivität nicht gegeben).

Notationen und Vorbemerkungen aus der linearen Algebra:

Ist K ein Körper, V, W K -Vektorräume, so ist

$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)$ der K -Vektorraum aller K -Homomorphismen $V \rightarrow W$,

$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ die K -Algebra aller K -Endomorphismen von V ,

$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \mathrm{End}(V)^\times$ die Einheitengruppe der Endomorphismenalgebra, also die Automorphismengruppe von V .

Sind V bzw. W m - bzw. n -dimensional, so ist $\mathrm{Hom}(V, W) \simeq M_{n,m}(K)$ und für jede Wahl $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$ von Basen für V bzw. W ist ein Isomorphismus

$$\phi_w^v : \mathrm{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} M_{n,m}(K), \quad f \mapsto (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

definiert durch

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} w_i \quad (j = 1, \dots, m).$$

$$\text{Für } \left\{ \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ u & & v & & w \\ l & & m & & n \end{array} \begin{array}{l} \text{(Basen)} \\ \text{(Dimension)} \end{array} \right\} \text{ gilt } \left\{ \begin{array}{ccc} \phi_w^u(g \circ f) = & \phi_w^v(g) & \cdot & \phi_v^u(f) \\ \cap & \cap & & \cap \\ M_{n,l}(K) & M_{n,m}(K) & & M_{m,l}(K) \end{array} \right\} (*)$$

Insbesondere ist $\phi_v := \phi_v^v : \mathrm{End}(V) \xrightarrow{\sim} M_m(K)$ ein Ring- und damit $\phi_v : \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_m(K)$ ein Gruppenisomorphismus (eigentlich $\phi_v|_{\mathrm{GL}(V)}$).

a. Grundbegriffe

(1.1) Definition: Sei G eine Gruppe und K ein Körper.

- a) Eine (lineare) *Darstellung von G über K* ist ein Gruppenhomomorphismus

$$D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

von G in die allgemeine lineare Gruppe eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums $V \neq 0$. V heißt *Darstellungsraum* von D , $\dim_K V$ heißt *Grad* der Darstellung D .

- b) Eine *Matrixdarstellung von G über K* ist ein Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}_+$; n heißt *Grad* der Matrixdarstellung.

Anmerkungen:

- 1) Für jede Basis v von V bestimmt eine Darstellung D eine Matrixdarstellung

$$D_v := \phi_v \circ D : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K) \quad (n = \dim_K(V)).$$

Man nennt D_v eine (genauer: die durch v bestimmte) Matrixdarstellung zu D .

- 2) Matrixdarstellungen vom Grad n und lineare Darstellungen mit Darstellungsraum K^n sind dasselbe, wenn man $\mathrm{GL}(K^n)$ und $\mathrm{GL}_n(K)$ in kanonischer Weise identifiziert ($\phi_{\underline{e}} : \mathrm{GL}(K^n) \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)$, $\underline{e}$ die kanonische Basis).

- 3) Matrixdarstellungen zu einer linearen Darstellung D sind nicht eindeutig, vielmehr gilt: sind $M_1 = D_v$ und $M_2 = D_w$ zwei Matrixdarstellungen zu einer linearen Darstellung $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ vom Grade n , v, w Basen von V , so gibt es ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$M_2(\sigma) = T \cdot M_1(\sigma) \cdot T^{-1} \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

nämlich die Basiswechselmatrix

$$T = \phi_w^v(\mathrm{id}) = (t_{ij}), \quad v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} w_i \quad (j = 1, \dots, n).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus (*):

$$D_w(\sigma) = \phi_w^w(\mathrm{id} \circ D(\sigma) \circ \mathrm{id}) = \phi_w^v(\mathrm{id}) \cdot \phi_v^v(D(\sigma)) \cdot \phi_v^w(\mathrm{id}) = T \cdot D_v(\sigma) \cdot T^{-1}$$

Zwei Matrixdarstellungen zu derselben linearen Darstellung sind also äquivalent im Sinne der nachfolgenden

(1.2) Definition: Sei G eine Gruppe, K ein Körper, V_1, V_2 endlich-dimensionale K -Vektorräume und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+$.

- a) Zwei Matrixdarstellungen $M_i : G \rightarrow \mathrm{GL}_{n_i}(K)$ ($i = 1, 2$) heißen *äquivalent*, wenn $n_1 = n_2 =: n$ ist und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit

$$(*) \quad M_2(\sigma) = T \cdot M_1(\sigma) \cdot T^{-1} \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

- b) Zwei lineare Darstellungen $D_i : G \rightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ ($i = 1, 2$) heißen *äquivalent*, wenn ein Isomorphismus $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ existiert mit

$$D_2(\sigma) = \varphi \circ D_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

- c) Die Äquivalenzrelation wird mit jeweils mit $\sim$ und die Äquivalenzklassen durch eckige Klammern $[\dots]$ bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ D_1 \swarrow & & \searrow D_2 \\ \mathrm{GL}(V_1) & \xrightarrow[\varphi \circ \dots \circ \varphi^{-1}]{\sim} & \mathrm{GL}(V_2) \\ V_1 & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & V_2 \end{array}$$

Allgemein gilt:

(1.3) Bemerkung: Sei G eine Gruppe und K Körper. Die Klassen äquivalenter linearer Darstellungen von G über K entsprechen bijektiv den Klassen äquivalenter Matrixdarstellungen von G über K vermöge der Zuordnung

$$\mathcal{D} = [D] \mapsto \mathcal{M}(D) = \{D_{\underline{v}} \mid \underline{v} \text{ Basis von } V\}.$$

Dies bedeutet:

(i) Die verschiedenen Matrixdarstellungen $D_{\underline{v}}$ zu einer linearen Darstellung D bilden eine volle Äquivalenzklasse:

$$M \sim D_{\underline{v}} \iff M = D_{\underline{w}} \text{ für eine Basis } \underline{w} \text{ von } V.$$

(ii) Zwei lineare Darstellungen von G sind genau dann äquivalent, wenn sie identische Matrixdarstellungen besitzen:

$$F \sim D \iff F_{\underline{w}} = D_{\underline{v}} \text{ für geeignete Basen } \underline{v}, \underline{w}.$$

Beweis: Für (i) ‘ $\Leftarrow$ ’ siehe obige Anmerkung 3). (i) ‘ $\Rightarrow$ ’ ergibt sich genauso: Sei $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $M(\sigma) = T \cdot D_{\underline{v}}(\sigma) \cdot T^{-1}$ für alle $\sigma \in G$. Es sei $\underline{w}$ die Basis von V mit

$$T^{-1} = \phi_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\text{id}), \text{ explizit: } T^{-1} = (t'_{ij}) \implies w_j = \sum_{i=1}^n t'_{ij} v_i.$$

Dann gilt wie oben bei 3)

$$M(\sigma) = T \cdot D_{\underline{v}}(\sigma) \cdot T^{-1} = \phi_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\text{id}) \cdot \phi_{\underline{v}}^{\underline{v}}(D(\sigma)) \cdot \phi_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\text{id}) = \phi_{\underline{w}}^{\underline{w}}(\text{id} \circ D(\sigma) \circ \text{id}) = D_{\underline{w}}(\sigma).$$

(ii) ‘ $\Rightarrow$ ’: Seien $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$, $F : G \rightarrow \text{GL}(W)$ und $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ mit $F = \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}$. Zu einer beliebigen Basis $\underline{v}$ von V wählen wir die Basis $\underline{w}$ von W als Bild von $\underline{v}$ unter φ : $w_j := \varphi(v_j)$ für $j = 1, \dots, n$. Dann haben für jedes $\sigma \in G$ $D(\sigma)$ bzgl. $\underline{v}$ und $F(\sigma)$ bzgl. $\underline{w}$ dieselbe Matrix:

$$D(\sigma)(v_j) = \sum_i \alpha_{ij} v_i \implies F(\sigma)(w_j) = \varphi \circ D(\sigma) \circ \varphi^{-1}(w_j) = \varphi\left(\sum_i \alpha_{ij} v_i\right) = \sum_i \alpha_{ij} w_i,$$

und dies bedeutet die Gleichheit der Matrixdarstellungen $F_{\underline{w}} = D_{\underline{v}}$.

(ii) ‘ $\Leftarrow$ ’: Es ist $n = \dim_K V = \deg D_{\underline{v}} = \deg F_{\underline{w}} = \dim_K W$, also V, W gleichdimensional. Sei $\varphi : V \rightarrow W$ der Isomorphismus mit $\varphi(v_j) = w_j$. Mit denselben Rechnungen wie oben erhält man nun

$$\begin{aligned} D(\sigma)(v_j) = \sum_i \alpha_{ij} v_i &\xrightarrow{F_{\underline{w}}=D_{\underline{v}}} F(\sigma)(w_j) = \sum_i \alpha_{ij} w_i \\ \implies \varphi \circ D(\sigma) \circ \varphi^{-1}(w_j) &= \varphi \circ D(\sigma)(v_j) = \sum_i \alpha_{ij} \varphi(v_i) = \sum_i \alpha_{ij} w_i = F(\sigma)(w_j), \\ \implies \varphi \circ D(\sigma) \circ \varphi^{-1} &= F(\sigma) \text{ für alle } \sigma \in G \end{aligned}$$

und damit die Äquivalenz von F und D .

(1.4) Beispiele:

(1) *Einsdarstellungen:* Sei G eine Gruppe, K ein Körper, $V \neq 0$ ein beliebiger K -Vektorraum. Dann ist

$$E = E_V : G \rightarrow \text{GL}(V), \quad \sigma \mapsto \text{id}_V$$

eine Darstellung von G , die *triviale* oder auch *Einsdarstellung* von G mit Darstellungsraum V . Einsdarstellungen sind genau dann äquivalent, wenn sie gleichen Grad haben.

(2) *Darstellungen ersten Grades:* Die Darstellungen ersten Grades einer Gruppe G über K sind genau die Homomorphismen von G in die Multiplikationsgruppe $K^\times$. Äquivalente Darstellungen ersten Grades sind identisch.

(3) *Direktes Produkt von Darstellungen:* Sind $D_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ Darstellungen einer Gruppe G , so definiert man das *direkte Produkt*

$$\hat{D} = D_1 \times D_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \times V_2)$$

in natürlicher Weise durch

$$(D_1 \times D_2)(\sigma)((v_1, v_2)) = (D_1(\sigma)(v_1), D_2(\sigma)(v_2)) \quad \text{für alle } \sigma \in G, v_i \in V_i.$$

Sind $M_i : G \rightarrow \text{GL}_{n_i}(K)$ Matrixdarstellungen zu D_i ($i = 1, 2$), so ist

$$\hat{M} : G \rightarrow \text{GL}_{n_1+n_2}(K), \quad \sigma \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M_1(\sigma) & 0 \\ \hline 0 & M_2(\sigma) \end{array} \right)$$

eine Matrixdarstellung zu $D_1 \times D_2$.

(4) *Die natürliche Darstellung der symmetrischen Gruppe:* Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis eines Vektorraums V über einem Körper K . Durch die Nummerierung von $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ wird $\mathcal{S}_n \simeq \mathcal{S}(\underline{v})$ und jede Permutation $\tau \in \mathcal{S}_n \simeq \mathcal{S}(\underline{v})$ besitzt eine eindeutige lineare Fortsetzung zu einem Automorphismus $\hat{\tau} \in \text{GL}(V)$: $\hat{\tau}(v_i) = v_{\tau i}$. Damit bestimmt jede Basis $\underline{v}$ von V eine (injektive) lineare Darstellung $S : \mathcal{S}_n \hookrightarrow \text{GL}(V)$, $\tau \mapsto \hat{\tau}$ von $\mathcal{S}_n$ vom Grad n . Eine Änderung der gewählten Basis führt zu äquivalenten linearen Darstellungen; deren Bilder $S(\mathcal{S}_n)$ sind konjugierte Untergruppen von $\text{GL}(V)$. Zu jedem n -dimensionalen K -Vektorraum V ist also eine Äquivalenzklasse $[S]$ linearer Darstellungen von $\mathcal{S}_n$ mit Darstellungsraum V wohldefiniert.

Die bzgl. $\underline{v}$ zu S gehörige Matrixdarstellung $S_v = M : \mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(K)$ ist gegeben durch

$$M(\tau) = (\delta_{i, \tau j})_{i,j} = (e_{\tau 1}, \dots, e_{\tau n}) \in \text{GL}_n(K) \quad (\tau \in \mathcal{S}_n).$$

$M(\tau)$ ist also eine sog. *Permutationsmatrix*, d. h. in jeder Zeile und jeder Spalte steht genau eine Eins und sonst Nullen. $M(\tau)$ entsteht durch Permutation der Spalten der Einheitsmatrix gemäß der Permutation τ . Die Äquivalenzklasse $[M]$ dieser natürlichen Matrixdarstellung $M : \mathcal{S}_n \hookrightarrow \text{GL}_n(K)$ ist die gemäß Bem. (1.3), p. 6, zu $[S]$ gehörige Klasse $\mathcal{M}(S)$.

(5) *Permutationsdarstellungen:* Eine *Permutationsdarstellung* einer Gruppe G ist ein Homomorphismus $P : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ von G in die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}(\Omega)$ einer endlichen Menge Ω ; $n = \#\Omega$ heißt *Grad* der Darstellung P .

Zwei Permutationsdarstellungen $P_i : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega_i)$ ($i = 1, 2$) heißen *äquivalent*, wenn eine Bijektion $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ existiert mit

$$P_2(\sigma) = \varphi \circ P_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ P_1 \swarrow & & \searrow P_2 \\ \mathcal{S}(\Omega_1) & \xrightarrow[\varphi \circ \dots \circ \varphi^{-1}]{\sim} & \mathcal{S}(\Omega_2) \end{array}$$

Gemäß (4) bestimmt jede Basis $(v_1, \dots, v_n)$ eines n -dimensionalen K -Vektorraums V eine lineare Darstellung $D_P = S \circ P$ charakterisiert durch

$$D_P(\sigma)(v_i) = v_j \iff P(\sigma)(i) = j \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

Jede Permutationsdarstellung bestimmt also eine Klasse äquivalenter linearer Darstellungen. Unter den linearen Darstellungen $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ sind die Permutationsdarstellungen dadurch charakterisiert, dass es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V gibt, auf der alle $D(\sigma)$ als Permutation operieren.

Äquivalenz von Permutationsdarstellungen (wie oben definiert) impliziert auch die Äquivalenz der induzierten linearen Darstellungen, da eine Bijektion $\varphi : \Omega_1 \simeq \Omega_2$ auch einen Isomorphismus $\hat{\varphi}$ zwischen den Vektorräumen mit Basis Ω_i ($i = 1, 2$) induziert.

6) *Die reguläre Darstellung:* Die *reguläre* Permutationsdarstellung einer endlichen Gruppe G ist der Cayley-Monomorphismus

$$G \hookrightarrow \mathcal{S}(|G|), \quad \sigma \mapsto L_\sigma : (\tau \mapsto \sigma\tau),$$

der jedem Gruppenelement σ die Linksmultiplikation L_σ mit σ als Permutation der G zugrundeliegende Menge $|G|$ zuordnet. Ihr Grad ist die Gruppenordnung $n = \#G$. Wählt man eine Nummerierung $G = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ von G , so erhält man eine (injektive) Permutationsdarstellung n -ten Grades im Sinne der obigen Definition in Beispiel (5):

$$P_{\text{reg}} : G \hookrightarrow \mathcal{S}_n, \quad P_{\text{reg}}(\sigma)(i) = j \iff \sigma\tau_i = \tau_j.$$

Da die Nummerierung von G willkürlich ist, ist P_{reg} nur eindeutig bis auf Äquivalenz. P_{reg} seinerseits bestimmt (bis auf Äquivalenz) eine (ebenfalls injektive, siehe (4)) lineare Darstellung $D_{\text{reg}} : G \hookrightarrow \text{GL}(V)$ (V irgendein n -dimensionaler K -Vektorraum) und eine zugehörige Matrixdarstellung $M_{\text{reg}} : G \hookrightarrow \text{GL}_n(K)$.

Damit ist für jede endliche Gruppe G die (wichtige) Äquivalenzklasse der regulären Darstellung ausgezeichnet; deren Grad ist die Gruppenordnung $\#G$; sie ist injektiv.

(1.5) Bemerkung: Sei G eine endliche Gruppe und $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine lineare Darstellung. Es sind äquivalent:

- (i) D ist (eine) reguläre Darstellung von G .
- (ii) Es gibt ein $v \in V$, so dass die Bilder $D(\sigma)(v)$ ($\sigma \in G$) eine Basis von V bilden.
- (iii) Es gibt eine mit G indizierte Basis $(v_\sigma \mid \sigma \in G)$ von V , so dass $D(\sigma)(v_\tau) = v_{\sigma\tau}$ für alle $\sigma, \tau \in G$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): D regulär $\implies D$ ist lineare Darstellung zur regulären Permutationsdarstellung $P_{\text{reg}} : G \rightarrow \mathcal{S}_n$ bzgl. einer Nummerierung $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ von G . Also gibt es eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V , die von allen $D(\sigma)$ permutiert wird, und zwar gemäß der regulären Permutationsdarstellung P_{reg} , d. h.

$$D(\sigma)(v_i) = v_j \iff P_{\text{reg}}(\sigma)(i) = j \iff \sigma\sigma_i = \sigma_j.$$

Ist nun $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\sigma_i = e_G$ Einselement von G und setzt man $v := v_i$, so gilt für alle j

$$\sigma_j\sigma_i = \sigma_j \cdot e_G = \sigma_j \implies v_j = D(\sigma_j)(v_i) = D(\sigma_j)(v),$$

so dass $\{D(\sigma_j)(v) \mid 1 \leq j \leq n\} = \{v_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ und damit eine Basis von V ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $v \in V$ und $(D(\sigma)(v) \mid \sigma \in G)$ Basis von V , insbesondere sind die $D(\sigma)(v)$ ($\sigma \in G$) verschieden. Ist $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ eine Abzählung von G , so setzen wir $v_i = D(\sigma_i)(v)$. Für diese Basis (v_i) von V gilt dann:

$$\begin{aligned} D(\sigma)(v_i) = v_j &\iff D(\sigma)(D(\sigma_i)(v)) = D(\sigma_j)(v) \\ &\iff D(\sigma\sigma_i)(v) = D(\sigma_j)(v) \\ &\iff \sigma\sigma_i = \sigma_j \iff P_{\text{reg}}(\sigma)(i) = j. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei v gemäß (ii) gewählt. Dann gilt (iii) für $v_\sigma := D(\sigma)(v)$:

$$D(\sigma)(v_\tau) = D(\sigma)(D(\tau)(v)) = D(\sigma\tau)(v) = v_{\sigma\tau}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei gemäß (iii) $(v_\sigma)_{\sigma \in G}$ Basis von V . Dann gilt (ii) für $v := v_{e_G}$:

$$D(\sigma)(v) = D(\sigma)(v_{e_G}) = v_{\sigma \cdot e_G} = v_\sigma.$$

b. Satz von Maschke, Irreduzibilität

(1.6) Definition: Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Für eine lineare Darstellung $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ definieren wir:

- a) Ein Unterraum $W \leq V$ heißt D -invariant oder G -invariant (bzgl. D) genau dann, wenn

$$D(\sigma)(W) \leq W \text{ für alle } \sigma \in G.$$

- b) Ist $W \leq V$ D -invariant, so definieren wir die *Teildarstellung* von D bzgl. W

$$D|_W : G \rightarrow \text{GL}(W), \sigma \mapsto D(\sigma)|_W$$

und die *Quotientendarstellung* $\bar{D}$ durch

$$\bar{D} : G \rightarrow \text{GL}(V/W), \bar{D}(\sigma)(\bar{v}) = \overline{D(\sigma)(v)} \text{ für alle } \bar{v} = v + W \in V/W, \sigma \in G.$$

- c) Wird fortgesetzt, s. u.

Rechtfertigungen: 1. W D -invariant $\implies D(\sigma)|_W \in \text{End}(W)$ für alle $\sigma \in G$. Da $D(\sigma)$ injektiv und W endlich dimensional ist, ist $D(\sigma)|_W$ ein Automorphismus von W , liegt also in $\text{GL}(W)$.

2. Da W D -invariant ist, ist $\bar{D}(\sigma)$ wohldefiniert:

$$\bar{v} = \bar{v}' \iff v - v' \in W \implies D(\sigma)(v) - D(\sigma)(v') = D(\sigma)(v - v') \in W,$$

und daher $\bar{D}(\sigma) \in \text{End}(V/W)$. Wieder folgt wegen der endlichen Dimension $\bar{D} : G \rightarrow \text{GL}(V/W)$.

(1.7) Bemerkung: Sei $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung, $W \leq V$ D -invariant und $D' = D|_W$ bzw. $\bar{D}$ die zugehörige Teil- bzw. Quotientendarstellung von D . Sei $\underline{w} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von W , ergänzt zu einer Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V (und also $\underline{u} = (\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_n)$ eine Basis von V/W). Dann gilt für alle $\sigma \in G$

$$D_v(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} D'_w(\sigma) & * \\ \hline 0 & \bar{D}_u(\sigma) \end{array} \right).$$

Beweis: Es seien

$$D_v(\sigma) = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad \text{also } D(\sigma)(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1)$$

$$D'_w(\sigma) = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,m}, \quad \text{also } D'(\sigma)(v_j) = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} v_i \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2)$$

$$\bar{D}_u(\sigma) = (\gamma_{ij})_{i,j=m+1,\dots,n}, \quad \text{also } \bar{D}(\sigma)(\bar{v}_j) = \sum_{i=m+1}^n \gamma_{ij} \bar{v}_i \quad (j = m+1, \dots, n) \quad (3)$$

$1 \leq j \leq m$: Dann gilt $D'(\sigma)(v_j) = D(\sigma)(v_j)$ und durch Koeffizientenvergleich von (1) und (2) folgt:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \text{und} \quad \bigwedge_{m < i \leq n} \alpha_{ij} = 0.$$

$m+1 \leq j \leq n$: Wegen $\bar{v}_i = 0$ für $i \leq m$ folgt aus (1)

$$\bar{D}(\sigma)(\bar{v}_j) = \overline{D(\sigma)(v_j)} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \bar{v}_i = \sum_{i=m+1}^n \alpha_{ij} \bar{v}_i,$$

so dass durch Koeffizientenvergleich mit (3) dann $\alpha_{ij} = \gamma_{ij}$ für $m+1 \leq i \leq n$ folgt. $\square$

Bemerkung (1.7) motiviert folgende

(1.6) Definition: (Fortsetzung)

- c) Sei $M : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ eine Matrixdarstellung. Eine *Teil-* bzw. *Quotientendarstellung* von M ist eine Matrixdarstellung $L : G \rightarrow \text{GL}_m(K)$, so dass M äquivalent ist zu einer Darstellung $\tilde{M}$ von der Form

$$\tilde{M}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} L(\sigma) & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{M}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & L(\sigma) \end{array} \right).$$

- d) Wird fortgesetzt, s. u.

(1.8) Bemerkung: Sei D eine lineare Darstellung einer Gruppe G über einem Körper K und M eine zu D gehörige Matrixdarstellung. Dann sind für eine Matrixdarstellung L von D über K äquivalent:

- (i) L ist Teil- bzw. Quotientendarstellung von M .
- (ii) L ist Matrixdarstellung zu einer Teil- bzw. Quotientendarstellung von D .

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Bem. (1.7) hat dann D eine Matrixdarstellung $\tilde{M}$, in der $L = D'_w$ oder $L = \bar{D}$ ist. Also ist $\tilde{M}$ äquivalent zu M und hat die in (1.6),c) beschriebene Gestalt: L ist Teil- bzw. Quotientendarstellung von M .

(i) $\Rightarrow$ (ii): M ist äquivalent zu einer Matrixdarstellung $\tilde{M}$ mit der in Def. (1.6),c) geforderten Gestalt. Es gibt also eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V bzgl. der D die Matrixdarstellung $\tilde{M}$ hat (siehe Bem. (1.3), p. 6). Dementsprechend setzen wir $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ mit $m = \deg L$ (wenn L Teildarstellung ist) bzw. $m = \deg M - \deg L$ (wenn L Quotientendarstellung ist). Wegen des 0-Blocks in $\tilde{M}$ ist W invariant unter D und der Vergleich von Bem. (1.7) mit der Form von $\tilde{M}$ in Def. (1.6),c) zeigt $L = D'_w$ bzw. $L = \bar{D}_u$, d. h. L ist Matrixdarstellung einer Teil- bzw. Quotientendarstellung von D .

Besondere Teildarstellungen sind die sog. *direkten Summanden*:

(1.6) Definition: (Fortsetzung) Sei $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine lineare Darstellung einer Gruppe G über einem Körper K .

- d) $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ist *direkte Summe* zweier Darstellungen $D' : G \rightarrow \text{GL}(V')$, $D'' : G \rightarrow \text{GL}(V'')$ (in Zeichen: $D = D' \oplus D''$) : $\iff D', D''$ sind Teildarstellungen von D und es gilt $V = V' \oplus V''$.
- e) Ein *direkter Summand* von D ist eine Teildarstellung D' , zu der es eine zweite Teildarstellung D'' von D gibt mit $D = D' \oplus D''$.

Anmerkungen:

- 1) Ist D direkte Summe von D', D'' , so ist D äquivalent zum früher definierten direkten Produkt $\hat{D} = D' \times D''$ (Beispiele (1.4),(3), p. 7).

Die Isomorphie $\varphi : V' \times V'' \xrightarrow{\sim} V = V' \oplus V''$, $(v', v'') \mapsto v' + v'' \in V$ induziert eine Äquivalenz zwischen D und $\hat{D}$, da V' und V'' D -invariante Unterräume von V sind:

$$\begin{aligned} D(\sigma) \circ \varphi(v', v'') &= D(\sigma)(v' + v'') \\ &= D(\sigma)(v') + D(\sigma)(v'') \underset{V', V'' \text{ } D\text{-inv.}}{=} D'(\sigma)(v') + D''(\sigma)(v'') \\ &= \varphi(D'(\sigma)(v'), D''(\sigma)(v'')) = \varphi(\hat{D}(\sigma)(v', v'')). \end{aligned}$$

Damit ist $\varphi^{-1} \circ D(\sigma) \circ \varphi = \hat{D}(\sigma)$ für alle $\sigma \in G$, also $D = D' \oplus D''$ äquivalent zum direkten Produkt $\hat{D} = D' \times D''$.

- 2) Sei $D' : G \rightarrow \text{GL}(V')$ eine Teil- und $\bar{D}'$ die zugehörige Quotientendarstellung von D .
a) Ist D' direkter Summand von D , so ist D äquivalent zu $D' \times \bar{D}'$. Oder anders formuliert:

$$D = D' \oplus D'' \implies D'' \sim \bar{D}'.$$

- b) D' ist direkter Summand von $D \iff$ es existiert ein D -invarianter Unterraum $V'' \leq V$ mit $V = V' \oplus V''$.
c) Ist $D = D' \oplus D''$ mit $D'' : G \rightarrow \text{GL}(V'')$ und $\underline{v} = (\underline{v}', \underline{v}'')$ die Zusammensetzung von Basen von V' und V'' , so gilt für alle $\sigma \in G$

$$D_{\underline{v}}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} D'_{\underline{v}'}(\sigma) & 0 \\ \hline 0 & D''_{\underline{v}''}(\sigma) \end{array} \right).$$

Beweis als Übung.

(1.9) Beispiel: Es gibt Teildarstellungen, die nicht direkter Summand sind.

Sei p eine Primzahl, $C_p = \langle \sigma \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung p und K ein Körper der Charakteristik p . Wir definieren

$$M : C_p \rightarrow \text{GL}_2(K), \quad \sigma^i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i \cdot 1_K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

- α) M ist eine Matrixdarstellung von C_p vom Grade 2.
 β) Die Einsdarstellung $E_1 : C_p \rightarrow K^\times = \text{GL}_1(K)$, $\sigma \mapsto 1_K$ ist Teildarstellung von M .
 γ) E_1 ist nicht direkter Summand von M .

Beweis: α) M ist wohldefiniert, da $\text{char } K = \text{ord } \sigma$. Die Homomorphie ist dann klar.

β) klar per Definition (1.6), c), p. 10.

γ): Die zu E_1 gehörige Quotientendarstellung von M ist (äquivalent zu) E_1 . Wäre also E_1 direkter Summand von M , so wäre M äquivalent zu $E_1 \times E_1$, der Einsdarstellung vom Grade 2, und müsste dann mit ihr übereinstimmen; Wid.

(1.10) Satz: (Satz von Maschke) Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper. Unter der Voraussetzung

$$(*) \quad \text{char } K \nmid \#G$$

ist jede Teildarstellung einer Darstellung von G über K auch direkter Summand.

Für Matrixdarstellungen M, L_1, L_2 von G über K bedeutet dies:

$$\bigwedge_{\sigma \in G} M(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} L_1(\sigma) & * \\ \hline 0 & L_2(\sigma) \end{array} \right) \implies \bigvee_{T \in \text{GL}_n(K)} \bigwedge_{\sigma \in G} T M(\sigma) T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} L_1(\sigma) & 0 \\ \hline 0 & L_2(\sigma) \end{array} \right).$$

Beispiel (1.9) zeigt, dass die Voraussetzung $(*)$ nicht entbehrlich ist. Auch auf die Endlichkeit von G kann nicht verzichtet werden: Man betrachte dazu die Darstellung

$$D : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Q}), \quad n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und argumentiere wie in Beispiel (1.9).

Beweis: Sei $D|_W$ eine Teildarstellung von D , also W ein D -invarianter Unterraum von V . Gemäß der vorangegangenen Anmerkung 2), b) ist zu zeigen:

- W besitzt einen D -invarianten Komplementärraum $U \leq V$: $V = W \oplus U$.

Die Komplementärräume von W sind gerade die Kerne der Projektionen $p : V \twoheadrightarrow W$. Gesucht ist also ein Endomorphismus p von V mit $p(V) \subset W$ und $p|_W = \text{id}_W$, dessen Kern $\text{Ke } p$ D -invariant ist.

Sei $p_0 \in \text{End}(V)$ irgendeine beliebige Projektion auf den Unterraum W , d. h. $p_0(V) \subset W$ und $p_0|_W = \text{id}_W$ (existiert nach linearer Algebra). Wir setzen dann

$$p := \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} D(\sigma) \circ p_0 \circ D(\sigma)^{-1}.$$

Wegen der entscheidenden Voraussetzung $(*)$ ist

$$\frac{1}{\#G} := (\#G \cdot 1_K)^{-1} \in K$$

und $p \in \text{End}(V)$ folglich wohldefiniert. Wegen der D -Invarianz von W gilt auch $p_0(V) \subset W$ (klar) und $p|_W = \text{id}_W$:

$$\begin{aligned} w \in W &\implies D(\sigma)^{-1}(w) \in W \implies p_0(D(\sigma)^{-1}(w)) = D(\sigma)^{-1}(w) \\ &\implies D(\sigma) \circ p_0 \circ D(\sigma)^{-1}(w) = w \\ &\implies p(w) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} w = w. \end{aligned}$$

Damit ist auch p eine Projektion auf W , und für diese gilt zusätzlich für alle $\sigma \in G$:

$$D(\sigma)^{-1} \circ p \circ D(\sigma) = \frac{1}{\#G} \sum_{\tau \in G} D(\sigma^{-1}\tau) \circ p_0 \circ D(\tau^{-1}\sigma) = \frac{1}{\#G} \sum_{\rho \in G} D(\rho) \circ p_0 \circ D(\rho)^{-1} = p.$$

Daraus folgt dann die D -Invarianz von $U := \text{Ke } p$:

$$u \in U \implies p \circ D(\sigma)(u) = D(\sigma) \circ p(u) = D(\sigma)(0) = 0 \implies D(\sigma)(u) \in U \text{ für alle } \sigma \in G.$$

Die Formulierung für Matrixdarstellungen folgt daraus unmittelbar, da jede Matrixdarstellung eine lineare Darstellung mit Darstellungsraum K^n ist.

(1.11) Definition: Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Eine Darstellung $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ von G über K heißt *reduzibel*, wenn es einen D -invarianten Unterraum $W \leq V$ gibt mit $0 \neq W \neq V$ (ein *echter* D -invarianter Unterraum). Andernfalls heißt D *irreduzibel*.

Eine Matrixdarstellung M heißt (*ir*-)reduzibel, wenn sie Matrixdarstellung einer (*ir*-)reduziblen linearen Darstellung ist.

Anmerkungen:

1) Sind D_1, D_2 äquivalent, so gilt: D_1 reduzibel $\iff D_2$ reduzibel.

Begründung: Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ zwischen den Darstellungsräumen der D_i mit $\varphi \circ D_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} = D_2(\sigma)$ für alle $\sigma \in G$. Ist nun W_1 ein D_1 -invarianter Unterraum von V_1 , so ist $W_2 = \varphi(W_1) \leq V_2$ D_2 -invariant, denn

$$D_2(\sigma)(\varphi(W_1)) = \varphi \circ D_1(\sigma)(W_1) \subset \varphi(W_1).$$

2) Ein Matrixdarstellung M vom Grade n ist genau dann reduzibel, wenn sie äquivalent ist zu einer Darstellung $\tilde{M}$ der Form

$$\tilde{M}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} L(\sigma) & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \quad (L(\sigma) \in \text{GL}_m(K), 1 \leq m < n) \text{ für alle } \sigma \in G.$$

Begründung: Ist M reduzibel, so ist M äquivalent zu $D_v =: \tilde{M}$ mit reduzibler Darstellung D und $\underline{v}$ wie in Bem. (1.7), p. 9, also hat $\tilde{M}$ die behauptete Gestalt.

Umgekehrt: $\tilde{M}$ ist Matrixdarstellung zu einer linearen Darstellung $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ bzgl. einer Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ des Darstellungsraumes V . Wir setzen dann $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ mit der Reihenzahl m der quadratischen Matrizen $L(\sigma)$ in der vorausgesetzten Form von $\tilde{M}$. Dann ist W D -invariant, hat die Dimension m mit $1 \leq m < n$, also ist D reduzibel und somit auch M .

(1.12) Beispiele:

- (1) Darstellungen ersten Grades sind irreduzibel.
- (2) Für alle nicht-trivialen Gruppen $G \neq \{e\}$ ist die reguläre Darstellung D_{reg} reduzibel.
- (1) ist klar, da der Darstellungsraum die Dimension 1 hat.
- (2) Sei V Darstellungsraum von D_{reg} . Gemäß Bem. (1.5),(ii), p. 8, existiert ein $v \in V$ mit

$$(D_{\text{reg}}(v) \mid \sigma \in G) \text{ ist Basis von } V.$$

Dann ist $w := \sum_{\sigma \in G} D_{\text{reg}}(\sigma)(v) \in V \setminus \{0\}$ und $W = Kw$ somit eindimensional. W ist D -invariant, denn für alle $\tau \in G$ gilt:

$$D(\tau)(w) = D(\tau)\left(\sum_{\sigma \in G} D(\sigma)(v)\right) = \sum_{\sigma \in G} D(\tau\sigma)(v) = \sum_{\rho \in G} D(\rho)(v) = w.$$

Nach Voraussetzung ist $\dim V = \deg D_{\text{reg}} = \#G > 1$ und folglich W eine echter invarianter Unterraum von V und D reduzibel. Wegen $D(\tau)(w) = w$ für alle $\tau \in G$ ist $D|_W = E_1$ die Einsdarstellung ersten Grades von G .

(1.13) Bemerkung: Jede Matrixdarstellung M einer Gruppe ist äquivalent zu einer Matrixdarstellung $\tilde{M}$ der Form

$$\tilde{M}(\sigma) = \begin{bmatrix} \overline{M_1(\sigma)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{M_r(\sigma)} \end{bmatrix}$$

mit $r \geq 1$ und irreduziblen Matrixdarstellungen M_i von G .

Beweis induktiv über den Grad von M als Übung.

Damit erhält man aus dem Satz von Maschke das folgende

(1.14) Korollar: Es seien G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$. Dann ist jede Darstellung D von G über K direkte Summe irreduzibler Darstellungen:

$$D = \bigoplus_{i=1}^r D_i, \quad D_i \text{ irreduzibel, } r \geq 1.$$

Fazit: Die Klassifikation der Darstellungen einer endlichen Gruppe G über einem Körper K mit $\text{char } K \nmid \#G$ ist dadurch zurückgeführt auf die Klassifikation der *irreduziblen* Darstellungen.

c. Das Lemma von Schur

Wichtig für den weiteren Aufbau der Theorie ist das folgende

(1.15) Lemma von Schur: (1905) Es seien G eine Gruppe, K ein Körper und $D_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ ($i = 1, 2$), $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ irreduzible Darstellungen von G über K . Dann gilt:

- a) Ist $f : V_1 \rightarrow V_2$ ein K -Homomorphismus mit

$$f \circ D_1(\sigma) = D_2(\sigma) \circ f \text{ für alle } \sigma \in G,$$

(auch kurz G -Homomorphismen genannt), so folgt

$$f = 0 \quad \text{oder} \quad f : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2 \text{ ist ein Isomorphismus, und folglich } D_1 \sim D_2 \text{ äquivalent.}$$

b) Sei f ein G -Endomorphismus von V , also

$$f \circ D(\sigma) = D(\sigma) \circ f \text{ für alle } \sigma \in G.$$

Besitzt f in K einen Eigenwert, so ist $f = \lambda \cdot \text{id}_V$ für ein $\lambda \in K$.

Beweis: a) Da f ein G -Homomorphismus ist, sind

$$\text{Ke } f \leq V_1 \text{ } D_1\text{-invariant} \quad \text{und} \quad \text{Im } f \leq V_2 \text{ } D_2\text{-invariant}.$$

Denn: $v \in \text{Ke } f \implies f(v) = 0 \implies f(D_1(\sigma)(v)) = D_2(\sigma)(f(v)) = 0 \implies D_1(\sigma)(v) \in \text{Ke } f$
 und $w = f(v) \in \text{Im } f \implies D_2(\sigma)(w) = D_2(\sigma) \circ f(v) = f(D_1(\sigma)(v)) \in \text{Im } f$.

Ist nun $f \neq 0$, so ist $\text{Im } f \neq \{0\}$, also $\text{Im } f = V_2$ wegen der Irreduzibilität von D_2 und daher f surjektiv. Wegen $f \neq 0$ gilt auch $\text{Ke } f \neq V_1$, also $\text{Ke } f = \{0\}$ wegen der Irreduzibilität von D_1 und f ist injektiv.

ad b): Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von f , so hat $f - \lambda \text{id}_V$ einen nicht-trivialen Kern und ist insbesondere kein Isomorphismus. Nach a) muss daher $f - \lambda \text{id}_V = 0$ sein. $\square$

Das Lemma von Schur ist von zentraler Bedeutung für den weiteren Aufbau der Theorie, insbesondere die Aussage b), dass irreduzible Darstellungen nur die offensichtlichen Endomorphismen zulassen. Allerdings gilt die Prämisse nicht für alle Körper.

(1.16) Definition: Sei K ein Körper, G eine endliche Gruppe und $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung von G über K . Dann definieren wir

(S_D) K erfüllt die *Schurbedingung* (S_D) für D

: $\iff$ jeder G -Endomorphismus f von V hat einen Eigenwert in K

$\iff$ zu jedem G -Endomorphismus f von V existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \text{id}_V$.
 (1.15) b)

(S) K erfüllt die *Schurbedingung* (S) für G

: $\iff K$ erfüllt (S_D) für jede irreduzible Darstellung D von G über K .

In algebraisch abgeschlossenen Körpern sind die Schurbedingungen immer erfüllt, denn jeder Endomorphismus von $V \neq \{0\}$ hat ein nicht konstantes charakteristisches Polynom und daher in K einen Eigenwert.

Das Lemma von Schur (1.15),b) kann man dann wie folgt formulieren:

(1.17) Korollar: Sei K ein Körper und $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung über K . Erfüllt K die Schurbedingung (S_D) für D (etwa wenn K algebraisch abgeschlossen ist), so sind die G -Endomorphismen von V genau die Streckungen λid_V ($\lambda \in K$).

§2 Charaktere

a. Grundbegriffe, der Hauptsatz

(2.1) Definition: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper.

a) Ist $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung von G über K , so definiert man den *Charakter* χ_D von D durch

$$\chi_D : G \rightarrow K, \quad \sigma \mapsto \text{Tr } D(\sigma)$$

mit der Spurabbildung $\text{Tr} : \text{End}(V) \rightarrow K$. Analog χ_M für Matrixdarstellungen M .

b) Ein *Charakter* von G ist eine Abbildung $\chi : G \rightarrow K$, zu der eine Darstellung D von G über K existiert mit $\chi = \chi_D$.

c) Der *Grad* $\deg \chi$ eines Charakters χ wird definiert als $\deg \chi = \chi(e_G)$.

(2.2) Bemerkung: (Eigenschaften von Charakteren)

Für Darstellungen D und Charaktere χ einer Gruppe G über einem Körper K gilt:

- a) $\deg \chi_D = \deg D \in \mathbb{N}_+$.
- b) $\chi(\sigma^{-1}\tau\sigma) = \chi(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in G$.
- c) $D \sim D' \implies \chi_D = \chi_{D'}$.
- d) Jeder Charakter ist Summe von Charakteren irreduzibler Darstellungen.
- e) $D = \bigoplus_{i=1}^r D_i \implies \chi_D = \sum_{i=1}^r \chi_{D_i}$.

Beweis: a) $\deg \chi_D = \chi_D(e_G) = \text{Tr}(D(e_G)) = \text{Tr id}_V = \deg D$, wenn V der Darstellungsraum von D ist.

b) Sei $\chi = \chi_D$ und M eine Matrixdarstellung von D , also $\chi = \chi_M$. Dann gilt

$$\chi(\sigma^{-1}\tau\sigma) = \chi_M(\sigma^{-1}\tau\sigma) = \text{Tr}(M(\sigma)^{-1}M(\tau)M(\sigma)) = \text{Tr} M(\tau) = \chi(\tau),$$

denn ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und daher dieselbe Spur.

c) Seien M, M' Matrixdarstellungen zu D, D' . Dann gilt

$$D' \sim D \iff M' \sim M \iff \bigvee_{T \in \text{GL}_n(K)} \bigwedge_{\sigma \in G} M'(\sigma) = T^{-1}M(\sigma)T$$

und folglich haben $M(\sigma), M'(\sigma)$ die gleiche Spur: $\chi_D(\sigma) = \chi_{D'}(\sigma)$.

d) Es ist $\chi = \chi_D = \chi_M$ für eine Darstellung D und eine Matrixdarstellung M von D . Nach Bem. (1.13), p. 13, ist M äquivalent zu einer Matrixdarstellung $\tilde{M}$ der Form

$$\tilde{M}(\sigma) = \begin{bmatrix} \overline{M_1(\sigma)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{M_r(\sigma)} \end{bmatrix}$$

mit irreduziblen Matrixdarstellungen M_i . Da die Matrixspur Summe der Diagonalelemente ist, erhält man $\chi = \chi_M = \chi_{\tilde{M}} = \sum_{i=1}^r \chi_{M_i}$, χ ist Summe von Charakteren irreduzibler Darstellungen.

e) Sind M, M_i Matrixdarstellungen zu D, D_i , so ist M äquivalent zur Matrixdarstellung

$$\bigoplus_{i=1}^r M_i(\sigma) := \begin{bmatrix} \overline{M_1(\sigma)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{M_r(\sigma)} \end{bmatrix}$$

und wie in d) folgt $\chi_D = \chi_M = \sum_{i=1}^r \chi_{M_i} = \sum_{i=1}^r \chi_{D_i}$.

Nach Bem. (2.2), b), p. 15, haben Charaktere für konjugierte Gruppenelemente denselben Wert, Charakterwerte hängen nur von der Konjugationsklasse ab, in der das Gruppenelement liegt.

Notationen: Sei G eine Gruppe und $\sigma, \tau \in G$.

$\sigma^\tau := \tau^{-1}\sigma\tau$ Konjugiertes von σ ,

$[\sigma] := \{\tau^{-1}\sigma\tau \mid \tau \in G\}$, die *Konjugationsklasse* von σ ,

$[G] = \{[\sigma] \mid \sigma \in G\}$, die Menge aller Konjugationsklassen von G ,

$[\] : G \rightarrow [G], \sigma \mapsto [\sigma]$, die natürliche Abbildung,

$h_G := \#[G]$ Anzahl der Konjugationsklassen, die sog. *Klassenzahl* für *endliche* Gruppen G .

(2.3) Definition: Sei G eine *endliche* Gruppe und K ein Körper.

- a) $f : G \rightarrow K$ heißt *Klassenfunktion* : $\iff f(\tau^{-1}\sigma\tau) = f(\sigma)$ für alle $\sigma, \tau \in G$.
b) $\mathcal{K}$ bezeichne den K -Vektorraum aller Klassenfunktionen von G .
c) Für $\text{char } K \nmid \#G$ definiert man

$$(\ , \)_G : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow K, \quad (f, g)_G := \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} f(\sigma)g(\sigma^{-1}).$$

(2.4) Bemerkung: Seien G eine Gruppe und K ein Körper. Es gilt:

- a) Charaktere sind Klassenfunktionen.
b) $\mathcal{K}$ ist ein K -Vektorraum der Dimension h_G :

$$\mathcal{K} \simeq K^{[G]}, \quad f \mapsto ([\sigma] \mapsto f(\sigma)) \quad \text{bzw.} \quad K^{[G]} \simeq \mathcal{K}, \quad g \mapsto g \circ [\].$$

- c) $(\ , \)_G$ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{K}$.

Beweis: a) Siehe Bem. (2.2),b), p. 15.

b) Allgemein bezeichnet K^M die Menge aller Abbildungen von einer Menge M in einen Körper. Sie bilden bei wertweiser Verknüpfung einen K -Vektorraum. Bei endlichem M bilden die charakteristischen Funktionen der einelementigen Mengen $\{m\}$ ($m \in M$) eine Basis und daher ist $\dim K^M = \#M$ bei endlichem M , insbesondere $\dim_K \mathcal{K} = \#[G] = h_G$. Die angegebenen Abbildungen sind wohldefinierte Homomorphismen und invers zueinander, also Isomorphismen.

c) Da die Verknüpfungen wertweise definiert sind, ist $(\ , \)_G$ bilinear. Und die Symmetrie folgt, da die Inversenbildung in Gruppen eine Bijektion ist:

$$(g, f)_G = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} g(\sigma)f(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\#G} \sum_{\tau \in G} g(\tau^{-1})f(\tau) = (f, g)_G.$$

Einschub: Skalarprodukte

Eine symmetrische Bilinearform $(\ , \) : V \rightarrow K$ eines Vektorraums in den Grundkörper soll hier kurz *Skalarprodukt* genannt werden. Es werden hier (im Gegensatz zur Linearen Algebra) zunächst keine Forderungen etwa nach Positivität oder Definitheit gestellt. Ein Skalarprodukt gibt Anlass zu folgenden Begriffen:

- $v \perp w$ (orthogonal) $\iff (v, w) = 0$.
- $v \perp W$ $\iff v \perp w$ für alle $w \in W$,
- $(v_1, \dots, v_r)$ *Orthonormalsystem* (ONS) $\iff (v_i, v_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j .
- Wenn nur $(v_i, v_j) \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq j \\ \neq 0 & \text{für } i = j \end{cases}$ gilt, sprechen wir von einem *Orthogonalsystem* (OGS).
- $U^\perp := \{v \in V \mid v \perp U\}$ Unterraum von V , *orthogonales Komplement* von U (bzgl. $(\ , \)$)
- $(\ , \)$ ist *regulär* : $\iff (v \perp V \implies v = 0)$.

Es gilt für Orthogonalsysteme $v_1, \dots, v_r$:

- a) Orthogonalsysteme sind linear unabhängig.
b) $\{v_1, \dots, v_r\}^\perp = \{0\} \iff V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \wedge (\ , \)$ regulär.

Begründungen: a) $0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \Rightarrow 0 = (0, v_j) = \sum_i \lambda_i (v_i, v_j) = \lambda_j \underbrace{(v_j, v_j)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_j = 0$ für alle j .

b) $\Leftarrow$: Wegen der Bilinearität von $(\ , \)$ ist $\{v_1, \dots, v_r\}^\perp = \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp = V^\perp = \{0\}$.

$\Rightarrow$: $V^\perp \subset \{v_1, \dots, v_r\}^\perp = \{0\} \Rightarrow (\ , \)$ ist regulär. Für beliebige $v \in V$ setzen wir $\tilde{v} = v - \sum_{i=1}^r \frac{(v, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i$. Dann gilt

$$(\tilde{v}, v_j) = (v, v_j) - \sum_{i=1}^r (v, v_i) \underbrace{\frac{(v_i, v_j)}{(v_i, v_i)}}_{=\delta_{ij}} = (v, v_j) - (v, v_j) = 0 \text{ für alle } j,$$

also $\tilde{v} \perp v_j$ für alle j und somit nach Voraussetzung $\tilde{v} = 0$, $v = \sum_i \frac{(v, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ für jedes $v \in V$. Also gilt $V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

(2.5) Hauptsatz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$.

Dann gilt:

- a) $(\ , \)_G$ ist ein reguläres Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathcal{K}$ der Klassenfunktionen von G mit Werten in K .
- b) Inäquivalente irreduzible Darstellungen von G über K haben orthogonale Charaktere.
- c) Ist D eine irreduzible Darstellung von G über K und erfüllt K die Schurbedingung (S_D) für D (etwa K algebraisch abgeschlossen), so gilt $(\chi_D, \chi_D) = 1$.
- d) Erfüllt K die Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen), so bilden die Charaktere der Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von G eine Orthonormalbasis von $\mathcal{K}$.

Der Beweis folgt in Abschnitt c., p. 19.

b. Folgerungen aus dem Hauptsatz

(2.6) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$ und Schurbedingung S (etwa K algebraisch abgeschlossen). Dann gilt für irreduzible Darstellungen D, D' von G über K :

- (1) $D \sim D' \iff \chi_D = \chi_{D'} \iff (\chi_D, \chi_{D'}) = 1 \iff (\chi_D, \chi_{D'}) \neq 0$
- (2) $D \not\sim D' \iff \chi_D \neq \chi_{D'} \iff (\chi_D, \chi_{D'}) = 0$

Beweis: (1) $D \sim D' \xRightarrow{(2.2)c} \chi_D = \chi_{D'} \xRightarrow{(2.5)c} (\chi_D, \chi_{D'}) = 1 \neq 0 \xRightarrow{(2.5)b} D \sim D'$.

(2) ist die Kontraposition von (1).

(2.7) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$ und Schurbedingung S (etwa K algebraisch abgeschlossen). Dann ist die Anzahl inäquivalenter irreduzibler Darstellungen von G über K gerade die Anzahl $h_G = \#[G]$ der Konjugationsklassen von G .

Beweis: Nach Hauptsatz (2.5),d) bilden die Charaktere aller Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G über K eine Basis von $\mathcal{K}$, also ist die Anzahl inäquivalenter irreduzibler Darstellungen von G über K gleich $\dim_K \mathcal{K} = \#[G] = h_G$, der Anzahl h_G der Konjugationsklassen von G . $\square$

Dieses Resultat kann man weitgehend auf nicht algebraisch abgeschlossene Körper ausdehnen – sofern die Charakteristik 0 ist:

(2.8) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper der Charakteristik 0. Dann gilt:

- a) Für jede Darstellung D von G über K gilt $(\chi_D, \chi_D) \neq 0$.
- b) Charaktere inäquivalenter irreduzibler Darstellungen sind linear unabhängig in $\mathcal{K}$.
- c) Es gibt höchstens $h_G = \#[G]$ Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G über K .

Beweis: c) folgt aus b), denn $\dim \mathcal{K} = \#[G] = h_G$, und b) folgt aus a), denn nach a) und Hauptsatz (2.5),b) bilden die Charaktere inäquivalenter irreduzibler Charaktere ein Orthogonalsystem und sind folglich linear unabhängig (siehe die allgemeinen Vorbemerkungen zu Skalarprodukten, p. 16).

Ad a): Sei $M : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ eine Matrixdarstellung zu D . Wir zerlegen $M : G \rightarrow \text{GL}_n(K) \leq \text{GL}_n(\tilde{K})$ als Matrixdarstellung über dem algebraischen Abschluss $\tilde{K}$ von K gemäß Korollar (1.14), p. 13, in eine direkte Summe von über $\tilde{K}$ irreduziblen Matrixdarstellungen und fassen die untereinander äquivalenten zusammen. Wir erhalten so $\chi_M = \sum_i n_i \chi_{M_i}$ mit $n_i \in \mathbb{N}$ und paarweise inäquivalenten, über $\tilde{K}$ irreduziblen Matrixdarstellungen $M_i : G \rightarrow \text{GL}_n(\tilde{K})$. Also gilt nach Hauptsatz (2.5),d)

$$(\chi_D, \chi_D) = (\chi_M, \chi_M) = \sum_{i,j} n_i n_j \underbrace{(\chi_{M_i}, \chi_{M_j})}_{=\delta_{ij} \cdot 1_K} = \left(\sum_i n_i^2 \right) \cdot 1_K.$$

Wegen $\sum_i n_i^2 > 0$ und $\text{char } K = 0$ gilt dann die Behauptung a).

Hieraus erhält man nun im Falle der Charakteristik 0 die folgenden fundamentalen Resultate:

(2.9) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper der Charakteristik 0.

- a) Jede Darstellung D von G über K ist (bis auf Reihenfolge und Äquivalenz) eindeutig in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegbar.
- b) Genauer gilt: Ist $D \sim \bigoplus_{i=1}^r D_i$ mit irreduziblen Darstellungen D_i von G über K und F eine beliebige irreduzible Darstellung von G über K , so berechnet sich die Vielfachheit

$$m_F := \#\{i \in \{1, \dots, r\} \mid D_i \sim F\}$$

durch

$$m_F \cdot 1_K = \frac{(\chi_D, \chi_F)}{(\chi_F, \chi_F)} \in K.$$

- c) Darstellungen sind durch ihre Charaktere bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt:

$$D, D' \text{ Darstellungen von } G \text{ über } K: \quad D \sim D' \iff \chi_D = \chi_{D'}.$$

Beweis: Nach Korollar (1.14), p. 13, zum Satz von Maschke ist jede Darstellung direkte Summe irreduzibler Darstellungen, so dass in a) nur noch die Eindeutigkeit zu beweisen ist, die offenbar aus b) folgt.

b) Fasst man in der gegebenen Zerlegung von D die untereinander äquivalenten D_i zusammen, so erhält man mit den Bezeichnungen von b)

$$D \sim \bigoplus_{i=1}^r D_i \sim \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ m_I \neq 0}} \underbrace{I \oplus \dots \oplus I}_{m_I\text{-mal}} =: \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ m_I \neq 0}} m_I \cdot I,$$

wobei $\mathcal{I}$ ein Repräsentantensystem aller *irreduziblen* Darstellungen von G über K ist. Es gilt dann $\chi_D = \sum_{I \in \mathcal{I}} m_I \cdot \chi_I$ und daher für jede irreduzible Darstellung F

$$(\chi_D, \chi_F) = \sum_{I \in \mathcal{I}} m_I (\chi_I, \chi_F) \stackrel{(2.5)b)}{=} m_F (\chi_F, \chi_F).$$

Nach Satz (2.8),a)) ist $(\chi_F, \chi_F) \neq 0$ und $m_F \cdot 1_K$ hat den behaupteten Wert. Wegen $\text{char } K = 0$ ist dann $m_F \in \mathbb{N}$ durch $m_F \cdot 1_K \in K$ eindeutig bestimmt.

c) Es ist nur ' $\Leftarrow$ ' zu beweisen. Mit zu b) analogen Bezeichnungen gilt für die Darstellungen D, D'

$$D \sim \bigoplus_{I \in \mathcal{I}} m_I \cdot I, \quad D' \sim \bigoplus_{I \in \mathcal{I}} m'_I \cdot I.$$

Gemäß b) sind die m_I bzw. m'_I bereits durch die Charaktere der Darstellungen eindeutig bestimmt. Stimmen also die Charaktere $\chi_D = \chi_{D'}$ überein, so folgt auch $m_I = m'_I$ für alle $I \in \mathcal{I}$ und daher $D \sim D'$. $\square$

Als letzte Folgerung in diesem Abschnitt erhalten wir als weitgehende Verschärfung von Satz (2.6) die nachstehende Charakterisierung der *absolut* (d. h. über dem algebraischen Abschluss) *irreduziblen* Darstellungen allein durch ihren Charakter:

(2.10) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und D eine Darstellung von G über einem Körper K der Charakteristik $\text{char } K = 0$.

$$D \text{ irreduzibel über } \tilde{K} \iff (\chi_D, \chi_D) = 1.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Klar nach Satz (2.5),c).

$\Leftarrow$: Wie im Beweis von Satz (2.8),a) zerlegen wir χ_D in eine Vielfachsumme der über $\tilde{K}$ irreduziblen Charaktere $\chi_i : G \rightarrow \tilde{K}$ und erhalten

$$\chi_D = \sum_i n_i \chi_i \implies 1_K = (\chi_D, \chi_D) = \sum_i n_i^2 \cdot 1_K \xrightarrow{\text{char } K=0} \sum_i n_i^2 = 1.$$

Daher gibt es genau ein i_0 mit $n_{i_0} = 1$ und alle anderen $n_j = 0$, also $\chi_D = \chi_{i_0}$ irreduzibler Charakter über $\tilde{K}$, d. h. D ist über $\tilde{K}$ irreduzibel. $\square$

c. Die Orthogonalitätsrelationen

Ein erster und entscheidender Schritt zum Beweis von Hauptsatz (2.5), p. 17, ist die nachfolgende Konsequenz des Lemmas von Schur (1.15), p. 13:

(2.11) Satz: (Orthogonalitätsrelationen)

Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper, D, D' irreduzible Darstellungen von G über K und $M : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$, $M' : G \rightarrow \text{GL}_{n'}(K)$ zugehörige Matrixdarstellungen. Seien für $\sigma \in G$ $\alpha_{ij}(\sigma) \in K$ ($i, j \leq n$) bzw. $\alpha'_{kl}(\sigma) \in K$ ($k, l \leq n'$) die Matrixelemente in $M(\sigma)$ bzw. $M'(\sigma)$. Dann gilt:

a) Sind D, D' nicht äquivalent, so ist

$$\sum_{\sigma \in G} \alpha_{ij}(\sigma) \alpha'_{kl}(\sigma^{-1}) = 0 \text{ für alle } i, j \leq n, \quad k, l \leq n'.$$

b) Ist zusätzlich $\text{char } K \nmid \#G$ und erfüllt K die Schurbedingung (S_D) für D (etwa K algebraisch abgeschlossen), so gilt:

$$\text{char } K \nmid \deg D \quad \text{und} \quad \sum_{\sigma \in G} \alpha_{ij}(\sigma) \alpha_{kl}(\sigma^{-1}) = \delta_{jk} \delta_{il} \frac{\#G}{\deg D} \in K.$$

Beweis: Seien V, V' die Darstellungsräume von D, D' mit den Dimensionen n, n' . Dann definieren wir für jeden Homomorphismus $f : V \rightarrow V'$ den Homomorphismus

$$\tilde{f} := \sum_{\sigma \in G} D'(\sigma^{-1}) \circ f \circ D(\sigma) \in \text{Hom}(V, V').$$

Dann gilt für alle $\tau \in G$

$$D'(\tau^{-1}) \circ \tilde{f} \circ D(\tau) = \sum_{\sigma \in G} D'(\tau^{-1}\sigma^{-1}) \circ f \circ D(\sigma\tau) = \sum_{\rho \in G} D'(\rho^{-1}) \circ f \circ D(\rho) = \tilde{f},$$

also $D'(\tau) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ D(\tau)$, d. h. jedes $\tilde{f}$ ist ein G -Homomorphismus von V in V' .

a) Im Falle inäquivalenter Darstellungen D, D' muss nach dem Lemma von Schur (1.15), a), p. 13, also jedes $\tilde{f} = 0$ sein, das bedeutet

$$\sum_{\sigma \in G} D'(\sigma^{-1}) \circ f \circ D(\sigma) = 0 \text{ für alle } f \in \text{Hom}(V, V').$$

Matrizentheoretisch formuliert heißt dies für alle $C \in M_{n'n}(K)$

$$\sum_{\sigma \in G} M'(\sigma^{-1}) \cdot C \cdot M(\sigma) = 0 \in M_{n'n}(K).$$

Wählt man C als Elementarmatrix, also $1 \leq l \leq n', 1 \leq i \leq n$ beliebig und

$$C = E_{li} = (\delta_{l\mu}\delta_{i\nu})_{\mu \leq n', \nu \leq n} \in M_{n'n}(K),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\sigma \in G} M'(\sigma^{-1}) \cdot E_{li} \cdot M(\sigma) = \sum_{\sigma \in G} (\alpha'_{k\mu}(\sigma^{-1}))_{k, \mu \leq n'} \cdot (\delta_{l\mu}\delta_{i\nu})_{\mu \leq n', \nu \leq n} \cdot (\alpha_{\nu j}(\sigma))_{\nu, j \leq n} \\ \iff \bigwedge_{k \leq n', j \leq n} 0 &= \sum_{\sigma \in G} \sum_{\mu=1}^{n'} \sum_{\nu=1}^n \alpha'_{k\mu}(\sigma^{-1}) \cdot \delta_{l\mu}\delta_{i\nu} \cdot \alpha_{\nu j}(\sigma) = \sum_{\sigma \in G} \alpha'_{kl}(\sigma^{-1}) \alpha_{ij}(\sigma). \end{aligned}$$

b) Genauso erhält man für $D = D'$ unter den angegebenen Voraussetzungen aus dem Korollar (1.17), p. 14, zum Lemma von Schur für jedes $f \in \text{Hom}(V, V)$

$$\tilde{f} = \lambda \cdot \text{id}_V \text{ für ein } \lambda \in K.$$

Matrizentheoretisch und angewendet auf $C = E_{li}$ ($1 \leq l, i \leq n$) ergibt dies die Existenz eines $\lambda_{li} \in K$ mit

$$(*) \quad \lambda_{li} E_n = \sum_{\sigma \in G} M(\sigma^{-1}) E_{li} M(\sigma)$$

und daraus (mit derselben Rechnung wie oben) für alle $1 \leq i, j, k, l \leq n$

$$\lambda_{li} \delta_{jk} = \sum_{\sigma \in G} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \alpha_{k\mu}(\sigma^{-1}) \cdot \delta_{l\mu}\delta_{i\nu} \cdot \alpha_{\nu j}(\sigma) = \sum_{\sigma \in G} \alpha_{kl}(\sigma^{-1}) \alpha_{ij}(\sigma).$$

Durch Spurberechnungen erhält man aus (*)

$$n\lambda_{li} = \sum_{\sigma \in G} \text{Tr}(M(\sigma)^{-1} E_{li} M(\sigma)) = \sum_{\sigma \in G} \text{Tr}(E_{li}) = \#G \cdot \delta_{il}.$$

Es ist $n = \dim V = \deg D$ und somit $\deg D \cdot \lambda_{li} = \delta_{il} \cdot \#G$. Für $l = i$ folgt $\deg D \cdot \lambda_{ii} = \#G \cdot 1_K$. Wegen $\text{char } K \nmid \#G$ ist $\#G \cdot 1_K \neq 0_K$, also auch $\deg D \cdot 1_K$, d. h. $\text{char } K \nmid \deg D$, und es folgt für alle $1 \leq i, l \leq n$

$$\lambda_{li} = \frac{\#G}{\deg D} \cdot \delta_{il}.$$

Zusammengefasst ergibt sich die Behauptung b).

Wir kommen nun zum **Beweis von Hauptsatz (2.5)**:

a) Nach Bemerkung (2.4),c), p. 16, ist $(\ , \)_G$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{K}$. Zum Beweis der *Regularität* sei $f \in \mathcal{K}$ mit

$$f \neq 0 \quad \text{und} \quad (f, g)_G = 0 \quad \text{für alle } g \in \mathcal{K}.$$

Sei $\tau \in G$ mit $f(\tau) \neq 0$ und $g \in \mathcal{K}$ die charakteristische Funktion der Konjugationsklasse $[\tau^{-1}]$ von τ^{-1} , also

$$g(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ konjugiert zu } \tau^{-1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung für die Klassenfunktion $f : G \rightarrow K$

$$\begin{aligned} 0 &= \#G \cdot (f, g)_G = \sum_{\sigma \in G} f(\sigma)g(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma \in [\tau]} f(\sigma) = \#[\tau]f(\tau) \\ \implies 0 &= (\#[\tau] \cdot 1_K) \cdot \underbrace{f(\tau)}_{\neq 0} \implies \#[\tau] \cdot 1_K = 0 \iff \text{char } K \mid \#[\tau]. \end{aligned}$$

Aber $\#[\tau] = (G : \text{Zentr}_G(\tau)) \mid \#G$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung $\text{char } K \nmid \#G$.

b) Seien D, D' inäquivalente irreduzible Darstellungen von G über K . Dann gilt nach den Orthogonalitätsrelationen (2.11),a), p. 19, mit den dortigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \#G \cdot (\chi_D, \chi_{D'}) &= \sum_{\sigma \in G} \chi_D(\sigma) \chi_{D'}(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma \in G} \text{Tr}(D(\sigma)) \cdot \text{Tr}(D'(\sigma^{-1})) \\ &= \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(\sigma) \cdot \sum_{k=1}^{n'} \alpha'_{kk}(\sigma^{-1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n'} \underbrace{\sum_{\sigma \in G} \alpha_{ii}(\sigma) \alpha'_{kk}(\sigma^{-1})}_{=0 \text{ nach (2.11),a)} = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\#G \cdot 1_K \neq 0_K$ folgt die Behauptung.

c) Für $D = D'$ folgt mit der gleichen Rechnung wegen der vorausgesetzten Schurbedingung (S_D) aus der Orthogonalitätsrelation (2.11),b), p. 19,

$$\begin{aligned} \#G \cdot (\chi_D, \chi_D) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{\sigma \in G} \alpha_{ii}(\sigma) \alpha_{kk}(\sigma^{-1})}_{= \delta_{ik} \frac{\#G}{\deg D} \text{ nach (2.11),b)} = \sum_{i=1}^n \frac{\#G}{\deg D} = \#G \cdot \frac{n}{\deg D}. \end{aligned}$$

Wegen $\#G \cdot 1_K \neq 0_K$ und $n = \deg D$ zeigt dies $(\chi_D, \chi_D) = 1$.

d) Erfüllt nun K die Schurbedingung (S) für G , also alle Schurbedingungen (S_D) , so folgt aus b) und c), dass die Charaktere inäquivalenter Darstellungen von G ein *Orthonormalsystem* bilden und daher in $\mathcal{K}$ linear unabhängig sind. Also gibt es höchstens $\dim_K \mathcal{K} = \#[G] = h_G$ viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen.

Zum Beweis von (2.5),d) bleibt daher zu zeigen, dass der Vektorraum $\mathcal{K}$ der Klassenfunktionen von Charakteren irreduzibler Darstellungen erzeugt wird. Dies folgt im nächsten Abschnitt.

d. Die reguläre Darstellung

(2.12) Proposition: Es sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$ und K erfülle die Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen). Sei D^* die reguläre Darstellung von G über K (siehe Bemerkung (1.5), p. 8) und $D^* = \bigoplus_{i=1}^t D_i$ eine Zerlegung in irreduzible Darstellungen D_i von G über K . Dann gilt für die Charaktere $\chi_i = \chi_{D_i}$ im Raum $\mathcal{K}$ der Klassenfunktionen:

$$\{\chi_1, \dots, \chi_t\}^\perp = \{0\}.$$

Beweis: Jede Klassenfunktion $f \in \mathcal{K}$ bestimmt durch

$$\hat{f} := \sum_{\tau \in G} f(\tau) \cdot D^*(\tau^{-1}) \in \text{End}(V^*)$$

einen G -Homomorphismus des Darstellungsraum V^* von D^* , denn es gilt für alle $\sigma \in G$

$$\begin{aligned} D^*(\sigma) \circ \hat{f} \circ D^*(\sigma^{-1}) &= \sum_{\tau \in G} f(\tau) D^*(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}) \\ &\stackrel{f \in \mathcal{K}}{=} \sum_{\tau \in G} f(\sigma\tau\sigma^{-1}) D^*(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}) = \sum_{\rho \in G} f(\rho) D^*(\rho^{-1}) = \hat{f} \end{aligned}$$

Nach Wahl der D_i haben wir eine Zerlegung $V^* = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ mit D^* -invarianten Unterräumen $V_i \leq V^*$. Daher gilt

$$\hat{f}(V_i) = \sum_{\tau \in G} f(\tau) D^*(\tau^{-1})(V_i) \subseteq V_i, \text{ also } \hat{f}_i := \hat{f}|_{V_i} \in \text{End}(V_i).$$

Mit $\hat{f}$ sind auch die $\hat{f}|_{V_i}$ mit D^* , also mit $D_i = D^*|_{V_i}$ verträglich. Wegen der Schurbedingung (S) und der Irreduzibilität der D_i existiert nach (Korollar (1.17), p. 14, für jedes i ein $\lambda_i \in K$ mit

$$\hat{f}_i = \hat{f}|_{V_i} = \lambda_i \cdot \text{id}_{V_i}.$$

Daraus folgt für alle $i \in \{1, \dots, t\}$

$$\text{Tr } \hat{f}_i = \deg D_i \cdot \lambda_i.$$

Andererseits gilt nach Definition von $\hat{f}$:

$$\text{Tr } \hat{f}_i = \text{Tr} \left(\sum_{\tau \in G} f(\tau) D_i(\tau^{-1}) \right) = \sum_{\tau \in G} f(\tau) \cdot \text{Tr}(D_i(\tau^{-1})) = \sum_{\tau \in G} f(\tau) \chi_i(\tau^{-1}) = \#G \cdot (f, \chi_i).$$

Ist nun $f \in \{\chi_1, \dots, \chi_t\}^\perp$, also $(f, \chi_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq t$, so folgt

$$\deg D_i \cdot \lambda_i = \#G \cdot (f, \chi_i) = 0.$$

Wegen der Irreduzibilität der D_i gilt nach Satz (2.11),b), p. 19, $\text{char } K \nmid \deg D_i$, also $(\deg D_i) \cdot 1_K \neq 0_K$ und somit

$$\bigwedge_i \lambda_i = 0 \implies \bigwedge_i \hat{f}_i = \hat{f}|_{V_i} = 0 \implies \hat{f} = 0.$$

Da D^* die reguläre Darstellung von G ist, existiert ein $v \in V^*$, so dass $\{D^*(\sigma)(v) \mid \sigma \in G\}$ Basis von V^* ist (siehe Bemerkung (1.5), (ii), p. 8). Für ein solches v gilt dann

$$\hat{f} = 0 \implies \hat{f}(v) = 0 \iff \sum_{\tau \in G} f(\tau) \cdot \underbrace{D^*(\tau^{-1})(v)}_{\text{Basis von } V^*} = 0 \implies \bigwedge_{\tau \in G} f(\tau) = 0 \iff f = 0.$$

Damit ist Prop. (2.12) bewiesen und wir kommen zum

Beweisschluss von Hauptsatz (2.5)d), p. 17: Sind o. E. $\chi_1, \dots, \chi_s$ ($s \leq t$) die *verschiedenen* unter den Charakteren $\chi_1, \dots, \chi_t$, so bilden sie, wie bereits bewiesen, ein Orthonormalsystem. Wegen

$$\{\chi_1, \dots, \chi_s\}^\perp = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}^\perp \stackrel{(2.12)}{=} \{0\}$$

folgt dann aus den Vorbemerkungen über Skalarprodukte (siehe b) auf S. 16)

$$\{\chi_1, \dots, \chi_s\}^\perp = \{0\} \iff \mathcal{K} = \langle \chi_1, \dots, \chi_s \rangle \text{ und } (\cdot, \cdot)_G \text{ ist regulär.}$$

Also bilden die in der Zerlegung der regulären Darstellung in irreduzible Komponenten auftretenden *verschiedenen* Charaktere ein Erzeugendensystem von $\mathcal{K}$ und damit eine Orthonormalbasis von $\mathcal{K}$. $\square$

Damit sind Hauptsatz (2.5) und alle daraus gezogenen Folgerungen in Abschnitt b. vollständig bewiesen. Darüberhinaus enthält der letzte Beweisschritt noch die zusätzliche Information: In der Zerlegung der regulären Darstellung D^* in irreduzible Darstellungen treten *alle* Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G auf. Im Falle von $\text{char } K = 0$ erhalten wir das folgende genauere Resultat.

(2.13) Satz: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit Charakteristik $\text{char } K = 0$ und die Schurbedingung (S) (etwa K algebraisch abgeschlossen). Dann gilt für die reguläre Darstellung D^* von G

$$D^* = \bigoplus_{i=1}^h \deg D_i \cdot D_i,$$

mit $h = h_G = \#[G]$ und $D_1, \dots, D_h$ einem vollständigen Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G über K .

Beweis: Für die Vielfachheit, mit der eine irreduzible Darstellung D_i in D^* auftritt, gilt

$$m_{D_i} \cdot 1_K \stackrel{(2.9)b)}{=} \frac{(\chi_{D^*}, \chi_{D_i})}{(\chi_{D_i}, \chi_{D_i})} \stackrel{(2.6)(1)}{=} (\chi_{D^*}, \chi_{D_i}).$$

Die reguläre Darstellung D^* ist die Permutationsdarstellung $P^* : G \rightarrow \mathcal{S}(G)$, $P^*(\sigma) = (\tau \mapsto \sigma\tau)$, und eine Matrixdarstellung M^* zu D^* daher gegeben durch $M^*(\sigma) = (\delta_{\tau, \sigma\tau})_{\tau, \sigma \in G}$ (siehe Beispiele (1.4),(4),(6), p. 7). Also gilt

$$\chi_{D^*}(\sigma) = \text{Tr } M^*(\sigma) = \sum_{\tau \in G} \delta_{\tau, \sigma\tau} = \#\{\tau \in G \mid \tau = \sigma\tau\} = \begin{cases} \#G & \sigma = e_G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$m_{D_i} \cdot 1_K = (\chi_{D^*}, \chi_{D_i}) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \chi_{D^*}(\sigma) \chi_{D_i}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\#G} \cdot \#G \cdot \chi_{D_i}(e_G) = \deg D_i \cdot 1_K.$$

Wegen $\text{char } K = 0$ erhält man daraus die Behauptung $m_{D_i} = \deg D_i \in \mathbb{N}_+$.

(2.14) Korollar: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K = 0$ und Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen), $h = h_G = \#[G]$ Zahl der Konjugationsklassen von G und $D_1, \dots, D_h$ inäquivalente irreduzible Darstellungen von G über K . Dann gilt

$$\#G = \sum_{i=1}^h (\deg D_i)^2.$$

Beweis durch Gradvergleich in Satz (2.13).

(2.15) Korollar: (Charaktere abelscher Gruppen)

Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K = 0$ und Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen). Dann sind äquivalent:

- (i) G ist abelsch.
- (ii) G besitzt $\#G$ inäquivalente irreduzible Darstellungen über K .
- (iii) Alle irreduziblen Charaktere (= Charaktere irreduzibler Darstellungen) von G über K haben den Grad 1.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ alle Konjugationsklassen sind einelementig $\Leftrightarrow h_G = \#[G] = \#G \xLeftrightarrow{(2.7)} (ii)$.

$$(ii) \Leftrightarrow h := h_G \geq \#G \xLeftrightarrow{(2.14)} h \geq \sum_{i=1}^h (\deg D_i)^2 \Leftrightarrow \bigwedge_i \deg D_i = 1.$$

§3 Gruppentheoretische Anwendungen

a. Charakterwerte

(3.1) Lemma: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$, $D : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ eine Darstellung von G und $\chi = \chi_D$ sein Charakter. Dann gilt für jedes $\sigma \in G$:

- a) $D(\sigma)$ ist über dem algebraischen Abschluss $\tilde{K}$ von K diagonalisierbar, d. h. in $\text{GL}_n(\tilde{K})$ ist $D(\sigma)$ ähnlich zu einer Matrix $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon_i \in \tilde{K}^\times$.

- b) Ist $d = \text{ord } \sigma$, so ist der Charakterwert $\chi(\sigma)$ Summe von d -ten Einheitswurzeln:

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i^d = 1.$$

- c) Ist $\text{char } K = 0$ und daher o. E. $\mathbb{Q} \subset K$, so gilt $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}(\zeta_d)$ ($d = \text{ord } \sigma$) und folglich

$$\chi(G) \subset \mathbb{Q}(\zeta_m) \text{ mit } m = \exp G = \text{kgV}(\text{ord } \tau \mid \tau \in G).$$

Dabei bezeichnet hier und im Folgenden ζ_n stets eine primitive n -te Einheitswurzel, d. h. ein Element $\zeta_n \in \mathbb{C}^\times$ mit $\text{ord } \zeta_n = n$.

- d) Bezeichnet $z \mapsto \bar{z}$ die komplexe Konjugation auf $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subset \mathbb{C}$, so gilt für die Charakterwerte $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$.

Beweis: a) Wir zerlegen die Darstellung $D|_{\langle \sigma \rangle} : \langle \sigma \rangle \rightarrow \text{GL}_n(K) \subset \text{GL}_n(\tilde{K})$ gemäß Korollar (1.14), p. 13, in eine direkte Summe über $\tilde{K}$ irreduzibler Darstellungen:

$$D|_{\langle \sigma \rangle} = \bigoplus_{i=1}^r D_i \text{ mit } D_i : \langle \sigma \rangle \rightarrow \text{GL}_{n_i}(\tilde{K}) \text{ irreduzibel.}$$

Nach Korollar (2.15) sind die D_i alle eindimensional, also $n_i = 1$, $r = n$, $D_i : \langle \sigma \rangle \rightarrow \tilde{K}^\times$ Homomorphismen und $\varepsilon_i = D_i(\sigma) \in \tilde{K}^\times$.

- b) $d = \text{ord } \sigma \implies \varepsilon_i^d = D_i(\sigma^d) = 1$ für alle i und folglich ist $\chi(\sigma) = \sum_i \varepsilon_i$ Summe d -ter Einheitswurzeln.

- c) Ist $\mathbb{Q} \subset K$, so liegen die Charakterwerte in Kreiskörpern: $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}(\zeta_d)$ für $d = \text{ord } \sigma$ und folglich $\chi(G) \subset \mathbb{Q}(\zeta_m)$ für $m = \exp G$.

- d) Dies folgt aus der Tatsache, dass Einheitswurzeln Betrag 1 haben und daher das Inverse

gleich dem Konjugierten ist: $z^d = 1 \implies |z|^d = 1 \implies |z| = 1 \implies z\bar{z} = 1 \implies \bar{z} = z^{-1}$, und damit erhält man die Behauptung

$$\chi(\sigma^{-1}) = \sum_i \varepsilon_i^{-1} = \sum_i \bar{\varepsilon}_i = \overline{\chi(\sigma)}.$$

Es sei im Folgenden $\text{char } K = 0$. Für die weiteren Überlegungen ist es wichtig, dass die Charakterwerte nicht nur in Einheitswurzelkörpern, sondern in einem ausgezeichneten Teilring von $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ liegen.

(3.2) Definition: Sei $K|\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung. $\alpha \in K$ heißt *ganz-algebraisch* (ganz über $\mathbb{Z}$), wenn es ein *normiertes* Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ gibt, das α als Wurzel hat.

Beispiel: Ganze Zahlen sind selbstverständlich ganz-algebraisch. Einheitswurzeln sind ganz-algebraisch.

(3.3) Satz: Sei $K|\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung. Dann sind für $\alpha \in K$ äquivalent:

(i) α ist ganz-algebraisch.

(ii) Es gibt einen Unterring $S \subset K$ mit $\alpha \in S$ und S ist als $\mathbb{Z}$ -Modul endlich erzeugt, d. h.

$$\bigvee_{r \in \mathbb{N}} \bigvee_{s_1, \dots, s_r \in S} S = \left\{ \sum_{i=1}^r m_i s_i \mid m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(iii) $\mathbb{Z}[\alpha] = \{g(\alpha) \mid g \in \mathbb{Z}[X]\}$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$ -Modul.

Beweis: (i) $\implies$ (iii): Ist α Wurzel des normierten Polynoms $f = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, so ist

$$\alpha^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i \in M := \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} \alpha^i.$$

Induktiv zeigt man dann $\alpha^m \in M$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit ist $\mathbb{Z}[\alpha] = M$ endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$ -Modul.

(iii) $\implies$ (ii): $S = \mathbb{Z}[\alpha]$ leistet das Geforderte.

(ii) $\implies$ (i): Es seien S und $s_1, \dots, s_r$ wie in (ii). Da S ein Ring ist, der α enthält, folgt

$$\alpha s_i = \sum_{j=1}^r m_{ij} s_j \quad \text{mit} \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist $M = (m_{ij})_{ij} \in M_r(\mathbb{Z})$ und es gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\alpha \in K$ ein Eigenwert der Matrix $M \in M_n(\mathbb{Z}) \subset M_n(K)$ – es sei denn alle $s_i = 0$, $S = 0$; dann ist aber $\alpha = 0$ und trivialerweise ganz-algebraisch. Als Eigenwert von M ist α Wurzel des charakteristischen Polynoms $f = \det(XE - M)$. f ist ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, da M nur ganzzahlige Einträge hat. Also ist α ganz-algebraisch.

□

(3.4) Korollar: Die ganz-algebraischen Elemente eines Oberkörpers K von $\mathbb{Q}$ bilden einen Unterring in K .

Beweis: Sei S die Menge aller ganz-algebraischen Zahlen in K . Dann gilt offensichtlich $\mathbb{Z} \subset S$ und zum Nachweis der Unterringeigenschaft genügt es zu zeigen: $\alpha, \beta \in S \implies \alpha \pm \beta, \alpha \cdot \beta \in S$. Da α und β ganz-algebraisch sind, gilt für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \langle 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1} \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad \mathbb{Z}[\beta] = \langle 1, \beta, \dots, \beta^{m-1} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Dann ist auch der Unterring $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \langle \alpha^i \beta^j \mid 0 \leq i < n, 0 \leq j < m \rangle_{\mathbb{Z}}$ endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$ -Modul und alle Elemente darin sind ganz-algebraisch, insbesondere $\alpha \pm \beta$ und $\alpha \cdot \beta$.

(3.5) Korollar: Sei K ein Körper der Charakteristik 0, G eine endliche Gruppe und $\chi : G \rightarrow K$ ein Charakter von G . Dann sind alle Charakterwerte $\chi(\sigma)$ ganz-algebraisch.

Beweis: Charakterwerte sind Summen von Einheitswurzeln und daher ganz-algebraisch.

(3.6) Proposition: $\mathbb{Z}$ ist ganz-abgeschlossen, d. h. alle ganz-algebraischen Elemente in $\mathbb{Q} = \text{Quot}(\mathbb{Z})$ liegen bereits in $\mathbb{Z}$:

$$\alpha \in \mathbb{Q} \text{ ganz-algebraisch} \implies \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Sei $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $f = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ mit $f(\alpha) = 0$. Dann gilt

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{r^i}{s^i} \iff r^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i s^{n-i} = s \cdot \left(- \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i s^{n-1-i} \right).$$

Damit ist s ein Teiler von r^n , wegen der Teilerfremdheit $\text{ggT}(r, s) = 1$ folgt $s = \pm 1$ und somit $\alpha = \pm r \in \mathbb{Z}$. $\square$

Insbesondere gilt: Sind Charakterwerte rational, so sind sie schon ganzzahlig.

(3.7) Satz: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K = 0$ und Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen). Dann sind äquivalent:

(i) Alle Charaktere von G über K haben rationale (und damit ganzzahlige) Werte.

(ii) Für alle $\sigma \in G$ und alle zu $\text{ord } \sigma$ teilerfremden $l \in \mathbb{Z}$ gilt: σ^l ist konjugiert zu σ .

Zusatz: (ii) $\implies$ (i) gilt für alle Körper der Charakteristik 0, die Umkehrung jedoch nicht, z. B. nicht für $K = \mathbb{Q}$.

Beweis: Sei $\sigma \in G$ und $m = \text{ord } \sigma$. Dann gilt nach Lemma (3.1), c), p. 24, für jeden Charakter $\varphi : G \rightarrow K$

$$\varphi(\sigma) = \text{Tr} D(\sigma) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \in \mathbb{Q}(\zeta_m), \quad \varepsilon_i \text{ } m\text{-te Einheitswurzeln.}$$

Sei l prim zu m , also $\bar{l} = l + m\mathbb{Z} \in \mathcal{P}(m)$ eine prime Restklasse modulo m . Wegen der bekannten Isomorphie $G(\mathbb{Q}(\zeta_m)|\mathbb{Q}) \simeq \mathcal{P}(m)$ gibt es ein $\rho_l \in G(\mathbb{Q}(\zeta_m)|\mathbb{Q})$ mit $\rho_l(\zeta_m) = \zeta_m^l$ und wir erhalten

$$m = \text{ord } \sigma \wedge \text{ggT}(l, m) = 1 \implies \varphi(\sigma^l) = \text{Tr} D(\sigma)^l = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^l = \sum_{i=1}^n \rho_l(\varepsilon_i) = \rho_l(\varphi(\sigma)).$$

(ii) $\implies$ (i): Aus den Vorüberlegungen und (ii) folgt (für beliebige Erweiterungskörper $K|\mathbb{Q}$)

$$\bigwedge_{l \in \mathcal{P}(m)} \chi(\sigma) = \chi(\sigma^l) = \rho_l(\chi(\sigma)),$$

also ist $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ fix unter der gesamten Galoisgruppe $G(\mathbb{Q}(\zeta_m)|\mathbb{Q})$ und liegt daher nach dem Hauptsatz der Galoistheorie im Grundkörper $\mathbb{Q}$: $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Aus den Vorüberlegungen und (i) folgt $\chi(\sigma^l) = \rho_l(\chi(\sigma)) = \chi(\sigma)$ für l prim zu m und alle Charaktere χ . Also haben σ und σ^l denselben Wert unter allen Charakteren von G über K . Da diese unter den gegebenen Voraussetzungen den Raum $\mathcal{K}$ aller Klassenfunktionen erzeugen (siehe Hauptsatz (2.5),d), p. 17), gilt für *alle* Klassenfunktion $f \in \mathcal{K}$ $f(\sigma) = f(\sigma^l)$. Wählt man speziell f als charakteristische Funktion der Konjugationsklasse $[\sigma]$ von G , so folgt $f(\sigma^l) = f(\sigma) = 1 \iff \sigma^l \in [\sigma]$, also (ii).

Ist $K = \mathbb{Q}$, so gilt (i) trivialerweise, aber (ii) kann in abelschen Gruppen nur für $\sigma = \sigma^l$ gelten. Nun sind aber die σ^l mit l prim zu $\text{ord } \sigma$ genau die Erzeugenden der zyklischen Gruppe $\langle \sigma \rangle$. (ii) kann in der genannten Situation also nur gelten, wenn $\langle \sigma \rangle$ nur *ein* Erzeugendes hat, also $\text{ord } \sigma = 2$ ist.

Anmerkung: In einer Gruppe G definiert man die *Abteilung* von σ als

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{ \tau \in G \mid \langle \tau \rangle \text{ konjugiert zu } \langle \sigma \rangle \}.$$

$\mathcal{A}(\sigma)$ besteht also genau aus den Konjugierten der Erzeugenden von $\langle \sigma \rangle$, also den Konjugierten der Potenzen σ^l mit l prim zu $\text{ord } \sigma$:

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{ \tau \in G \mid \tau \text{ konjugiert zu } \sigma^l, \text{ } l \text{ prim zu } \text{ord } \sigma \}$$

Der Beweis von (3.7) zeigt daher, dass rationalwertige Gruppencharaktere auf Abteilungen konstant sind, denn

$$\varphi(\sigma) \in \mathbb{Q} \wedge \tau \in \mathcal{A}(\sigma) \implies \tau \text{ konjugiert zu } \sigma^l \implies \varphi(\tau) = \varphi(\sigma^l) = \rho_l(\varphi(\sigma)) = \varphi(\sigma).$$

(3.8) Korollar: Die Charaktere der symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_n$ über Körpern K mit $\text{char } K = 0$ haben ganzzahlige Werte.

Beweis: Nach Satz (3.7) genügt es zu zeigen:

$$\sigma \in \mathcal{S}_n, \text{ ggT}(l, \text{ord } \sigma) = 1 \implies \sigma^l = \rho^{-1} \sigma \rho \text{ für ein } \rho \in \mathcal{S}_n.$$

Sei $\sigma = \prod_i \sigma_i$ die Zerlegung in elementfremde Zyklen. Dann gilt $\sigma^l = \prod_i \sigma_i^l$ und wegen $\text{ord } \sigma = \text{kgV}(\text{ord } \sigma_i)$ ist l prim zur Länge jedes Zyklus σ_i . Ist also $\tau = (a_0, \dots, a_{m-1})$ ein Zyklus der Länge m und l prim zu m , so ist $\tau^l = (a_0, a_l, a_{2l}, \dots, a_{(m-1)l})$ (Indizes modulo m gerechnet) ebenfalls ein Zyklus gleicher Länge m (denn $a_{kl} = a_0 \iff m \mid kl \iff m \mid k$). Nun gilt allgemein für $\rho \in \mathcal{S}_n$ $\rho \circ (a_0, \dots, a_{m-1}) \circ \rho^{-1} = (\rho(a_0), \dots, \rho(a_{m-1}))$. Wählt man also $\rho : a_i \mapsto a_{li}$ ($0 \leq i < m$), so erhält man $\rho \circ \tau \circ \rho^{-1} = \tau^l$. Da die Zyklen σ_i elementfremd sind, kann man die für jeden Zyklus $\tau = \sigma_i$ gefundenen ρ_i zusammensetzen zu einer Permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ mit $\rho \sigma \rho^{-1} = \sigma^l$.

(3.9) Satz: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper der Charakteristik 0 und D eine irreduzible Darstellung von G über K . Erfüllt K die Schurbedingung (S_D) für D (etwa K algebraisch abgeschlossen), so gilt für den Charakter $\chi = \chi_D$ von D

$$\omega(\sigma) := \frac{\#[\sigma] \cdot \chi(\sigma)}{\chi(1)} \text{ ist ganz-algebraisch für alle } \sigma \in G.$$

Sind insbesondere die Charakterwerte $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}$ rational, so ist $\deg \chi = \chi(1)$ ein Teiler von $\#[\sigma] \cdot \chi(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Dies trifft speziell für $G = \mathcal{S}_n$ zu.

Beweis: Die Folgerungen sind klar, da $\chi(\sigma), \omega(\sigma)$ ganz-algebraisch und rational, also ganzzahlig sind, und für $G = \mathcal{S}_n$ alle Charaktere rationalwertig sind.

Sei D eine Darstellung von G über K mit Charakter χ , also D irreduzibel, und V der Darstellungsraum. Es bezeichne $\tau \sim \sigma$ die Konjugiertheit in G . Für $\sigma \in G$ setzen wir

$$f_\sigma := \sum_{\tau \sim \sigma} D(\tau) \in \text{End}(V).$$

Da f_σ nur von der Konjugationsklasse $[\sigma]$ abhängt, schreiben wir gelegentlich auch $f_{[\sigma]} := f_\sigma$. Die so definierten f_σ sind G -Homomorphismen von V , denn es gilt für $\rho \in G$

$$D(\rho)^{-1} \circ f_\sigma \circ D(\rho) = \sum_{\tau \sim \sigma} D(\rho^{-1} \tau \rho) = f_\sigma.$$

Nach dem Lemma von Schur (1.15),b), p. 14, existiert dann ein $\lambda_\sigma \in K$ mit $f_\sigma = \lambda_\sigma \cdot \text{id}_V$. Es gilt daher

$$\lambda_\sigma \chi(1) = \lambda_\sigma \deg D = \text{Tr } f_\sigma = \sum_{\tau \in [\sigma]} \text{Tr } D(\tau) = \sum_{\tau \in [\sigma]} \chi(\tau) = \#[\sigma] \cdot \chi(\sigma) \implies \lambda_\sigma = \omega(\sigma).$$

Wir zeigen nun, dass der endlich erzeugte $\mathbb{Z}$ -Modul $S := \sum_{\sigma \in G} \mathbb{Z} \omega(\sigma)$ ein Unterring von K ist und daher nach Satz (3.3), (ii), p. 25, alle Elemente darin ganz-algebraisch sind. Offenbar ist $1 = \omega(e_G) \in S$. Seien nun $\sigma, \sigma' \in G$. Dann gilt

$$f_\sigma \circ f_{\sigma'} = \sum_{\tau \sim \sigma} D(\tau) \circ \sum_{\tau' \sim \sigma'} D(\tau') = \sum_{\substack{\tau \sim \sigma \\ \tau' \sim \sigma'}} D(\tau \tau') = \sum_{\rho \in G} \sum_{\substack{\tau \tau' = \rho \\ \tau \sim \sigma, \tau' \sim \sigma'}} D(\rho) = \sum_{\rho \in G} c_{\sigma, \sigma', \rho} D(\rho)$$

mit

$$c_{\sigma, \sigma', \rho} := \#C_{\sigma, \sigma', \rho} := \#\{(\tau, \tau') \mid \tau \sim \sigma, \tau' \sim \sigma', \tau \tau' = \rho\}.$$

Diese Anzahlen sind nur von den Konjugationsklassen der Argumente abhängig. Für die ersten beiden Argumente σ und σ' sind sogar die Mengen $C_{\dots}$ selbst nur von den Konjugationsklassen abhängig. Ist nun $\tilde{\rho} = \alpha^{-1} \rho \alpha = \iota \rho$ mit der Konjugation $\iota = \alpha^{-1}(\dots)\alpha$, so ist

$$\iota : C_{\sigma, \sigma', \rho} \xrightarrow{\sim} C_{\iota \sigma, \iota \sigma', \iota \rho} = C_{\sigma, \sigma', \tilde{\rho}} \text{ bijektiv}$$

mit ι^{-1} als Umkehrabbildung. Also stimmen auch die Anzahlen $c_{\sigma, \sigma', \rho} = c_{\sigma, \sigma', \tilde{\rho}}$ überein und es gilt daher

$$\sum_{\rho \in G} c_{\sigma, \sigma', \rho} D(\rho) = \sum_{[\gamma] \in [G]} c_{\sigma, \sigma', \gamma} \sum_{\rho \sim \gamma} D(\rho) = \sum_{[\gamma] \in [G]} c_{\sigma, \sigma', \gamma} f_\gamma.$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) \omega(\sigma') \text{id}_V &= f_\sigma \circ f_{\sigma'} = \sum_{[\gamma] \in [G]} c_{\sigma, \sigma', \gamma} \cdot \omega(\gamma) \text{id}_V \\ \iff \omega(\sigma) \omega(\sigma') &= \sum_{[\gamma] \in [G]} c_{\sigma, \sigma', \gamma} \cdot \omega(\gamma) \in \sum_{\sigma \in G} \mathbb{Z} \omega(\sigma) = S. \end{aligned}$$

(3.10) Korollar: Sei G eine endliche Gruppe, und K ein Körper mit $\text{char } K = 0$.

- a) Sei D eine irreduzible Darstellung von G über K und K erfülle die Schurbedingung (S_D) für D . Dann ist der Grad von D ein Teiler der Gruppenordnung: $\deg D \mid \#G$.
- b) Erfüllt K die Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen), so sind die Grade aller irreduziblen Darstellungen von G über K Teiler der Gruppenordnung $\#G$.

Beweis: Es ist nur a) zu zeigen. Sei $\chi = \chi_D$. Nach Hauptsatz (2.5),c), p. 17, ist $(\chi, \chi)_G = 1$, also

$$\begin{aligned} \#G &= \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \chi(\sigma^{-1}) = \sum_{[\gamma] \in [G]} \sum_{\sigma \in [\gamma]} \chi(\sigma) \chi(\sigma^{-1}) = \sum_{[\gamma] \in [G]} \#[\gamma] \chi(\gamma) \cdot \chi(\gamma^{-1}) \\ \implies \frac{\#G}{\chi(1)} &= \sum_{[\gamma] \in [G]} \omega(\gamma) \cdot \chi(\gamma^{-1}) \text{ ganz-algebraisch nach (3.9) und (3.5)} \\ \implies \frac{\#G}{\chi(1)} &\in \mathbb{Z} \iff \deg D = \chi(1) \mid \#G. \end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Anwendung von Satz (3.9) ist Burnsidess (p, q) -Theorem (siehe Abschnitt 3.c., p. 35).

b. Charaktertafeln

Es sei im Folgenden G eine endliche Gruppe, $h = \#G$ die Klassenzahl von G , $\kappa_1, \dots, \kappa_h$ die verschiedenen Konjugationsklassen, $\chi_1, \dots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0. Die *Charaktertafel* von G ist die quadratische $h \times h$ -Matrix

$$\begin{array}{c|ccc} & \kappa_1 & \cdots & \kappa_h \\ \hline \chi_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \chi_h & & & \end{array} \quad \chi_\mu(\kappa_j)$$

Dabei wählt man in der Regel χ_1 als Einsdarstellung von G und $\kappa_1 = [e_G]$, so dass die erste Zeile $(1, \dots, 1)$ ist und die erste Spalte die Grade der Charaktere enthält.

Aus Charaktertafeln kann man Informationen über Struktur der Gruppe G entnehmen (siehe etwa nachfolgenden Satz (3.13), p. 33), so dass Methoden zu ihrer Berechnung von besonderem Interesse sind. Dafür sind die Orthogonalitätsrelationen sehr nützlich. Zunächst die aus dem Hauptsatz (2.5), d), p. 17 zu entnehmende 1. Orthogonalitätsrelation (für die *Zeilen* der Charaktertafel)

$$\begin{aligned} \#G \cdot \delta_{\mu\nu} &\stackrel{(2.5)}{=} \#G \cdot (\chi_\mu, \chi_\nu)_G = \sum_{\sigma \in G} \chi_\mu(\sigma) \chi_\nu(\sigma^{-1}) = \sum_{j=1}^h \sum_{\sigma \in \kappa_j} \chi_\mu(\sigma) \chi_\nu(\sigma^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^h \# \kappa_j \chi_\mu(\kappa_j) \chi_\nu(\kappa_j^{-1}) \stackrel{(3.1) \text{ d)}}{=} \sum_{j=1}^h \# \kappa_j \chi_\mu(\kappa_j) \overline{\chi_\nu(\kappa_j)} \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist eine Orthogonalität zwischen den *Zeilen* der Charaktertafel bzgl. eines modifizierten gewichteten Skalarproduktes auf dem $\mathbb{C}^h$.

Daneben haben wir die 2. Orthogonalitätsrelation (für die *Spalten* der Charaktertafel bzgl. des Standardskalarproduktes auf dem $\mathbb{C}^h$). Diese lässt sich zwar aus der ersten ableiten und stellt daher keine neue einschränkende Bedingung für die Charaktertafeln dar, ist aber dennoch bei deren Bestimmung sehr nützlich.

(3.11) Korollar: (2. Orthogonalitätsrelation)

Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$ und Schurbedingung (S) für G (etwa K algebraisch abgeschlossen). Dann gilt für $\sigma, \tau \in G$ (mit obigen Bezeichnungen)

$$\sum_{\mu=1}^h \chi_\mu(\sigma) \chi_\mu(\tau^{-1}) = \begin{cases} \#G / \#[\sigma] & \text{falls } \sigma \text{ konjugiert zu } \tau, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und im Falle $\text{char } K = 0$ für alle $1 \leq j, k \leq h$

$$\sum_{\mu=1}^h \chi_\mu(\kappa_j) \overline{\chi_\mu(\kappa_k)} = \delta_{jk} \cdot \frac{\#G}{\#\kappa_j}.$$

Die Auswertung für die erste Spalte ($j = k = 1$) ergibt die bereits bekannte Relation $\#G = \sum_{\mu=1}^h (\chi_\mu(1))^2 = \sum_{\mu=1}^h \deg \chi_\mu^2$ (siehe Korollar (2.14), p. 23).

Beweis: Nach der 1. Orthogonalitätsrelation gilt

$$\#G \cdot \delta_{\mu\nu} = \sum_{j=1}^h \# \kappa_j \chi_\mu(\kappa_j) \chi_\nu(\kappa_j^{-1}) \iff \#G \cdot E_h = \left(\# \kappa_j \chi_\mu(\kappa_j) \right)_{\mu,j} \cdot \left(\chi_\nu(\kappa_j^{-1}) \right)_{j,\nu}.$$

Wegen $\#G \cdot 1_K \neq 0_K$ ist damit

$$\frac{1}{\#G} \left(\# \kappa_j \chi_\mu(\kappa_j) \right)_{\mu,j} \quad \text{invers zu} \quad \left(\chi_\nu(\kappa_j^{-1}) \right)_{j,\nu}$$

und daher gilt auch in umgekehrter Reihenfolge

$$\#G \cdot E_h = \left(\chi_\nu(\kappa_i^{-1}) \right)_{i,\nu} \cdot \left(\# \kappa_j \chi_\nu(\kappa_j) \right)_{\nu,j} \iff \#G \cdot \delta_{ij} = \sum_{\nu=1}^h \chi_\nu(\kappa_i^{-1}) \cdot \# \kappa_j \chi_\nu(\kappa_j).$$

Mit $\kappa_i = [\tau]$ und $\kappa_j = [\sigma]$ erhält man die Behauptung. Die zweite Formulierung für $\text{char } K = 0$ folgt wieder mit Lemma (3.1),d), p. 24. $\square$

(3.12) Berechnung von Charaktertafeln (Beispiele)

Zwei Permutationen sind in der symmetrischen Gruppe konjugiert, wenn sie in ihren Zyklenzerlegungen die gleichen Zyklenlängen haben (bis auf die Reihenfolge). Die Konjugationsklassen sind also durch die aufsteigende Folge $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_r$ der Zyklenlängen charakterisiert.

1. Charaktertafel: Symmetrische Gruppe $G = \mathcal{S}_3$.

Repräsentanten der Konjugationsklassen sind die Zyklen $()$, $(1\ 2)$ $(1\ 2\ 3)$; die Klassenzahl ist $h = 3$ und wir starten mit der folgenden (unvollständigen) Charaktertafel

$\mathcal{S}_3$	κ_2	κ_3
$()$ $(1\ 2)$ $(1\ 2\ 3)$		
χ_1	1	1
χ_2		
χ_3		
$\# \kappa_j$	1	3
$\frac{\#G}{\# \kappa_j}$	6	2

Zur Berechnung der Tafel $\alpha_{ij} = \chi_i(\kappa_j)$ verwenden wir die folgenden Resultate

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha_{i1} = \deg \chi_i \in \mathbb{N}_+, \text{ o. E. aufsteigend} \\ (2) \quad & \deg \chi_i = \alpha_{i1} \mid \#G \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$(3_{jk}) \quad \sum_{i=1}^h \alpha_{ij} \alpha_{ik} = \delta_{jk} \cdot \frac{\#G}{\# \kappa_j} \quad (3.11)$$

$$(4) \quad \alpha_{ij} = \chi_i(\kappa_j) \in \mathbb{Z} \quad (3.8), \quad G = \mathcal{S}_n$$

$$(5_{ij}) \quad \alpha_{i1} = \deg \chi_i \mid \# \kappa_j \cdot \alpha_{ij} \quad (3.9), \quad G = \mathcal{S}_n$$

$$(3_{11}) \implies 6 = 1 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 \implies 5 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 \xrightarrow{(1)} \alpha_{21} = 1, \alpha_{31} = 2.$$

$$(3_{22}) \implies 2 = 1 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 \xrightarrow{(4)} \alpha_{22}, \alpha_{32} \in \{0, \pm 1\}.$$

$$(5_{32}) \implies 2 = \deg \chi_3 \mid \# \kappa_2 \cdot \chi_3(\kappa_2) = 3\alpha_{32} \implies 2 \mid \alpha_{32} \implies \alpha_{32} = 0.$$

Zwischenstand:

$\mathcal{S}_3$	$()$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1		
χ_3	2	0	

Auswertung der Spalten-Orthogonalität:

$$(3_{12}) \implies 0 = 1 + \alpha_{22} + 2 \cdot 0 \implies \alpha_{22} = -1.$$

$$(3_{23}) \implies 0 = 1 - \alpha_{23} + 0 \implies \alpha_{23} = 1.$$

$$(3_{13}) \implies 0 = 1 + 1 + 2\alpha_{33} \implies \alpha_{33} = -1.$$

Damit ist die Charaktertafel vollständig:

$\mathcal{S}_3$	$()$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Der 1-dimensionale Charakter χ_2 ist natürlich der wohlbekannte Homomorphismus $\text{sign} : \mathcal{S}_3 \rightarrow \{\pm 1\}$. Ihn von Anfang an zu berücksichtigen, hätte die Argumentation natürlich verkürzt. Es sollte jedoch die Leistungsfähigkeit der Orthogonalitätsrelationen aufgezeigt werden.

2. Charaktertafel: Symmetrische Gruppe $G = \mathcal{S}_4$.

Repräsentanten der Konjugationsklassen sind $()$, $(1\ 2)$, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2\ 3\ 4)$, die Klassenzahl ist $h = 5$ und wir starten mit

$\mathcal{S}_4$	$()$	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2					
χ_3					
χ_4					
χ_5					
$\#\kappa_j$	1	6	3	8	6
$\#G/\#\kappa_j$	24	4	8	3	4

Wie oben verwenden wir (1)–(5).

$$\begin{aligned}
(3_{11}) &\implies 23 = \sum_{i=2}^5 \alpha_{i1}^2 \xRightarrow{(1)} \alpha_{51} \leq 4 \\
\text{Ann.: } \alpha_{51} = 4 &\implies 7 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 + \alpha_{41}^2 \implies \alpha_{41} \leq 2 \\
&\alpha_{41} = 1 \implies 7 = 3 \text{ (Wid.)} \\
&\alpha_{41} = 2 \implies 3 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 \text{ (Wid.)} \\
\text{Ann.: } \alpha_{51} \leq 2 &\implies 23 \leq 16 \text{ (Wid.)} \\
\text{Also: } \underline{\alpha_{51} = 3} &\implies 14 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 + \alpha_{41}^2 \implies \alpha_{41} \leq 3 \\
&\alpha_{41} \leq 2 \implies 14 \leq 12 \text{ (Wid.)} \\
\text{Also: } \underline{\alpha_{41} = 3} &\implies 5 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 \implies \underline{\alpha_{21} = 1}, \underline{\alpha_{31} = 2} \\
(3_{44}) &\implies 2 = \sum_{i=2}^5 \alpha_{i4}^2 \implies \alpha_{i4} \in \{0, \pm 1\}, \alpha_{i4} = 0 \text{ für genau zwei } i \\
(5_{44}) &\implies 3 \mid 8 \cdot \alpha_{44} \implies \underline{\alpha_{44} = 0} \\
(5_{54}) &\implies 3 \mid 8 \cdot \alpha_{54} \implies \underline{\alpha_{54} = 0} \implies \alpha_{24}, \alpha_{34} \in \{\pm 1\} \\
(3_{14}) &\implies 0 = 1 + \alpha_{24} + 2\alpha_{34} \implies \alpha_{24} = -2\alpha_{34} - 1 \\
&\alpha_{34} = 1 \implies \alpha_{24} = -3, \text{ Wid.} \\
\text{Also: } \underline{\alpha_{34} = -1} &\implies \underline{\alpha_{24} = 1}
\end{aligned}$$

Zwischenstand:

$\mathcal{S}_4$	$()$	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1			1	
χ_3	2			-1	
χ_4	3			0	
χ_5	3			0	
$\#G/\#\kappa_j$	24	4	8	3	4

$$\begin{aligned}
(3_{j4}) &\implies 0 = 1 + \alpha_{2j} - \alpha_{3j} \implies \alpha_{3j} = \alpha_{2j} + 1 \ (j \neq 4) \\
(3_{22}) &\implies 3 = \sum_{i=2}^5 \alpha_{i2}^2 \implies \alpha_{i2} \in \{0, \pm 1\}, \ \alpha_{i2} = 0 \text{ für genau ein } i \\
(3_{12}) &\implies 0 = 1 + \alpha_{22} + 2(\alpha_{22} + 1) + 3\alpha_{42} + 3\alpha_{52} \implies -1 = \alpha_{22} + \alpha_{42} + \alpha_{52} \\
&\alpha_{52} = 0 \implies \alpha_{22}, \alpha_{42} \in \{\pm 1\} \wedge -1 = \alpha_{22} + \alpha_{42}, \text{ (Wid.)}
\end{aligned}$$

Also: $\alpha_{52} = \pm 1$

Genauso: $\alpha_{22} = \pm 1, \alpha_{42} = \pm 1$

Also: $\underline{\alpha_{32} = 0} \implies 0 = \alpha_{22} + 1 \implies \underline{\alpha_{22} = -1} \implies 0 = \alpha_{42} + \alpha_{52}$

Wegen $\#\kappa_2 = \#\kappa_5$ folgert man genauso

$$\underline{\alpha_{35} = 0}, \underline{\alpha_{25} = -1}, \alpha_{45} = -\alpha_{55} = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
(3_{25}) &\implies 0 = 1 + 1 + \alpha_{42}\alpha_{45} + \alpha_{52}\alpha_{55} \implies -2 = \alpha_{42}\alpha_{45} + \alpha_{52}\alpha_{55} \\
&\implies \alpha_{42} = -\alpha_{45}, \alpha_{52} = -\alpha_{55} \\
&\implies \alpha_{42} = -\alpha_{45} = \alpha_{55} = -\alpha_{52} = \pm 1 \\
&\implies \text{o. E. } \alpha_{42} = 1 \text{ (sonst } \chi_4, \chi_5 \text{ vertauschen)}
\end{aligned}$$

Zwischenstand:

$\mathcal{S}_4$	$()$	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1		1	-1
χ_3	2	0		-1	0
χ_4	3	1		0	-1
χ_5	3	-1		0	1
$\#G/\#\kappa_j$	24	4	8	3	4

$$(3_{33}) \implies 7 = \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{53}^2 \implies -2 \leq \alpha_{i3} \leq 2$$

$$(5_{33}) \implies 2 \mid 3 \cdot \alpha_{33} \implies \alpha_{33} \in \{0, \pm 2\}$$

$$\alpha_{33} = 0 \implies 7 = \alpha_{23}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{53}^2, \text{ Wid.}$$

Also: $|\alpha_{33}| = 2 \implies 3 = \alpha_{23}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{53}^2 \implies |\alpha_{23}| = |\alpha_{43}| = |\alpha_{53}| = 1$

$$\alpha_{23} + 1 = \alpha_{33} \implies \underline{\alpha_{23} = 1}, \underline{\alpha_{33} = 2}$$

$$(3_{13}) \implies 0 = 1 + 1 + 2 \cdot \alpha_{33} + 3\alpha_{43} + 3\alpha_{53}$$

$$\implies -6 = 3(\alpha_{43} + \alpha_{53}) \implies -2 = \alpha_{43} + \alpha_{53}$$

$$\implies \underline{\alpha_{43} = \alpha_{53} = -1}$$

Charaktertafel der $\mathcal{S}_4$:

$\mathcal{S}_4$	$()$	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1
$\#G/\#\kappa_j$	24	4	8	3	4

3. Charaktertafel: Alternierende Gruppe $G = \mathcal{A}_4$

Repräsentanten der Konjugationsklassen sind $()$, $(12)(34)$, (123) , (132) , die Klassenzahl ist $h = 4$. Wegen $\kappa_4 = \kappa_3^{-1}$ gilt $\alpha_{i4} = \chi_i(\kappa_3^{-1}) = \overline{\chi_i(\kappa_3)} = \overline{\alpha_{i3}}$: Die 4-te Spalte der Charaktertafel ist das konjugiert Komplexe der 3-ten Spalte. Wir starten mit

$\mathcal{A}_4$	$()$	$(12)(34)$	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2				
χ_3				
χ_4				
$\#\kappa_j$	1	3	4	4
$\#G/\#\kappa_j$	12	4	3	3

Die Kleinsche Vierergruppe $\mathcal{V}_4 = \langle \kappa_2 \rangle$ ist Normalteiler in $\mathcal{A}_4$ mit Faktorgruppe $\mathcal{A}_4/\mathcal{V}_4 \simeq C_3 = \langle (1\,2\,3) \rangle$, zyklisch von der Ordnung 3. Die abelsche Gruppe C_3 besitzt genau 3 irreduzible Darstellungen, diese sind eindimensional und ihre Charaktere daher Gruppenhomomorphismen $\chi_i : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ (siehe Korollar (2.15), p. 24). Ist σ Erzeuger von C_3 , so sind die drei Charakterwerte $\chi_i(\sigma)$ gerade die verschiedenen dritten Einheitswurzeln:

$$\chi_i(\sigma) = \zeta^i \quad (i = 0, 1, 2) \text{ mit einer primitiven 3-ten Einheitswurzel } \zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \in \mathbb{C}.$$

Durch Vorschaltung der kanonischen Projektion $\mathcal{A}_4 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_4/\mathcal{V}_4 \simeq C_3$ erhält man drei lineare Charaktere χ_i für $\mathcal{A}_4$. Wegen $\langle \kappa_2 \rangle \subset \mathcal{V}_4 \subset \text{Ke } \chi_i$ gilt $\alpha_{i2} = \chi_i(\kappa_2) = 1$. Außerdem gilt $\alpha_{i3} = \chi_i((1\,2\,3)) = \zeta^i$ und damit der folgende

Zwischenstand:

$\mathcal{A}_4$	$()$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ	$\bar{\zeta}$
χ_3	1	1	$\bar{\zeta}$	ζ
χ_4				
$\#G/\#\kappa_j$	12	4	3	3

Aus dem Längenquadrat der ersten Spalte erhalten wir $\alpha_{41}^2 = 12 - 3 = 9 \implies \underline{\alpha_{41} = 3}$ und aus der Orthogonalität der Spalten dann

$$0 = 3 + 3\alpha_{42} \implies \underline{\alpha_{42} = -1} \text{ sowie } 0 = 1 + \zeta + \bar{\zeta} + 3\alpha_{43} \implies \underline{\alpha_{43} = 0} \implies \alpha_{44} = \bar{\alpha}_{43} = 0.$$

Charaktertafel der $\mathcal{A}_4$:

$\mathcal{A}_4$	$()$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ	$\bar{\zeta}$
χ_3	1	1	$\bar{\zeta}$	ζ
χ_4	3	-1	0	0

Als ein erstes Beispiel, wie man aus der Charaktertafel Informationen über die Gruppe ablesen kann, ist der nachfolgende Satz, demzufolge die möglichen Normalteiler einer Gruppe an der Charaktertafel ablesbar sind.

(3.13) Satz: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper der Charakteristik 0 und χ ein Charakter von G über K .

a) Ist D eine Darstellung und χ sein Charakter, so gilt

$$\text{Ke } D = \text{Ke } \chi := \{\sigma \in G \mid \chi(\sigma) = \chi(1) = \deg \chi\}.$$

$$b) \chi = \sum_{i=1}^r \chi_i \implies \text{Ke } \chi = \bigcap_{i=1}^r \text{Ke } \chi_i.$$

$$c) N \triangleleft G \iff N = \bigcap_{i=1}^r \text{Ke } \chi_i \text{ für irreduzible Charaktere } \chi_i \text{ von } G.$$

$$d) G \text{ ist einfach} \iff \text{Ke } \chi = \{1\} \vee \text{Ke } \chi = G \text{ für alle irreduziblen Charaktere } \chi \text{ von } G \text{ über } K.$$

Beweis: a) $\sigma \in \text{Ke } D \implies D(\sigma) = \text{id}_V \implies \chi(\sigma) = \text{Tr id}_V = \dim_K V = \deg \chi \implies \sigma \in \text{Ke } \chi$. Sei nun umgekehrt $\sigma \in \text{Ke } \chi$, also $\chi(\sigma) = \deg \chi =: d$. Dann folgt aus nachfolgendem Lemma (3.14) $D(\sigma) = \varepsilon \cdot \text{id}_V$ und daher $d = \chi(\sigma) = \text{Tr } D(\sigma) = d\varepsilon$, also $\varepsilon = 1$, $D(\sigma) = \text{id}_V$, $\sigma \in \text{Ke } D$.

b) Seien D_i Darstellungen mit Charakter χ_i , also ist $D = \bigoplus_{i=1}^r D_i$ eine Darstellung mit Charakter χ und es ist zu zeigen:

$$\text{Ke } D = \bigcap_{i=1}^r \text{Ke } D_i.$$

Beweis: Seien V_i die Darstellungsräume der D_i und folglich $V := \bigoplus_{i=1}^r V_i$ der Darstellungsraum von D . Dann gilt:

$$\sigma \in \text{Ke } D \iff D(\sigma) = \text{id}_V \iff \bigwedge_i D_i(\sigma) = \text{id}_{V_i} \iff \bigwedge_i \sigma \in \text{Ke } D_i \iff \sigma \in \bigcap_{i=1}^r \text{Ke } D_i.$$

c) $\Leftarrow$ ist klar, da alle $\text{Ke } \chi_i = \text{Ke } D_i$ Normalteiler in G sind. Sei umgekehrt $N \triangleleft G$, $G' = G/N$ die Faktorgruppe und $\nu : G \twoheadrightarrow G'$ der kanonische Epimorphismus. Wir liften die injektive reguläre Darstellung D^* (siehe Beispiele (1.4), 6), p. 7) von G' nach G : $\tilde{D} := D^* \circ \nu$ und erhalten $\text{Ke } \tilde{D} = \nu^{-1}(\text{Ke } D^*) = \nu^{-1}(\{e_{G'}\}) = N$. Damit ist N Kern einer linearen Darstellung von G und daher nach c) Durchschnitt der Kerne irreduzibler Charaktere von G .

Genauer: N ist Durchschnitt der Kerne der Liftungen der in der regulären Darstellung von $G' = G/N$ auftretenden Charaktere, d. h. der Liftungen aller irreduziblen Charaktere von G/N (siehe Satz (2.13), p. 23).

d) folgt unmittelbar aus c).

Wir schließen den Beweis von Satz (3.13) mit dem noch ausstehenden

(3.14) Lemma: Sei G eine endliche Gruppe, D eine Darstellung von G über einem Körper K mit $\text{char } K = 0$, χ sein Charakter. Dann gilt für $\sigma \in G$:

$$|\chi(\sigma)| = \chi(1) \implies D(\sigma) = \varepsilon \text{id}_V \text{ für ein } \varepsilon \in K$$

Beweis: Nach Lemma (3.1), p. 24, ist $D(\sigma)$ über dem algebraischen Abschluss $\tilde{K}$ von K diagonalisierbar und es folgt

$$\begin{aligned} d = \chi(1) = |\chi(\sigma)| &= \left| \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \right| \text{ mit Einheitswurzeln } \varepsilon_i \in \mathbb{Q}(\zeta_m) \subset \tilde{K} \\ \implies d &= \left| \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^d |\varepsilon_i| = d \quad (|\varepsilon_i| = 1) \\ \implies |\varepsilon_j + \varepsilon_k| &= |\varepsilon_j| + |\varepsilon_k| \text{ für alle } j \neq k, \end{aligned}$$

denn andernfalls folgte

$$d = \left| \varepsilon_j + \varepsilon_k + \sum_{i \neq j, k} \varepsilon_i \right| \leq |\varepsilon_j + \varepsilon_k| + \sum_{i \neq j, k} |\varepsilon_i| < |\varepsilon_j| + |\varepsilon_k| + \sum_{i \neq j, k} |\varepsilon_i| = d, \text{ Wid.}$$

Also sind alle $\varepsilon_j, \varepsilon_k$ $\mathbb{R}$ -linear abhängig und wegen $|\varepsilon_j| = 1 = |\varepsilon_k|$ daher $\varepsilon_j = \pm \varepsilon_k$. $\varepsilon_j = -\varepsilon_k$ ist nicht möglich, da sonst $|\varepsilon_j + \varepsilon_k| = 0 \neq 2 = |\varepsilon_j| + |\varepsilon_k|$ wäre. Also gilt für alle j, k $\varepsilon_j = \varepsilon_k =: \varepsilon$ und $D(\sigma)$ ist ähnlich zu $\varepsilon \cdot E_d$, also gleich $\varepsilon \cdot E_d$ und $\varepsilon \in K$.

Anwendungsbeispiel für Satz (3.13): Aus den Charaktertafeln kann man die Kerne der irreduziblen Darstellungen als Vereinigung von Konjugationsklassen ablesen und damit sämtliche Normalteiler einer Gruppe bestimmen:

$$\text{Ke } \chi = \{\sigma \in G \mid \chi(\sigma) = \chi(1)\} = \bigcup_{\substack{\kappa \in [G] \\ \chi(\kappa) = \chi(1)}} \kappa.$$

1) $\underline{\mathcal{S}_3}$: Stets $\text{Ke } \chi_1 = G$. $\text{Ke } \chi_2 = [1] \cup \kappa_3 = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \mathcal{A}_3$, $\text{Ke } \chi_3 = \{1\}$.

Damit sind alle Normalteiler $\{1\}$, $\mathcal{A}_3$ und $G = \mathcal{S}_3$ bekannt. Die Durchschnittsbildung liefert nichts Neues.

2) $\underline{\mathcal{S}_4}$: $\text{Ke } \chi_1 = G$, $\text{Ke } \chi_4 = \text{Ke } \chi_5 = \{1\}$. $\text{Ke } \chi_2 = \kappa_2 \cup \kappa_3 \cup \kappa_4 = \dots = \mathcal{A}_4$, $\text{Ke } \chi_3 = \kappa_1 \cup \kappa_3 = \dots = \mathcal{V}_4$.

Wieder sind damit alle Normalteiler bestimmt.

3) $\underline{\mathcal{A}_4}$: $\text{Ke } \chi_1 = G$, $\text{Ke } \chi_4 = \{1\}$, $\text{Ke } \chi_2 = \text{Ke } \chi_3 = \mathcal{V}_4$.

c. Burnside's (p, q)-Theorem

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis von

(3.15) Satz: (Burnside) *Eine endliche Gruppe, deren Ordnung höchstens zwei verschiedene Primteiler hat, ist auflösbar.*

Der Beweis erfolgt über eine Reihe von Lemmata.

(3.16) Lemma: *Sei G endlich, χ ein irreduzibler Charakter von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0. Ist $\kappa \in [G]$ eine Konjugationsklasse von G mit*

$$(*) \quad \text{ggT}(\#\kappa, \deg \chi) = 1,$$

so gilt für alle $\sigma \in \kappa$

$$\chi(\sigma) = 0 \vee |\chi(\sigma)| = \deg \chi.$$

Anmerkung: Für rational-wertige Charaktere, also $\chi(\sigma) \in \mathbb{Z}$, folgt dies bereits aus Satz (3.9), p. 27: $\deg \chi \mid \#\kappa \cdot \chi(\sigma) \xRightarrow{(*)} \deg \chi \mid \chi(\sigma) \in \mathbb{Z}$, und dem Beweis von Lemma (3.14), p. 34:

$$|\chi(\sigma)| \leq \deg \chi.$$

Beweis: Es sei $d = \deg \chi$ und $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $1 = \text{ggT}(\#\kappa, d) = s \cdot \#\kappa + t \cdot d$. Dann folgt aus den Sätzen (3.5), und (3.9),

$$\frac{\chi(\sigma)}{d} = s \cdot \underbrace{\#\kappa \frac{\chi(\sigma)}{d}}_{\text{ganz-alg.}} + t \cdot \underbrace{\chi(\sigma)}_{\text{ganz-alg.}} \text{ ist ganz-algebraisch.}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\chi(\sigma) \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ (siehe Lemma (3.1),b), p. 24) und $\mathcal{N} : \mathbb{Q}(\zeta_m) \rightarrow \mathbb{Q}$ die Normabbildung. Da $\alpha := \frac{\chi(\sigma)}{\chi(1)}$ ganz-algebraisch ist, ist auch $\mathcal{N}(\alpha)$ ganz-algebraisch, denn die Norm ist Produkt aller Konjugierten von α , und diese sind Wurzeln desselben ganzzahligen normierten Polynoms $f \in \mathbb{Z}[X]$ wie α . Da $\mathcal{N}(\alpha)$ rational und ganz-algebraisch ist, folgt $\mathcal{N}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ (siehe Prop. (3.6), p. 26).

$\chi(\sigma)$ und alle Konjugierten sind Summen von jeweils $d = \deg \chi$ vielen Einheitswurzeln, also sind α und alle Konjugierten α' betraglich ≤ 1 . Damit ist die (ganzzahlige!) Norm $\mathcal{N}(\alpha)$ betraglich gleich 0 oder 1. Also

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{N}(\alpha) &\iff \alpha = 0 \iff \chi(\sigma) = 0 \quad \text{oder} \\ 1 = |\mathcal{N}(\alpha)| &= \underbrace{|\alpha|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\alpha' \cdots|}_{\leq 1} \implies 1 = |\alpha| \iff |\chi(\sigma)| = d. \end{aligned}$$

(3.17) Lemma: *Hat die endliche Gruppe G eine Konjugationsklasse $\kappa \neq \{1\}$, deren Mächtigkeit $\#\kappa = p^\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}$) eine Primzahlpotenz ist, so gilt:*

$$G \text{ ist nicht einfach} \quad \text{oder} \quad G \text{ ist primzyklisch.}$$

Beweis: Sei κ wie vorausgesetzt und $\sigma \in \kappa$, also $\sigma \neq e_G$ und $\kappa = [\sigma]$. Sind $\chi_1, \dots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von G über $\mathbb{C}$, χ_1 der Einscharakter. Weiter sei $1 \leq h_0 \leq h$ und die Nummerierung der χ_i so, dass gilt:

$$p \nmid \deg \chi_i \iff 1 \leq i \leq h_0.$$

Dann gilt nach den 2. Orthogonalitätsrelationen Korollar (3.11), p. 29,

$$[\sigma] \neq [1] \implies 0 = \sum_{i=1}^h \chi_i(1)\chi_i(\sigma) = 1 + \sum_{i=2}^{h_0} \chi_i(1)\chi_i(\sigma) + \sum_{i=h_0+1}^h \chi_i(1)\chi_i(\sigma).$$

Für $2 \leq i \leq h_0$ gilt

$$\text{ggT}(\#\kappa, \deg \chi_i) = \text{ggT}(p^\nu, \deg \chi_i) = 1$$

und daher nach Lemma (3.16)

$$\chi_i(\sigma) = 0 \vee |\chi_i(\sigma)| = \deg \chi_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq h_0.$$

Angenommen, $\chi_i(\sigma) = 0$ für alle $2 \leq i \leq h_0$. Dann folgt

$$0 = 1 + \sum_{i=h_0+1}^h \chi_i(1)\chi_i(\sigma) = 1 + p \cdot \underbrace{\sum_{i=h_0+1}^h \frac{\chi_i(1)}{p} \cdot \chi_i(\sigma)}_{=: \beta \text{ ganz-alg.}} \implies \beta = -\frac{1}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \text{ ganz-alg.}, \text{ Wid.}$$

Also gilt für ein $2 \leq i \leq h_0$ $|\chi_i(\sigma)| = \deg \chi_i$ und folglich nach Lemma (3.14), p. 34,

$$D_i(\sigma) = \varepsilon_i \cdot \text{id}_{V_i},$$

wenn $D_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ eine Darstellung von G mit Charakter χ_i ist.

Wir zeigen nun: Ist G einfach, so ist G abelsch (und daher primzyklisch).

Ist G einfach, so ist $\text{Ke } D_i = G$ oder $\text{Ke } D_i = \{1\}$ für alle $2 \leq i \leq h_0$. Im ersten Falle ist $D_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ der triviale Homomorphismus, also $D_i = D_1$ die Einsdarstellung sein, Wid. zu $i \geq 2$.

Also ist $\text{Ke } D_i = \{1\}$, d. h. D_i injektiv für alle $2 \leq i \leq h_0$, so dass wegen $D_i(\sigma) = \varepsilon_i \text{id}_{V_i} \in \text{Zentr}(\text{GL}(V_i))$ auch $\sigma \in \text{Zentr}(G)$ gelten muss. Wegen $\sigma \neq e_G$ ist also das Zentrum $\text{Zentr}(G) \neq \{1\}$ und wegen der Einfachheit von G daher $G = \text{Zentr}(G)$ abelsch. Als einfache abelsche Gruppe $\neq \{1\}$ ist G somit primzyklisch.

Beweis von Satz (3.15): Sei $\#G = p^\nu q^\mu > 1$ mit verschiedenen Primzahlen $p \neq q$ und $\nu, \mu \in \mathbb{N}$. Ist $\nu = 0$ oder $\mu = 0$, so ist G eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung $\neq 1$ und hat daher ein nicht-triviales Zentrum¹⁾, woraus induktiv die Auflösbarkeit folgt.

Sei nun $\#G = p^\nu q^\mu$ mit $\nu, \mu \geq 1$ und P eine p -Sylowgruppe von G . Dann existiert also $1 \neq \sigma \in \text{Zentr}(P)$ und es gilt

$$P \subseteq \text{Zentr}_G(\sigma) \implies \#[\sigma] = (G : \text{Zentr}_G(\sigma)) \mid (G : P) = q^\mu.$$

Nach Lemma (3.17) ist G primzyklisch, also auflösbar, oder G ist nicht einfach. Dann existiert also ein Normalteiler $N \triangleleft G$ mit $\{1\} \neq N \neq G$. Die Ordnungen von N und G/N haben wiederum höchstens zwei Primteiler und sind kleiner als $\#G$, so dass induktiv die Auflösbarkeit von N und G/N , und damit die von G , folgt.

¹⁾Zur Erinnerung: Wir zerlegen eine p -Gruppe $G \neq \{1\}$ disjunkt in die Konjugationsklassen $\kappa = [\sigma]$. Es ist $\#[\sigma] = (G : \text{Zentr}_G(\sigma))$ Teiler von $\#G$, also eine p -Potenz. Aus $G = \dot{\bigcup}_{\substack{\kappa \in [G] \\ \#\kappa > 1}} \kappa \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{\substack{\kappa \in [G] \\ \#\kappa = 1}} \kappa = \dot{\bigcup}_{\substack{\kappa \in [G] \\ \#\kappa > 1}} \kappa \dot{\cup} \text{Zentr}(G)$ ergibt sich so $p \mid \#G = \#\text{Zentr}(G) + \underbrace{\sum_{\substack{\#\kappa > 1 \\ \equiv 0 \pmod p}} \#\kappa}_{\equiv 0 \pmod p} \implies p \mid \#\text{Zentr}(G) \implies \{1\} \neq \text{Zentr}(G) \triangleleft G$.

d. Permutationsgruppen

Eine *Permutationsdarstellung* einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $P : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ in die symmetrische Gruppe einer endlichen Menge und sie induziert eine lineare Darstellung D_P von G (siehe Beispiele (1.4), 5), p. 7) und damit auch einen (linearen) Charakter $\chi_P := \chi_{D_P}$ von G .

(3.18) Lemma: Ist $P : G \rightarrow \mathcal{S}_n$ eine Permutationsdarstellung n -ten Grades einer Gruppe G , so gilt für den Charakter χ_P der zu P gehörigen linearen Darstellung D_P über einem Körper der Charakteristik 0:

$$\chi_P(\sigma) = \#\{1 \leq i \leq n \mid P(\sigma)(i) = i\} \text{ Anzahl der Fixpunkte von } P(\sigma).$$

Beweis: Es ist (mit den Bezeichnungen aus Beispiele (1.4), 4), 5), p. 7,

$$\chi_P(\sigma) = \text{Tr } D_P(\sigma) = \text{Tr}(S(P(\sigma))) = \text{Tr } S(\pi) = \text{Tr } M(\pi) \text{ mit } \pi = P(\sigma) \in \mathcal{S}_n.$$

Es ist $M(\pi) = (\delta_{i,\pi j})$ die Permutationsmatrix zu π und folglich

$$\text{Tr } M(\pi) = \sum_i \delta_{i,\pi i} = \#\{i \mid i = \pi(i) = P(\sigma)(i)\} \cdot 1_K.$$

Dieses Resultat motiviert die nachfolgende

(3.19) Definition:

- a) Unter dem *Permutationscharakter* einer Permutationsdarstellung $P : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ versteht man die Abbildung

$$\chi_P : G \rightarrow \mathbb{N}, \quad \sigma \mapsto \#\{\alpha \in \Omega \mid P(\sigma)(\alpha) = \alpha\},$$

die jedem $\sigma \in G$ die Anzahl der Fixpunkte von $P(\sigma)$ in Ω zuordnet.

- b) Der Permutationscharakter einer Permutationsgruppe $G \subseteq \mathcal{S}(\Omega)$ ist der Permutationscharakter χ_P der Einbettung $P : G \hookrightarrow \mathcal{S}(\Omega)$.

Lemma (3.18) besagt, dass ein Permutationscharakter im Sinne dieser Definition ein (linearer) Charakter der Gruppe ist, und zwar über jedem Körper K der Charakteristik 0.

Aus dem Permutationscharakter lässt sich Information über die Permutationsgruppe entnehmen. Ein Beispiel dafür ist die sog. Transitivität von Permutationsgruppen. Wir rekapitulieren zunächst aus der Algebra einige Notationen und Fakten über Bahnen und Fixgruppen:

(3.20) Erinnerung: Sei $G \subseteq \mathcal{S}(\Omega)$ eine Permutationsgruppe auf einer endlichen Menge Ω .

- a) $\alpha \sim_G \beta \iff \forall \sigma \in G \sigma\alpha = \beta$ für $\alpha, \beta \in \Omega$.
- b) $\sim_G$ ist eine Äquivalenzrelation mit den Bahnen als Äquivalenzklassen.
- c) $\alpha \in \Omega \implies G\alpha := \{\sigma\alpha \mid \sigma \in G\}$ Bahn von α unter G .
- d) $\alpha \in \Omega \implies G_\alpha = \text{Fix}_G(\alpha) := \{\sigma \in G \mid \sigma\alpha = \alpha\}$ Fixgruppe von α in G
- e) $\sigma\alpha = \tau\alpha \iff \sigma G_\alpha = \tau G_\alpha$ und daher $\#G\alpha = (G : G_\alpha) \mid \#G$.

(3.21) Definition: Sei $G \subseteq \mathcal{S}(\Omega)$ Permutationsgruppe einer endlichen Menge Ω und $k \in \mathbb{N}_+$. G heißt *k-fach transitiv* genau dann, wenn für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega$, paarweise verschieden, und alle $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Omega$, paarweise verschieden, ein $\sigma \in G$ existiert mit $\sigma\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, \dots, k$.
 G *transitiv* $\iff G$ 1-fach transitiv.

Einige einfache Beispiele:

$\mathcal{S}_n$ ist n -fach transitiv,

$G \subset \mathcal{S}_n$ $n-1$ -fach transitiv $\implies G = \mathcal{S}_n$.

$\mathcal{A}_n$ ist $n-2$ -transitiv für $n \geq 3$.

$\text{GL}_n(K)$ ist transitiv auf $K^n \setminus \{0\}$.

(3.22) Lemma: Sei $G \subseteq \mathcal{S}(\Omega)$ eine Permutationsgruppe auf Ω .

a) Es sind äquivalent:

(i) G transitiv auf Ω .

(ii) Ω ist Bahn unter G .

(iii) $\Omega = G\alpha$ für ein/alle $\alpha \in \Omega$.

b) Ist G transitiv auf Ω , so sind alle Fixgruppen G_α in G konjugiert und es ist $(G : G_\alpha) = \#\Omega$.

c) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Ist G transitiv, so sind äquivalent:

(i) G ist k -fach transitiv auf Ω .

(ii) G_α ist $(k-1)$ -fach transitiv auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$ für ein/alle $\alpha \in \Omega$.

Beweis: a) G transitiv $\iff \bigwedge_{\alpha, \beta \in \Omega} \bigvee_{\sigma \in G} \sigma\alpha = \beta \iff \bigwedge_{\alpha \in \Omega} G\alpha = \Omega \implies G\alpha = \Omega$ für ein $\alpha \in \Omega \implies \Omega$ ist eine (und damit die einzige) Bahn $\implies \bigwedge_{\alpha \in \Omega} G\alpha = \Omega$.

b) $\alpha, \beta \in \Omega \implies \beta = \sigma\alpha$ für ein $\sigma \in G$. Dann gilt für $\tau \in G$:

$$\tau \in G_\beta \iff \sigma\alpha = \beta = \tau\beta = \tau\sigma\alpha \iff \sigma^{-1}\tau\sigma \in G_\alpha \iff \tau \in \sigma G_\alpha \sigma^{-1},$$

also folgt $G_\beta = \sigma G_\alpha \sigma^{-1}$ ist konjugiert zu G_α .

c) (i) $\implies$ (ii): Sei $\alpha \in \Omega$ beliebig. Seien $\alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Omega \setminus \{\alpha\}$ paarweise verschieden und ebenso $\beta_2, \dots, \beta_k \in \Omega \setminus \{\alpha\}$ paarweise verschieden. Dann sind die k -Tupel $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ bzw. $\alpha, \beta_2, \dots, \beta_k$ paarweise verschieden und es existiert nach Voraussetzung (i) ein $\sigma \in G$ mit

$$\sigma\alpha = \alpha \quad \text{und} \quad \sigma\alpha_i = \beta_i \quad \text{für alle } 2 \leq i \leq k,$$

also ist $\sigma \in G_\alpha$ und erfüllt die Forderung für (ii).

(ii) $\implies$ (i): Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega$ bzw. $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Omega$ paarweise verschieden und $\alpha \in \Omega$ mit der Eigenschaft (ii). Da G transitiv ist, existieren $\sigma, \tau \in G$ mit $\sigma\alpha = \alpha_1$ und $\tau\alpha = \beta_1$. Die Bilder $\alpha'_i := \sigma^{-1}\alpha_i \in \Omega \setminus \{\alpha\}$ ($i = 2, \dots, k$) sind paarweise verschieden, ebenso $\beta'_i := \tau^{-1}\beta_i \in \Omega \setminus \{\alpha\}$ ($i = 2, \dots, k$). Nach Voraussetzung (ii) existiert ein $\rho \in G_\alpha$ mit $\rho\alpha'_i = \beta'_i$, also $\rho\sigma^{-1}\alpha_i = \tau^{-1}\beta_i$ für $i = 2, \dots, k$. Wegen $\rho\alpha = \alpha$ gilt auch $\rho\sigma^{-1}\alpha_1 = \tau^{-1}\beta_1$. Insgesamt folgt daher $\tau\rho\sigma^{-1}\alpha_i = \beta_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ und G ist k -fach transitiv.

(3.23) Satz: Sei G eine Permutationsgruppe auf einer endlichen Menge Ω , $\nu : G \rightarrow \mathbb{Q}$ der Permutationscharakter von G und $\chi_1 : G \rightarrow \mathbb{Q}$, $\sigma \mapsto 1$ der Einscharakter. Dann gilt:

a) Ist t die Anzahl der Bahnen von G auf Ω , so gilt

$$t \cdot \#G = \sum_{\sigma \in G} \nu(\sigma), \quad \text{d. h.} \quad t = (\nu, \chi_1)_G$$

Also ist $\nu = t \cdot \chi_1 + \varphi$ mit einem Charakter $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Q}$, dessen Zerlegung in irreduzible Charaktere den Einscharakter χ_1 nicht enthält.

b) G transitiv $\iff (\nu, \chi_1)_G = 1 \iff \nu - \chi_1$ ist ein Charakter, der χ_1 nicht enthält.

c) Ist G transitiv und s die Anzahl der Bahnen von G_α auf Ω (einschließlich der Bahn $\{\alpha\}$), so gilt

$$\sum_{\sigma \in G} \nu(\sigma)^2 = s \cdot \#G, \text{ also } (\nu, \nu)_G = s.$$

d) Ist G transitiv, so gilt:

G 2-fach transitiv $\iff \nu = \chi_1 + \chi$ mit $\chi \neq \chi_1$ absolut irreduzibler Charakter $\chi : G \rightarrow \mathbb{Q}$.

Beweis: a) Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^t \Omega_i$ die Zerlegung von Ω in Bahnen unter G . Also gilt $\sigma\Omega_i = \Omega_i$ für alle $\sigma \in G$. Setzt man $\nu_i(\sigma) := \#\{\alpha \in \Omega_i \mid \sigma\alpha = \alpha\}$, so gilt $\nu = \sum_{i=1}^t \nu_i$ und für alle i

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G} \nu_i(\sigma) &= \sum_{\sigma \in G} \#\{\alpha \in \Omega_i \mid \sigma\alpha = \alpha\} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \sum_{\substack{\alpha \in \Omega_i \\ \sigma\alpha = \alpha}} 1 = \sum_{\alpha \in \Omega_i} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma\alpha = \alpha}} 1 \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega_i} \#\{\sigma \in G \mid \sigma\alpha = \alpha\} \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega_i} \#G_\alpha \end{aligned}$$

Ω_i ist eine Bahn unter G , also $\Omega_i = G\alpha$ für $\alpha \in \Omega_i$ und daher $\#\Omega_i = \#G_\alpha = (G : G_\alpha) = \frac{\#G}{\#G_\alpha}$ bzw. $\#G_\alpha = \frac{\#G}{\#\Omega_i}$. Folglich

$$\sum_{\sigma \in G} \nu_i(\sigma) = \sum_{\alpha \in \Omega_i} \frac{\#G}{\#\Omega_i} = \#G.$$

Wegen $\nu = \sum_{i=1}^t \nu_i$ ist die erste Formel in a) bewiesen. Der Zusatz folgt aus Satz (2.9), p. 18.

b) ist der Spezialfall $t = 1$ von a).

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G} \nu(\sigma)^2 &= \sum_{\sigma \in G} \nu(\sigma) \cdot \#\{\alpha \in \Omega \mid \sigma\alpha = \alpha\} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \sum_{\substack{\alpha \in \Omega \\ \sigma\alpha = \alpha}} \nu(\sigma) = \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\sigma \in G_\alpha} \nu(\sigma) \stackrel{a)}{=} \sum_{\alpha \in \Omega} s_\alpha \cdot \#G_\alpha, \end{aligned}$$

wenn s_α die Anzahl der Bahnen von G_α auf Ω ist.

Wegen der Transitivität von G sind die Fixgruppen G_α, G_β in G konjugiert (siehe Lemma (3.22)) und haben daher stets gleich viele Bahnen: $s_\alpha = s_\beta = s$. Also

$$\sum_{\sigma \in G} \nu(\sigma)^2 = \sum_{\alpha \in \Omega} s \cdot \#G_\alpha \stackrel{(3.22), b)}{=} \sum_{\alpha \in \Omega} s \cdot \frac{\#G}{\#\Omega} = s \cdot \#G.$$

Schließlich gilt wegen $\nu(\sigma) = \nu(\sigma^{-1})$ $(\nu, \nu)_G = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma} \nu^2(\sigma) = s$.

d) Wegen der Transitivität gilt nach b) $\nu = \chi_1 + \varphi$ mit einem $\mathbb{Q}$ -Charakter φ , der χ_1 nicht enthält, und daher $(\nu, \nu)_G = 1 + (\varphi, \varphi)_G$. Zerlegt man φ über dem algebraischen Abschluss $\tilde{\mathbb{Q}}$ in irreduzible $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Charaktere: $\varphi = \sum_{i=2}^h n_i \chi_i$ mit $n_i \in \mathbb{N}$, $\chi_i \neq \chi_1$, so gilt wegen der Orthonormalität der irreduziblen $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Charaktere (siehe Hauptsatz (2.5), d)) $(\nu, \nu)_G = 1 + \sum_{i=2}^h n_i^2$ und es folgt:

G 2-fach transitiv $\iff G_\alpha$ transitiv auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$ $\iff G_\alpha$ hat 2 Bahnen auf Ω

$$\stackrel{c)}{\iff} 2 = (\nu, \nu)_G = 1 + \sum_{i=2}^h n_i^2 \iff n_i \in \{0, 1\} \wedge n_j = 1 \text{ für genau ein } j \geq 2$$

$$\iff \nu = \chi_1 + \chi \text{ mit } \chi \neq \chi_1 \wedge \chi \text{ irreduzibel über } \tilde{\mathbb{Q}}.$$

Einfache Beispiele zur Veranschaulichung:

a) Kleinsche Vierergruppe $\mathcal{V}_4 = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), \dots\}$,

b) Alternierende Gruppe $\mathcal{A}_4 = \mathcal{V}_4 \cup \{(1\ 2\ 3), \dots\}$.

a) $\sum_{\sigma \in \mathcal{V}_4} \nu(\sigma) = 4 + 3 \cdot 0 = \#\mathcal{V}_4$, $\mathcal{V}_4$ transitiv.

$\sum_{\sigma \in \mathcal{V}_4} \nu(\sigma)^2 = 16 + 3 \cdot 0 \neq 2 \cdot \#\mathcal{V}_4$, $\mathcal{V}_4$ nicht 2-fach transitiv.

b) $\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_4} \nu(\sigma) = 4 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 12 = \#\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_4$ transitiv.

$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_4} \nu(\sigma)^2 = 16 + 8 \cdot 1 = 24 = 2 \cdot \#\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_4$ 2-fach transitiv.

Als ein Beispiel für die Bedeutung dieses darstellungstheoretischen Resultates beweisen wir die folgende Strukturaussage

(3.24) Satz: Sei $G \subset \mathcal{S}_p$ eine transitive Permutationsgruppe von Primzahlgrad p . Dann gilt: Ist G nicht 2-fach transitiv, so ist G auflösbar.

Beweis: Sei $\nu : G \rightarrow \mathbb{N}$ der Permutationscharakter von G . Da G transitiv ist, gilt nach Satz (3.23) für den algebraischen Abschluss $\tilde{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$

$$\nu = \chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i, \quad \psi_i \neq \chi_1 \text{ irreduzible } \tilde{\mathbb{Q}}\text{-Charaktere.}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die ψ_i paarweise *verschieden* sind. Dazu zeigen wir, dass schon die Restriktionen der ψ_i auf eine p -Sylowgruppe verschieden sein müssen.

Sei also P eine p -Sylowgruppe von G . Wegen $\#G \mid \#\mathcal{S}_p = p!$ folgt $p^2 \nmid \#G$, also $\#P \mid p$. $\#P = 1$ ist nicht möglich, denn wegen der Transitivität von G auf $\Omega = \{1, \dots, p\}$ ist $p = \#\Omega = \#G\alpha$ ein Teiler von $\#G$ (siehe (3.20), e), p. 37). Es gilt also $n = \#G = p \cdot m$ mit $p \nmid m$.

Da P primzyklisch ist, hat jedes $e_P \neq \sigma \in P$ die Ordnung p . Da die Ordnung einer Permutation das kgV der Zyklenlängen in einer Zyklendarstellung ist, muss jede Permutation der Ordnung p ein Produkt von p -Zyklen sein, in $\mathcal{S}_p$ also ein einzelner p -Zyklus: P besteht also (neben der Identität) aus lauter p -Zyklen (ohne Fixpunkte) und daher gilt für $\sigma \in P$

$$\nu(\sigma) = \begin{cases} \#P & \sigma = e_P, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ist $\nu|_P : P \rightarrow \mathbb{N}$ der *reguläre* Charakter von P und folglich nach Satz (2.13), p. 23,

$$\nu|_P = \sum_{\chi} \deg \chi \cdot \chi, \quad \chi \text{ durchläuft alle irreduziblen Charaktere von } P \text{ über } \mathbb{C}.$$

Da P abelsch ist, sind alle irreduziblen Darstellungen von P eindimensional, also Homomorphismen $\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}^\times$, und $\nu|_P$ ist die Summe aller dieser Homomorphismen:

$$\nu|_P = \sum_{\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}^\times} \varphi.$$

Da $P = \langle \tau \rangle$ zyklisch von der Ordnung p ist, muss $\varphi(\tau)$ eine p -te Einheitswurzel sein, und umgekehrt bestimmt jede p -te Einheitswurzel eindeutig einen Homomorphismus $\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Wählt man etwa $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{p})$, so sind alle Charaktere von P gegeben durch die Homomorphismen

$$\varphi_j : P \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \varphi_j(\tau) = \zeta^j \quad (0 \leq j < p)$$

und folglich $\nu|_P = \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_j$. Andererseits gilt $\nu|_P = \chi_1|_P + \sum_{i=1}^s \psi_i|_P$. Zerlegt man die $\psi_i|_P$ in die irreduziblen Charaktere φ_j von P :

$$\psi_i|_P = \sum_{j=0}^{p-1} n_{ij} \varphi_j \quad \text{mit eindeutigen } n_{ij} \in \mathbb{N},$$

so ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{p-1} \varphi_j = \nu|_P = \chi_1|_P + \sum_{i=1}^s \psi_i|_P = \varphi_0 + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^s n_{ij} \varphi_j \iff \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^s n_{ij} \varphi_j$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$0 = \sum_{i=1}^s n_{i0} \quad \text{und} \quad 1 = \sum_{i=1}^s n_{ij} \quad (j = 1, \dots, p-1)$$

und daher für alle $1 \leq i \leq s$

$$(1) \quad n_{i0} = 0, \quad (2) \quad n_{ij} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq j < p), \quad (3) \quad \bigwedge_{1 \leq j < p} \bigvee_{1 \leq i \leq s} n_{ij} \neq 0.$$

Setzen wir $\Lambda_i := \{0 \leq j < p \mid n_{ij} \neq 0\}$, so gilt

$$\Lambda_i \stackrel{(1)}{=} \{1 \leq j < p \mid n_{ij} \neq 0\} \stackrel{(2)}{=} \{1 \leq j < p \mid n_{ij} = 1\}$$

und daher

$$\psi_i|_P = \sum_{j=0}^{p-1} n_{ij} \varphi_j = \sum_{j \in \Lambda_i} \varphi_j.$$

Schließlich bedeutet (3), dass die Λ_i ($1 \leq i \leq s$) eine disjunkte (!) Zerlegung von $\{1, \dots, p-1\}$ bilden:

$$\{1, \dots, p-1\} = \bigcup_{1 \leq i \leq s} \Lambda_i.$$

Sind also $1 \leq i, k \leq s$ mit $\psi_i = \psi_k$ und daher $\psi_i|_P = \psi_k|_P$, so folgt wegen der eindeutigen Zerlegung in die φ_j , dass Λ_i und Λ_k nicht disjunkt sind, also $i = k$ sein muss:

Die irreduziblen Charaktere ψ_i ($1 \leq i \leq s$) von G sind also sämtlich verschieden und wir erhalten wie behauptet für den Permutationscharakter von G

$$\nu = \chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i, \quad \psi_i \neq \chi_1 \text{ verschiedene irreduzible Charaktere.}$$

Im nächsten Beweisschritt nutzen wir die Operation einer Galoisgruppe auf den irreduziblen Charakteren ψ_i ($1 \leq i \leq s$): Sei $n = \#G$, $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitswurzel, $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ der erzeugte Kreiskörper und $\Gamma_n := G(\mathbb{Q}_n|\mathbb{Q})$ dessen Galoisgruppe.

Jeder Charakter ϕ von G über einem Körper der Charakteristik 0 hat seine Werte in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ (siehe Lemma (3.1), c), p. 24). Ist nun $\gamma \in \Gamma_n$, also $\gamma : \mathbb{Q}(\zeta_n) \simeq \mathbb{Q}(\zeta_n)$ ein Automorphismus von $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, so ist $\phi^\gamma := \gamma \circ \phi : G \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n)$ wieder ein Charakter von G :

Beweis: Sei $M : G \rightarrow \text{GL}_n(\tilde{\mathbb{Q}})$ eine Matrixdarstellung von G mit Charakter $\text{Tr } D = \phi$. Man setzt nun den Körperautomorphismus γ von $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ zu einem Automorphismus der algebraisch abgeschlossenen Hülle $\tilde{\mathbb{Q}}$ fort (Fortsetzungssatz der Algebra, algebraisch abgeschlossene Hülle ist bis auf Isomorphie eindeutig) und erhält daraus (kanonisch) einen Automorphismus von $\text{GL}_n(\tilde{\mathbb{Q}})$. Dann ist für jedes γ $\gamma \circ D : G \rightarrow \text{GL}_n(\tilde{\mathbb{Q}})$ wieder eine $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Darstellung von G und ihr Charakter ist $\text{Tr}(\gamma \circ D) = \gamma \circ \text{Tr } D = \gamma \circ \phi$.

Man erhält dadurch eine Gruppenoperation von $\Gamma_n = G(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q})$ auf den Charakteren ϕ von G vermöge $\phi \mapsto \phi^\gamma := \gamma \circ \phi$. Wir wenden dies auf den Permutationscharakter ν an. Da dieser ganzzahlige Werte hat, gilt $\nu^\gamma = \nu$ für alle $\gamma \in \Gamma_n$ und damit:

$$\chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i = \nu = \nu^\gamma = \chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i^\gamma.$$

Mit den ψ_i sind auch die ψ_i^γ irreduzible Charaktere, wegen der eindeutigen Zerlegung von ν werden also die ψ_i ($i = 1, \dots, s$) durch die $\gamma \in \Gamma_n$ permutiert.

Beh. 1: Bereits die Untergruppe $\Gamma = G(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}(\zeta_m))$ operiert transitiv, d. h. zu $i, j \in \{1, \dots, s\}$ existiert ein $\gamma \in G(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}(\zeta_m))$ mit $\psi_j = \psi_i^\gamma$.

Beweis: Aus dem Studium der Einheitswurzelkörper in der Algebra ist bekannt:

$$p \nmid m \implies \Gamma := G(\mathbb{Q}(\zeta_{pm})|\mathbb{Q}(\zeta_m)) \simeq G(\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}) \simeq \text{Aut}(\langle \zeta_p \rangle),$$

wobei die Isomorphismen durch die Restriktionsabbildungen gegeben sind.

Zu beliebigen i, j , $1 \leq i, j \leq s$ wählen wir $\nu_i \in \Lambda_i$ und $\nu_j \in \Lambda_j$, ebenfalls beliebig. Dann sind $\zeta_p^{\nu_i}, \zeta_p^{\nu_j}$ primitive p -te Einheitswurzeln und es existiert genau ein $\gamma \in \Gamma \simeq \text{Aut}(\langle \zeta_p \rangle)$ mit $\gamma(\zeta_p^{\nu_i}) = \zeta_p^{\nu_j}$ und folglich $\varphi_{\nu_i}^\gamma = \varphi_{\nu_j}$. Dann gilt für $\psi_k := \psi_i^\gamma$, $1 \leq k \leq s$

$$\sum_{\nu \in \Lambda_k} \varphi_\nu = \psi_k|_P = \psi_i^\gamma|_P = (\psi_i|_P)^\gamma = \sum_{\nu \in \Lambda_i} \varphi_\nu^\gamma.$$

Wegen $\varphi_{\nu_i}^\gamma = \varphi_{\nu_j}$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung von $\psi_k|_P$ in die Charaktere φ_ν muss ν_j auch in Λ_k liegen, Λ_k und Λ_j sind also nicht disjunkt. Dies bedeutet $k = j$ und damit $\psi_i^\gamma = \psi_k = \psi_j$. $\square$

Beh. 2: Für $\sigma \in G$ mit $p \nmid \text{ord } \sigma$ ist $\psi_i(\sigma)$ unabhängig von i .

Setze daher $\psi(\sigma) := \psi_i(\sigma)$ für $p \nmid \text{ord } \sigma$, $1 \leq i \leq s$.

Beweis: Seien $1 \leq i, j \leq s$ und $\gamma \in \Gamma$ mit $\psi_j = \psi_i^\gamma$ (gemäß Beh. 1). Wegen $p \nmid \text{ord } \sigma$, also $\text{ord } \sigma \mid m$ gilt $\psi_i(\sigma) \in \mathbb{Q}(\zeta_m) = \text{Fix}(\Gamma)$ und daher $\psi_j(\sigma) = \gamma(\psi_i(\sigma)) = \psi_i(\sigma)$. $\square$

Aus der Zerlegung $\nu = \chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i$ erhält man

$$p \nmid \text{ord } \sigma \implies \nu(\sigma) = 1 + s \cdot \psi(\sigma).$$

Mit $\sigma = e_G$ ergibt dies $p = \nu(e_G) = 1 + s \cdot \psi(e_G)$ und daher $s \neq 0$. Folglich gilt

$$p \nmid \text{ord } \sigma \implies \psi(\sigma) = \frac{\nu(\sigma) - 1}{s} \in \mathbb{Q}.$$

Als Charakterwert ist $\psi(\sigma)$ nach Korollar (3.5), p. 26, ganz-algebraisch und nach Prop. (3.6), p. 26, dann ganzzahlig: $\psi(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Also gilt $s \mid \nu(\sigma) - 1$ für alle σ mit $p \nmid \text{ord } \sigma$. Insbesondere ist also $t = \psi(e_G) = \frac{p-1}{s} \in \mathbb{N}$ und

$$p \nmid \text{ord } \sigma \implies -1 \leq -\frac{1}{s} \leq \psi(\sigma) = \frac{\nu(\sigma) - 1}{s} \leq \frac{p-1}{s} = t.$$

Sei nun G nicht 2-fach transitiv, also nach Satz (3.23),b), p. 38,

$$2 \neq (\nu, \nu) = (\chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i, \chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i)$$

Als verschiedene irreduzible Charaktere über $\tilde{\mathbb{Q}}$ bilden $\chi_1, \psi_1, \dots, \psi_s$ ein Orthonormalsystem und es folgt

$$2 \neq (\nu, \nu) = (\chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i, \chi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i) = s + 1 \implies s \geq 2.$$

Wir erhalten so

$$p \nmid \text{ord } \sigma \implies -1 < -\frac{1}{s} \leq \psi(\sigma) \implies 0 \leq \psi(\sigma) \leq t.$$

Aufgrund der Orthogonalität von $\chi_1, \psi_1, \dots, \psi_s$ haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G} \psi_i(\sigma) &= \#G \cdot (\psi_i, \chi_1) = 0, \\ \sum_{\sigma \in G} \psi_i(\sigma) \overline{\psi_j(\sigma)} &= \#G \cdot (\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Wir spalten die Summation über $\sigma \in G$ auf, je nachdem ob p ein Teiler von $\text{ord } \sigma$ ist oder nicht. Da verschiedene Untergruppen der Ordnung p nur das Einselement gemein haben, gilt

$$\sum_{p \mid \text{ord } \sigma} \psi_i(\sigma) = \sum_{\substack{H \leq G \\ \#H=p}} \sum_{e_G \neq \sigma \in H} \psi_i(\sigma).$$

Wegen $p^2 \nmid \#G$ sind die Untergruppen $H \leq G$ mit $\#H = p$ gerade die p -Sylowgruppen von G und daher alle konjugiert zu P . Da Charakterwerte nur von der Konjugationsklasse abhängen, gilt

$$\#H = p \implies \sum_{e_G \neq \sigma \in H} \psi_i(\sigma) = \sum_{e_G \neq \sigma \in P} \psi_i(\sigma)$$

und daher

$$\sum_{p \mid \text{ord } \sigma} \psi_i(\sigma) = m \cdot \sum_{e_G \neq \sigma \in P} \psi_i(\sigma),$$

wobei m die Anzahl der p -Sylowgruppen von G ist.

Genauso argumentiert man für $\sum \psi_i(\sigma) \bar{\psi}_j(\sigma)$.

Mit Beh. 2 ergibt dies

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\sigma \in G} \psi_i(\sigma) = m \sum_{e_G \neq \sigma \in P} \psi_i(\sigma) + \sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} \psi(\sigma), \\ 0 &= \sum_{\sigma \in G} \psi_i(\sigma) \bar{\psi}_j(\sigma) = m \sum_{e_G \neq \sigma \in P} \psi_i(\sigma) \bar{\psi}_j(\sigma) + \sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} \psi(\sigma)^2 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Durch Addition von $mt = m\psi_i(1)$ bzw. $mt^2 = m\psi_i(1)\bar{\psi}_j(1)$ erhält man

$$\begin{aligned} mt &= m \sum_{\sigma \in P} \psi_i(\sigma) + \sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} \psi(\sigma), \\ mt^2 &= m \sum_{\sigma \in P} \psi_i(\sigma) \bar{\psi}_j(\sigma) + \sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} \psi(\sigma)^2 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in P} \psi_i(\sigma) &= \#P \cdot (\psi_i|_P, \varphi_0) = \#P \cdot \left(\sum_{\nu \in \Lambda_i} \varphi_\nu, \varphi_0 \right) = 0 \quad (\text{wegen } 0 \notin \Lambda_i), \\ \sum_{\sigma \in P} \psi_i(\sigma) \bar{\psi}_j(\sigma) &= \#P \cdot (\psi_i|_P, \psi_j|_P) = \#P \left(\sum_{\nu \in \Lambda_i} \varphi_\nu, \sum_{\nu \in \Lambda_j} \varphi_\nu \right) = 0, \quad (\text{wegen } \Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset). \end{aligned}$$

Also erhalten wir schließlich

$$\sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} \psi(\sigma) = mt, \quad \sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} \psi(\sigma)^2 = mt^2 \implies \sum_{p \nmid \text{ord } \sigma} (t - \psi(\sigma)) \psi(\sigma) = 0.$$

Wegen $0 \leq \psi(\sigma) \leq t$ für $p \nmid \text{ord } \sigma$, sind in der letztgenannten Summe alle Summanden ganze Zahlen ≥ 0 , so dass *jeder* Summand gleich 0 sein muss:

$$p \nmid \text{ord } \sigma \implies \psi(\sigma) = 0 \text{ oder } \psi(\sigma) = t.$$

Dies bedeutet für den Permutationscharakter ν

$$p \nmid \text{ord } \sigma \implies \nu(\sigma) = 1 + s \cdot \psi(\sigma) = 1 \vee \nu(\sigma) = 1 + st = 1 + s \cdot \psi(e_G) = \nu(e_G) = p.$$

Da für $p \mid \text{ord } \sigma$ stets σ ein p -Zyklus und daher $\nu(\sigma) = 0$ ist, erhält man

$$\bigwedge_{\sigma \in G} \nu(\sigma) = 0 \vee \nu(\sigma) = 1 \vee \nu(\sigma) = p,$$

oder anders formuliert

$$\bigwedge_{\sigma \in G} \nu(\sigma) \geq 2 \implies \nu(\sigma) = p \iff \sigma = e_G.$$

G ist also eine Permutationsgruppe vom Primzahlgrad p , in der nur die Identität 2 Fixpunkte hat, eine sog. *Frobeniusgruppe*. Daraus folgt nun die Auflösbarkeit von G nach dem

(3.25) Satz von Galois: Für eine transitive Permutationsgruppe $G \subseteq S_p$ von Primzahlgrad p sind äquivalent:

- (i) G hat genau eine p -Sylowgruppe.
- (ii) G ist auflösbar.
- (iii) G operiert auf $\Omega = \{0, \dots, p-1\} \simeq \mathbb{F}_p$ wie eine Untergruppe von

$$\text{Aff}(1, p) := \{ \sigma : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p \text{ Abb.} \mid \bigvee_{a \in \mathbb{F}_p^\times} \bigvee_{b \in \mathbb{F}_p} \bigwedge_{x \in \mathbb{F}_p} \sigma(x) = ax + b \},$$

der sog. Gruppe der affinen Abbildungen von $\mathbb{F}_p$.

- (iv) Lässt eine Permutation $\sigma \in G$ zwei Elemente fest, so ist σ die Identität, d. h. G ist eine Frobeniusgruppe.

Von diesem Satz, der nichts mit Darstellungstheorie zu tun hat, werden nur die für den Beweis von Satz (3.24) notwendigen Implikationen (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) gezeigt.

Beweis: (iv) $\Rightarrow$ (i): Für $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$ sei $G_{\alpha\beta} := \text{Fix}_G(\{\alpha, \beta\})$. Dann gilt nach (iv) $G_{\alpha\beta} = \{\text{id}\}$ und daher wegen der Transitivität von G

$$\#G = (G : G_\alpha)(G_\alpha : G_{\alpha\beta}) = (\underbrace{\#G_\alpha}_{=\Omega}) \cdot (\underbrace{\#G_{\alpha\beta}}_{\subseteq \Omega \setminus \{\alpha\}}) \leq p \cdot (p-1).$$

Annahme, (i) ist falsch, also gibt es zwei p -Sylowgruppen $P \neq Q$ in G . Da $\#P = \#Q = p$ eine Primzahl ist, ist $P \cap Q = \{1\}$ und daher für $\sigma_1, \sigma_2 \in P$, $\tau_1, \tau_2 \in Q$

$$\sigma_1 \tau_1 = \sigma_2 \tau_2 \iff \sigma_2^{-1} \sigma_1 = \tau_2 \tau_1^{-1} \in P \cap Q = \{1\} \implies \sigma_1 = \sigma_2, \tau_1 = \tau_2.$$

Dies bedeutet

$$\#(P \cdot Q) = \#P \cdot \#Q = p^2 > \#G, \text{ Wid.}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Als einzige p -Sylowgruppe ist P Normalteiler in G . Also operiert G durch Konjugation auf P :

$$\sigma \in G \implies c_\sigma = (\dots)^\sigma : P \rightarrow P, \tau \mapsto \tau^\sigma = \sigma^{-1} \tau \sigma.$$

Die Operation $c : G \rightarrow \text{Aut}(P)$ induziert einen Monomorphismus

$$\bar{c} : G/\text{Ker } c \hookrightarrow \text{Aut}(P) = \text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{F}_p^\times.$$

Da P abelsch ist, gilt $P \subset \text{Ker } c$. Wir zeigen die umgekehrte Inklusion. Sei also $\sigma \in \text{Ker } c$, d. h. $\sigma\tau = \tau\sigma$ für alle $\tau \in P$. Für $\tau \neq e_P$, also $P = \langle \tau \rangle$, ist $\tau = (0, \tau(0), \dots, \tau^{p-1}(0))$ ein p -Zyklus und daher $\Omega = \{\tau^j(0) \mid 0 \leq j < p\}$. Sei nun $0 \leq i < p$ mit $\sigma(0) = \tau^i(0)$. Dann gilt für alle $0 \leq j < p$

$$\sigma(\tau^j(0)) = \tau^j(\sigma(0)) = \tau^j(\tau^i(0)) = \tau^i(\tau^j(0))$$

und damit $\sigma = \tau^i \in P$.

Damit haben wir eine Normalreihe $\{1\} \triangleleft P = \text{Ker } c \triangleleft G$ von G mit den zyklischen Faktoren P (Ordnung p) und $G/P = G/\text{Ker } c \leq \mathbb{F}_p^\times$ (Ordnung ein Teiler von $p-1$): G ist also auflösbar. $\square$

§4 Induzierte Darstellungen.

Im Laufe der bisherigen Überlegungen sind folgende Prozesse aufgetaucht, aus Darstellungen einer Gruppe G Darstellungen einer anderen Gruppe H zu gewinnen:

- (R) Restriktion: $H \leq G$, $D : G \rightarrow \text{GL}(V)$ Darstellung von G
 $\implies D|_H : H \rightarrow \text{GL}(V)$ Darstellung von H .
- (L) Liften: $\nu : G \twoheadrightarrow H$ Epimorphismus, $D : H \rightarrow \text{GL}(V)$ Darstellung von H
 $\implies D \circ \nu : G \rightarrow \text{GL}(V)$ Darstellung von G .

Wir wollen nun als dritten Prozess definieren

- (I) Induzierung: $H \leq G$, $D : H \rightarrow \text{GL}(V)$ Darstellung von G .

Dann definiert man eine Darstellung $D^G : G \rightarrow \text{GL}(W)$ von G mit einem neuen Darstellungsraum W der Dimension $\dim W = (G : H) \cdot \dim V$.

a. Frobeniussches Reziprozitätsgesetz

(4.1) Proposition: Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und $d : H \rightarrow \text{GL}_n(K)$ eine (Matrix-)Darstellung von H über einem Körper K . Es sei $d_0 : G \rightarrow M_n(K)$ die Nullfortsetzung von d auf G , d. h.

$$d_0(\sigma) = \begin{cases} 0 \in M_n(K) & \sigma \notin H, \\ d(\sigma) & \sigma \in H. \end{cases}$$

- a) Ist $r = (G : H)$ der Index von H in G und $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ ein Repräsentantensystem von G modulo H : $G = \bigcup_{1 \leq i \leq r} \sigma_i H$, so definiert man

$$D : G \rightarrow M_r(M_n(K)) \simeq M_{rn}(K) \quad \text{durch} \quad D(\sigma) = \left(d_0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j) \right)_{i,j=1,\dots,r}.$$

Dann gilt:

$D : G \rightarrow \text{GL}_{rn}(K)$ ist eine (Matrix-)Darstellung von G vom Grade $rn = (G : H) \cdot \deg d$.

- b) Verschiedene Repräsentantensysteme von G modulo H führen in a) zu äquivalenten Darstellungen von G .

(4.2) Definition: Die gemäß Prop. (4.1) durch $d : H \rightarrow \text{GL}_n(K)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Darstellung $D : G \rightarrow \text{GL}_{rn}(K)$ von G heißt *von d auf G induzierte Darstellung* und wird mit $D = d^G$ bezeichnet.

Anmerkungen zur Definition von D in Prop. (4.1):

Es ist

$$D(\sigma) = \begin{bmatrix} \overline{d_0(\sigma_1^{-1} \sigma \sigma_1)} & \cdots & \overline{d_0(\sigma_1^{-1} \sigma \sigma_r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{d_0(\sigma_r^{-1} \sigma \sigma_1)} & \cdots & \overline{d_0(\sigma_r^{-1} \sigma \sigma_r)} \end{bmatrix} \in M_r(M_n(K))$$

In jeder der r Spalten tritt genau einmal eine Matrix $\neq 0 \in M_n(K)$ auf, denn:

$$d_0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j) \neq 0 \iff \sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j \in H \iff \sigma \sigma_j H = \sigma_i H,$$

und da die $\sigma_i H$ eine Klasseneinteilung von G bilden, existiert zu jedem $\sigma \in G$ und jedem $j \in \{1, \dots, r\}$ genau ein $i =: \rho_\sigma(j)$ mit $\sigma\sigma_j H = \sigma_i H$. Es gilt also für alle i, j, σ

$$i = \rho_\sigma(j) \iff \sigma\sigma_j H = \sigma_i H \iff \sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j \in H \iff d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) \neq 0.$$

Dadurch sind für jedes $\sigma \in G$ Permutationen $\rho_\sigma \in \mathcal{S}_r$ definiert, denn

$$\rho_\sigma(j) = \rho_\sigma(k) \iff \sigma\sigma_j H = \sigma\sigma_k H \iff \sigma_j H = \sigma_k H \iff j = k.$$

Die dadurch definierte Abbildung $\rho : G \rightarrow \mathcal{S}_r$, $\sigma \mapsto \rho_\sigma$ ist eine Permutationsdarstellung von G vom Grade $r = (G : H)$; sie ist gegeben durch die Operation der Gruppe G auf den Linksenbenklassen $\sigma_j H$ von H vermöge Linksmultiplikation, denn es gilt ja (s. o.)

$$\sigma.\sigma_j H = \sigma_i H \iff \rho_\sigma(j) = i.$$

Man kann dann die induzierte Darstellung D wie folgt beschreiben:

- Es gilt

$$d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) = \begin{cases} d(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) & \text{für } i = \rho_\sigma(j) \\ 0 & \text{für } i \neq \rho_\sigma(j) \end{cases}$$

- In der j -ten Spalte von $D(\sigma) \in M_r(M_n(K))$, $1 \leq j \leq r$, steht überall die Nullmatrix $0 \in M_n(K)$, außer in der Zeile $i = \rho_\sigma(j)$ steht die Matrix $d(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) \in \text{GL}_n(K)$.
- Die Matrix $D(\sigma)$ entsteht aus der Permutationsmatrix $(\delta_{i, \rho_\sigma(j)})_{i,j=1, \dots, r} \in \text{GL}_r(\mathbb{Z})$ von $\rho_\sigma \in \mathcal{S}_r$, indem man jede 0 als Nullmatrix $0 \in M_n(K)$ interpretiert und jede 1 in einem Feld i, j durch den Eintrag $d(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) \in \text{GL}_n(K)$ ersetzt.

Beweis von Prop. (4.1):

a) Offensichtlich ist D eine Abbildung von G in $M_{rn}(K) = M_r(M_n(K))$. Wegen $\rho_{e_G} = \text{id} \in \mathcal{S}_r$ ist

$$D(e_G) = (d_0(\sigma_i^{-1}\sigma_j)_{ij}) = (\delta_{ij}E_n)_{ij} = E_{rn} \in M_{rn}(K)$$

und es genügt daher die Multiplikativität von D zu beweisen, denn dann folgt $D(\sigma)D(\sigma^{-1}) = D(e_G) = E_{rn}$ und damit die Invertierbarkeit der $D(\sigma)$ in $M_{rn}(K)$, also $D : G \rightarrow \text{GL}_{rn}(K)$.

Seien nun $\sigma, \tau \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D(\sigma)D(\tau) &= \left(d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) \right)_{ij} \cdot \left(d_0(\sigma_j^{-1}\tau\sigma_k) \right)_{jk} \\ &= \left(\sum_{j=1}^r d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_j) d_0(\sigma_j^{-1}\tau\sigma_k) \right)_{ik} \\ &= \left(\underbrace{d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_{j'}) d_0(\sigma_{j'}^{-1}\tau\sigma_k)}_{=: A_{ik}} \right)_{ik} \quad (j' = \rho_\tau(k)) \end{aligned}$$

Seien i, k gegeben und $j' = \rho_\tau(k)$ wie oben. Dann gilt $\rho_\sigma(j') = \rho_\sigma(\rho_\tau(k)) = \rho_{\sigma\tau}(k)$ und daher

$$\begin{aligned} A_{ik} &= d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_{j'}) d_0(\sigma_{j'}^{-1}\tau\sigma_k) \\ &= \begin{cases} d(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_{j'}) d(\sigma_{j'}^{-1}\tau\sigma_k) = d(\sigma_i^{-1}\sigma\tau\sigma_k) & \text{für } i = \rho_\sigma(j') = \rho_{\sigma\tau}(k), \\ 0 \cdot d(\sigma_{j'}^{-1}\tau\sigma_k) = 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= d_0(\sigma_i^{-1}\sigma\tau\sigma_k) \end{aligned}$$

Also gilt $D(\sigma)D(\tau) = D(\sigma\tau)$.

b) Sei $\tau_1, \dots, \tau_r$ ein anderes Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von H , also $G = \dot{\bigcup}_i \sigma_i H = \dot{\bigcup}_i \tau_i H$. Dann gibt es eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_r$ mit $\tau_i H = \sigma_{\pi i} H$ und damit Elemente $h_i \in H$ mit $\tau_i = \sigma_{\pi i} h_i$. Es sei $\tilde{D}$ die ausgehend von den τ_i definierte Darstellung gemäß (4.1),a):

$$\tilde{D}(\sigma) = \left(d_0(\tau_i^{-1} \sigma \tau_j) \right)_{ij},$$

und $\tilde{\rho}$ die entsprechende Permutationsdarstellung von G , also

$$i = \tilde{\rho}_\sigma(j) \iff \sigma \tau_j H = \tau_i H \iff \sigma \sigma_{\pi j} H = \sigma_{\pi i} H \iff \rho_\sigma(\pi j) = \pi i \iff i = \pi^{-1} \circ \rho_\sigma \circ \pi(j).$$

Dies bedeutet

$$\tilde{\rho}_\sigma = \pi^{-1} \circ \rho_\sigma \circ \pi = \rho_\sigma^\pi$$

und daher

$$d_0(\tau_i^{-1} \sigma \tau_j) \neq 0 \iff i = \tilde{\rho}_\sigma(j) \iff \pi(i) = \rho_\sigma(\pi j) \iff d_0(\sigma_{\pi i}^{-1} \sigma \sigma_{\pi j}) \neq 0.$$

Man erhält dann

$$\tilde{D}(\sigma) = \left(d_0(\tau_i^{-1} \sigma \tau_j) \right)_{ij} = \left(d_0(h_i^{-1} \sigma_{\pi i}^{-1} \cdot \sigma \cdot \sigma_{\pi j} h_j) \right)_{ij} = \left(d(h_i)^{-1} \cdot d_0(\sigma_{\pi i}^{-1} \sigma \sigma_{\pi j}) \cdot d(h_j) \right)_{ij}.$$

Nach diesen Vorüberlegungen setzen wir

$$A = \left(\delta_{i\pi(j)} d(h_j) \right)_{ij}, \quad B = \left(d(h_i)^{-1} \delta_{j\pi(i)} \right)_{ij}$$

wobei δ_{kl} das Kroneckersymbol in $M_n(K)$ bezeichne. Es gilt dann

$$BA = \left(\sum_k d(h_i)^{-1} \delta_{k\pi(i)} \cdot \delta_{k\pi(j)} d(h_j) \right)_{ij} = \left(\delta_{ij} d(h_i)^{-1} d(h_j) \right)_{ij} = \left(\delta_{ij} E_n \right)_{ij} = E_{rn},$$

also ist $A \in \text{GL}_{rn}(K)$ sowie $B = A^{-1}$. Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} A^{-1} D(\sigma) A &= B D(\sigma) A = \left(\sum_k \sum_l d(h_i)^{-1} \delta_{k\pi(i)} \cdot d_0(\sigma_k^{-1} \sigma \sigma_l) \cdot \delta_{l\pi(j)} d(h_j) \right)_{ij} \\ &= \left(d(h_i)^{-1} d_0(\sigma_{\pi i}^{-1} \sigma \sigma_{\pi j}) d(h_j) \right)_{ij} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \tilde{D}(\sigma), \end{aligned}$$

$\tilde{D}$ ist also äquivalent zu D (mit transformierender Matrix A). □

(4.3) Proposition: (Transitivität des Induzierens)

Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq H_1 \leq G$ Untergruppen und D eine Darstellung von H . Dann gilt:

$$D^G = (D^{H_1})^G.$$

Beweis: Sei $G = \dot{\bigcup}_{1 \leq \nu \leq s} \tau_\nu H_1$ und $H_1 = \dot{\bigcup}_{1 \leq i \leq r} \sigma_i H$, also $G = \dot{\bigcup}_{1 \leq \nu \leq s} \dot{\bigcup}_{1 \leq i \leq r} \tau_\nu \sigma_i H$. Dann gilt für beliebige $\sigma \in G$

$$(D^{H_1})^G(\sigma) = \left((D^{H_1})_0(\tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu) \right)_{\nu, \mu=1, \dots, s}$$

mit

$$\begin{aligned} (D^{H_1})_0(\tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu) &= \begin{cases} D^{H_1}(\tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu) & \text{falls } \tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu \in H_1, \\ 0 \in M_{rn}(K) & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(D_0(\sigma_i^{-1} \tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu \sigma_j) \right)_{i,j=1, \dots, r} & \text{falls } \tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu \in H_1, \\ 0 \in M_{rn}(K) & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \left(D_0(\sigma_i^{-1} \tau_\nu^{-1} \sigma \tau_\mu \sigma_j) \right)_{i,j=1, \dots, r}, \end{aligned}$$

wobei man für die letzte Gleichung beachte:

$$\tau_\nu^{-1}\sigma\tau_\mu \notin H_1 \iff \sigma_i^{-1}\tau_\nu^{-1}\sigma\tau_\mu\sigma_j \notin H_1 \implies \sigma_i^{-1}\tau_\nu^{-1}\sigma\tau_\mu\sigma_j \notin H \implies D_0(\sigma_i^{-1}\tau_\nu^{-1}\sigma\tau_\mu\sigma_j) = 0.$$

Folglich ist

$$(D^{H_1})^G(\sigma) = \left((D_0(\sigma_i^{-1}\tau_\nu^{-1}\sigma\tau_\mu\sigma_j))_{i,j=1,\dots,r} \right)_{\nu,\mu=1,\dots,s} \in M_s(M_r(M_n(K))) = M_{sr}(M_n(K)).$$

Andererseits gilt

$$D^G(\sigma) = \left(D_0(\sigma_i^{-1}\tau_\nu^{-1}\sigma\tau_\mu\sigma_j) \right)_{i,\nu;j,\mu} \in M_{rs}(M_n(K)),$$

und der Beweis von (4.3) ist vollständig.

(4.4) Definition: Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und χ ein Charakter von H . Dann definiert man den *induzierten Charakter* χ^G von G durch: Es sei D irgendeine Darstellung von H mit Charakter χ und D^G die induzierte Darstellung von G , dann ist χ^G der Charakter von D^G .

Da äquivalente Darstellungen von H auch äquivalente Darstellungen von G induzieren, ist χ^G wohldefiniert und nur abhängig von χ .

(4.5) Lemma: Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe, χ ein Charakter von H , χ_0 die Nullfortsetzung von χ auf G und $G = \dot{\bigcup}_{1 \leq i \leq r} \sigma_i H$ eine Nebenklassenzerlegung von G modulo H . Dann gilt:

$$a) \chi^G(\sigma) = \sum_{i=1}^r \chi_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_i).$$

$$b) \text{ Im Falle } \text{char } K \nmid \#G \text{ gilt: } \chi^G(\sigma) = \frac{1}{\#H} \sum_{\tau \in G} \chi_0(\tau^{-1}\sigma\tau).$$

Beweis: a) Sei D Darstellung von H mit Charakter χ . Dann gilt

$$\chi^G(\sigma) = \text{Tr}(D^G(\sigma)) = \sum_{i=1}^r \text{Tr } D_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_i) = \sum_{i=1}^r \chi_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_i).$$

b) Da χ als Charakter eine Klassenfunktion von H ist, gilt

$$\bigwedge_{\sigma \in H} \bigwedge_{\tau \in H} \chi(\tau^{-1}\sigma\tau) = \chi(\sigma).$$

Andererseits gilt

$$\bigwedge_{\sigma \notin H} \bigwedge_{\tau \in H} \tau^{-1}\sigma\tau \notin H \implies \chi_0(\tau^{-1}\sigma\tau) = 0 = \chi_0(\sigma).$$

Zusammengenommen bedeutet dies

$$\bigwedge_{\sigma \in G} \bigwedge_{\tau \in H} \chi_0(\tau^{-1}\sigma\tau) = \chi_0(\sigma).$$

Wegen $G = \dot{\bigcup}_i \sigma_i H$ gilt dann

$$\sum_{\rho \in G} \chi_0(\rho^{-1}\sigma\rho) = \sum_{i=1}^r \sum_{\tau \in H} \chi_0(\tau^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_i\tau) \stackrel{\text{s.o.}}{=} \sum_{i=1}^r \sum_{\tau \in H} \chi_0(\sigma_i^{-1}\sigma\sigma_i) = \#H \cdot \chi^G(\sigma)$$

und im Falle $\text{char } K \nmid \#G$ folgt dann b).

Die Beschreibung des induzierten Charakters in Lemma (4.5) ist auch für beliebige Klassenfunktionen von H (statt nur Charakteren) sinnvoll und ist Grundlage der folgenden allgemeinen

(4.6) Definition: Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und $\varphi : H \rightarrow K$ eine Klassenfunktion von H mit Werten in einem Körper K . Dann definiert man die auf G induzierte Klassenfunktion φ^G durch

$$\varphi^G(\sigma) = \sum_{i=1}^r \varphi_0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_i),$$

wobei φ_0 die Nullfortsetzung von φ auf G ist und $G = \dot{\bigcup}_{1 \leq i \leq r} \sigma_i H$ die Nebenklassenzerlegung von G modulo H ist.

(4.7) Bemerkung: Unter den Voraussetzungen der Definition (4.6) gilt:

- a) Die Definition von φ^G ist unabhängig von den gewählten Repräsentanten σ_i .
- b) φ^G ist eine Klassenfunktion auf G .
- c) $\text{char } K \nmid \#G \implies \varphi^G(\sigma) = \frac{1}{\#H} \sum_{\rho \in G} \varphi_0(\rho^{-1} \sigma \rho)$.

Beweis: a) Sei $G = \dot{\bigcup}_i \sigma_i H = \dot{\bigcup}_i \tau_i H$. Dann gibt es eine Permutation $\pi \in S_r$ und $h_i \in H$ mit $\tau_i = \sigma_{\pi i} h_i$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^r \varphi_0(\tau_i^{-1} \sigma \tau_i) = \sum_{i=1}^r \varphi_0(h_i^{-1} \sigma_{\pi i}^{-1} \sigma \sigma_{\pi i} h_i) \stackrel{h_i \in H}{=} \sum_{i=1}^r \varphi_0(\sigma_{\pi i}^{-1} \sigma \sigma_{\pi i}) \stackrel{\pi \in S_r}{=} \sum_{i=1}^r \varphi_0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_i).$$

b) Sei $\rho \in G$. Dann gilt $G = \dot{\bigcup}_i \rho \sigma_i H$ und daher nach a)

$$\varphi^G(\rho^{-1} \sigma \rho) = \sum_{i=1}^r \varphi_0(\sigma_i^{-1} \rho^{-1} \sigma \rho \sigma_i) \stackrel{a)}{=} \varphi^G(\sigma).$$

c) Gleiche Rechnung wie in (4.5),b) für Charaktere.

Wir kommen nun zum zentralen Ergebnis dieses Abschnitts.

(4.8) Satz: (Frobenius-Reziprozität)

Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ Untergruppe und K ein Körper mit $\text{char } K \nmid \#G$.

- a) Dann gilt für Klassenfunktionen χ von G und ψ von H folgende Reziprozität zwischen den Skalarprodukten:

$$(\chi|_H, \psi)_H = (\chi, \psi^G)_G.$$

- b) Im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Körpers der Charakteristik 0 und irreduzibler Charaktere χ von G bzw. ψ von H bedeutet dies:

Die Vielfachheit von ψ im eingeschränkten Charakter $\chi|_H$ ist gleich der Vielfachheit von χ im induzierten Charakter ψ^G .

Beweis: a) Definitionsgemäß gilt

$$\begin{aligned}
(\chi, \psi^G)_G &= \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \psi^G(\sigma) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\#H} \sum_{\tau \in G} \chi(\sigma^{-1}) \psi_0(\tau^{-1} \sigma \tau) \quad (\text{nach (4.7)c) }) \\
&= \frac{1}{\#G \#H} \sum_{\tau \in G} \sum_{\sigma \in G} \chi(\tau^{-1} \sigma^{-1} \tau) \psi_0(\tau^{-1} \sigma \tau) \quad (\chi \text{ Klassenfunktion}) \\
&= \frac{1}{\#G \#H} \sum_{\tau \in G} \sum_{\rho \in G} \chi(\rho^{-1}) \psi_0(\rho) \\
&= \frac{1}{\#G \#H} \#G \sum_{\rho \in G} \chi(\rho^{-1}) \psi_0(\rho) \\
&= \frac{1}{\#H} \sum_{\rho \in H} \chi(\rho^{-1}) \psi(\rho) \quad (\psi_0(\rho) = 0 \text{ für } \rho \notin H) \\
&= (\chi|_H, \psi)_H
\end{aligned}$$

b) Nach Satz (2.6),(1) gilt für die irreduziblen Charaktere $(\chi, \chi)_G = 1 = (\psi, \psi)_H$ und daher folgt b) aus a) gemäß Satz (2.9),b).

b. Induzierte Darstellungen und Permutationsdarstellungen

(4.9) Definition: Jede Untergruppe $H \leq G$ (von endlichem Index) bestimmt eine Permutationsdarstellung P_H von G durch Linksmultiplikation von G auf den Nebenklassen von H :

$$\begin{aligned}
\Omega &:= G/H = \{\sigma H \mid \sigma \in G\} \\
P_H : G &\rightarrow \mathcal{S}(\Omega), \quad P_H(\rho)(\sigma H) = \rho \sigma H
\end{aligned}$$

(4.10) Bemerkung: Sei $H \leq G$ eine Untergruppe von G mit endlichem Index. Dann gilt:

- a) P_H ist eine transitive Permutationsdarstellung von G vom Grad $(G : H)$.
- b) Ist $\alpha = \sigma H \in \Omega$, so ist die Fixgruppe $G_\alpha = \sigma H \sigma^{-1}$ und damit konjugiert zu H .
- c) Der Kern von P_H ist das sog. *Mark* H_G von H : $\text{Ke } P_H = H_G := \bigcap_{\sigma \in G} \sigma H \sigma^{-1}$;
dies ist der größte Normalteiler $H_G \triangleleft G$, der in H liegt.

Beweis: a) $P_H(\rho)$ permutiert die σH und offenbar gilt $P_H(e_G) = \text{id}_\Omega$ und $P_H(\rho \rho')(\sigma H) = P_H(\rho) \circ P_H(\rho')(\sigma H)$. Damit ist P_H eine Permutationsdarstellung und sie ist transitiv, denn für beliebige $\alpha_i = \sigma_i H \in \Omega$ ($i = 1, 2$) gilt $P_H(\sigma_2 \sigma_1^{-1})(\alpha_1) = \alpha_2$.

b) $\rho \in G_\alpha \iff \rho \sigma H = \sigma H \iff \sigma^{-1} \rho \sigma \in H \iff \rho \in \sigma H \sigma^{-1}$.

c) Es ist $\text{Ke } P_H = \bigcap_{\alpha \in \Omega} G_\alpha = H_G$ und folglich $H_G \triangleleft G$. Ist $N \triangleleft G$ und $N \leq H$, so gilt

$$\bigwedge_{\sigma \in G} \sigma^{-1} N \sigma = N \subset H \implies \bigwedge_{\sigma \in G} N \subset \sigma H \sigma^{-1} \implies N \subset H_G.$$

In Umkehrung von (4.10),a) gilt

(4.11) Proposition: Ist P eine transitive Permutationsdarstellung einer endlichen Gruppe G und $H = G_\alpha$ die Fixgruppe eines $\alpha \in \Omega$, so ist P äquivalent zur Darstellung P_H .

Beweis: Ist $H = G_\alpha$, so ist

$$G/H \simeq G_\alpha, \sigma H \mapsto P(\sigma)(\alpha)$$

eine Bijektion: $\sigma H = \tau H \iff \tau^{-1}\sigma \in H = G_\alpha \iff P(\sigma)(\alpha) = P(\tau)(\alpha)$, und wegen der Transitivität gilt $G_\alpha = \Omega$. Diese Bijektion $G/H \simeq \Omega$ liefert wegen $P(\tau)(P(\sigma)(\alpha)) = P(\tau\sigma)(\alpha)$ und $P_H(\tau)(\sigma H) = \tau\sigma H$ eine Äquivalenz zwischen P und P_H (siehe (1.4),(5), p. 7).

(4.12) Proposition: Sei G eine endliche Gruppen und $H \leq G$ Untergruppe vom Index r . Es bezeichne $E_H : H \rightarrow \{1\} \leq \text{GL}_1(K)$ die Einsdarstellung (ersten Grades) von H und $1_H : H \rightarrow \{1\} \subset K$ ihren Charakter (über beliebig vorgegebenem Grundkörper K). Dann gilt: Die induzierte Darstellung $E_H^G : G \rightarrow \text{GL}_r(K)$ ist äquivalent zur Permutationsdarstellung $P_H : G \rightarrow \mathcal{S}_r$ (aufgefasst als lineare Darstellung) und der induzierte Charakter 1_H^G ist der Permutationscharakter von P_H .

Anmerkung: Bei der üblichen Identifikation $\text{GL}_1(K) \simeq K^\times \subset K$ stimmen E_H und 1_H als Abbildungen überein, die unterschiedliche Bezeichnung soll anzeigen, ob man sie als Darstellung oder als Charakter betrachtet. Für den Induzierungsprozess ist diese Unterscheidung wichtig: $E_H^G : G \rightarrow \text{GL}_r(K)$ ist eine Darstellung (vom Grade r) und $1_H^G : G \rightarrow K$ ein Charakter von G , und zwar der Charakter von E_H^G .

Beweis: Es sei $\Omega = G/H = \{\sigma_1 H, \dots, \sigma_r H\}$. Dann gilt per definitionem für beliebige $\sigma \in G$:

$$E_H^G(\sigma) = \left(E_H^0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j) \right)_{ij}$$

mit der Nullfortsetzung $E_H^0 : G \rightarrow \{1, 0\}$. Wegen $E_H^0(\rho) \neq 0 \iff E_H^0(\rho) = 1$ gilt

$$E_H^0(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho \in H, \\ 0 & \rho \notin H. \end{cases}$$

Bei Identifizierung $\Omega \simeq \{1, \dots, r\}$ erhalten wir

$$\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j \in H \iff \sigma \sigma_j H = \sigma_i H \iff P_H(\sigma)(j) = i$$

und daher ist

$$E_H^G(\sigma) = \left(E_H^0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j) \right)_{ij} = \left(\delta_{i, P_H(\sigma)(j)} \right)_{ij}$$

die Permutationsmatrix der Permutation $P_H(\sigma) \in \mathcal{S}_r$. Damit ist E_H^G die (lineare Darstellung der) Permutationsdarstellung P_H (siehe Beispiele (1.4),(4), p. 7) und folglich 1_H^G der Permutationscharakter von P_H (siehe Def. (3.19), p. 37).

Aufgrund der vorangehenden Ergebnisse (4.10)–(4.12) erhält man folgende Beschreibung aller transitiven Permutationsdarstellungen bzw. -charaktere einer endlichen Gruppe G allein durch die Gruppe G :

(4.13) Korollar: Für eine endliche Gruppe G stimmen die folgenden Mengen bis auf Äquivalenz überein:

- Menge aller transitiven Permutationsdarstellungen von G
- Menge aller Darstellungen P_H mit $H \leq G$.
- Menge aller induzierten Darstellungen E_H^G für $H \leq G$.

Und entsprechend:

- Menge aller transitiven Permutationscharaktere von G .
- Menge aller induzierten Charaktere 1_H^G mit $H \leq G$.

Aufgrund dieser Tatsache kann man den Zusammenhang zwischen Transitivität und Permutationscharakteren, wie er in Satz (3.23), p. 38, bewiesen wurde, als Korollar der Frobenius-Reziprozität (4.8), p. 49, erkennen:

(3.23),a) Sei ν der Permutationscharakter einer Permutationsdarstellung $P : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ und t die Anzahl der Bahnen von P in Ω . Dann gilt $(\nu, 1_G)_G = t$.

Beweis: Seien $\Omega_1, \dots, \Omega_t$ die Bahnen von P in Ω und $P_i : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega_i)$ die durch P auf Ω_i erzeugten *transitiven* Permutationsdarstellungen von G . Der Permutationscharakter $\nu(\sigma)$ zählt die Fixpunkte von $P(\sigma)$, also ist ν (wegen der Disjunktheit der Bahnen) gleich der Summe der Permutationscharaktere ν_i der P_i und wegen der Transitivität der P_i gilt $\nu_i = 1_{H_i}^G$ für geeignete Untergruppen $H_i \leq G$ (siehe oben (4.13)):

$$\nu = \sum_{i=1}^t \nu_i = \sum_{i=1}^t 1_{H_i}^G.$$

Mittels Frobenius-Reziprozität folgt dann die Behauptung:

$$(\nu, 1_G)_G = \sum_{i=1}^t (1_{H_i}^G, 1_G)_G \stackrel{(4.8)}{=} \sum_{i=1}^t (1_{H_i}, 1_G|_{H_i})_{H_i} = \sum_{i=1}^t (1_{H_i}, 1_{H_i})_{H_i} = t.$$

(3.23),c) Sei ν der Permutationscharakter einer transitiven Permutationsdarstellung $P : G \rightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ und G_α die Fixgruppe von α in G für ein beliebiges $\alpha \in \Omega$. Dann gilt für die Anzahl s der Bahnen von $P|_{G_\alpha} : G_\alpha \rightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ (einschließlich $\{\alpha\}$): $(\nu, \nu)_G = s$.

Beweis: Nach (4.11) gilt $P = P_{G_\alpha}$ und daher $\nu = 1_{G_\alpha}^G$. Also folgt

$$(\nu, \nu)_G = (\nu, 1_{G_\alpha}^G)_G \stackrel{(4.8)}{=} (\nu|_{G_\alpha}, 1_{G_\alpha})_{G_\alpha} \stackrel{a)}{=} s.$$

c. Monomiale Darstellungen

Entfallen.

(4.14) Definition: a) Darstellungen bzw. Charaktere einer Gruppe nennt man *monomial*, wenn sie induziert werden von *eindimensionalen* Darstellungen bzw. Charakteren einer Untergruppe. b) Eine Gruppe G heißt *M-Gruppe*, wenn alle ihre irreduziblen Charaktere (über dem Körper $\mathbb{C}$) monomial sind.

Ein erstes einfaches Beispiel für *M-Gruppen* sind die abelschen Gruppen, denn ihre irreduziblen Charaktere (über $\mathbb{C}$) sind sämtlich eindimensional (siehe Korollar (2.15), p. 24).

(4.15) Satz: *M-Gruppen sind auflösbar.*

Dieser Satz ist ein Korollar zu folgender

(4.16) Proposition: Sei G eine *M-Gruppe* und $G^{(i)}$ die absteigende Kommutatorreihe von G , also

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] = \langle \sigma^{-1} \tau^{-1} \sigma \tau \mid \sigma, \tau \in G^{(i)} \rangle \text{ Kommutatorgruppe von } G^{(i)}.$$

Ist $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k$ die aufsteigende Folge aller Grade irreduzibler Charaktere von G über $\mathbb{C}$, so gilt:

$$\chi \text{ irreduzibel} \wedge \deg \chi = d_i \implies G^{(i)} \subset \text{Ke } \chi.$$

Beweis: Induktiv. Sei $i = 1$ und χ ein irreduzibler Charakter mit $\deg \chi = d_1 = 1$. Dann ist $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus und wegen der Kommutativität von $\mathbb{C}^\times$ liegen alle Kommutatoren im Kern: $G^{(1)} = G' \leq \text{Ke } \chi$.

Sei $i \geq 2$ und die Behauptung gelte für alle $j < i$. Sei χ ein irreduzibler Charakter mit $\deg \chi = d_i$. Da G eine *M-Gruppe* ist, gibt es eine Untergruppe $H \leq G$ und einen eindimensionalen Charakter ψ von H mit $\chi = \psi^G$. Wegen $i \geq 2$ gilt $1 = d_1 < d_i = \deg \chi = \deg \psi^G = (G : H) \deg \psi = (G : H)$, also ist H eine echte Untergruppe von G .

Wir studieren nun den Charakter 1_H^G und zerlegen ihn in irreduzible Charaktere. Aufgrund der Frobenius-Reziprozität wissen wir

$$(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_G|_H)_H = (1_H, 1_H)_H = 1,$$

also enthält 1_H^G den (irreduziblen) Einscharakter und ist wegen $\deg 1_H^G = (G : H) = d_i > 2$ reduzibel. Also

$$1_H^G = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}, \quad \Phi_{\nu} \text{ irreduzibel, } \deg \Phi_{\nu} < \deg 1_H^G = d_i.$$

Jedes (irreduzible) Φ_{ν} hat also einen Grad d_j mit passendem $j < i$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\text{Ke } \Phi_{\nu} \supset G^{(j)} \supseteq G^{(i-1)}$$

und daher

$$G^{(i-1)} \subset \bigcap_{\nu} \text{Ke } \Phi_{\nu} = \text{Ke } 1_H^G.$$

Der Kern induzierter Charaktere berechnet sich nun wie folgt:

(4.17) Lemma: Seien $H \leq G$ Gruppen, φ ein Charakter, d eine Darstellung von H . Dann gilt:

$$\text{Ke } d^G = \bigcap_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(\text{Ke } d)\sigma, \quad \text{Ke } \varphi^G = \bigcap_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(\text{Ke } \varphi)\sigma.$$

Beweis: Es genügt Darstellungen zu betrachten. Sei $G = \dot{\bigcup}_{1 \leq i \leq r} \sigma_i H$ die Nebenklassenzerlegung von G nach H . Dann gilt gemäß Definition der induzierten Darstellung

$$\sigma \in \text{Ke } d^G \iff d_0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j) = \begin{cases} E_n & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases} \implies \bigwedge_i \sigma_i^{-1} \sigma \sigma_i \in \text{Ke } d$$

und die letzte Implikation gilt auch umgekehrt, denn

$$i \neq j \implies \sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j = \underbrace{\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_i}_{\in \text{Ke } d \subset H} \cdot \underbrace{\sigma_i^{-1} \sigma_j}_{\notin H} \notin H \implies d_0(\sigma_i^{-1} \sigma \sigma_j) = 0.$$

Damit folgt

$$\text{Ke } d^G = \bigcap_{i=1}^r \sigma_i(\text{Ke } d)\sigma_i^{-1}$$

und daraus dann die Behauptung:

$$\bigcap_{\rho \in G} \rho(\text{Ke } d)\rho^{-1} = \bigcap_{i=1}^r \bigcap_{\tau \in H} \sigma_i \tau \cdot \text{Ke } d \cdot \tau^{-1} \sigma_i^{-1} \stackrel{\text{Ke } d \triangleleft H}{=} \bigcap_{i=1}^r \sigma_i(\text{Ke } d)\sigma_i^{-1} = \text{Ke } d^G.$$

Wir setzen den Beweis von (4.16) fort. Wie oben gezeigt gilt:

$$G^{(i-1)} \subset \text{Ke } 1_H^G = \bigcap_{\sigma \in G} \sigma H \sigma^{-1} \subset H.$$

Da ψ ein eindimensionaler Charakter, also ein Homomorphismus von H in die abelsche Gruppe $\mathbb{C}^{\times}$ ist, enthält sein Kern die Kommutatorgruppe H' :

$$G^{(i)} = (G^{(i-1)})' \subset H' \subset \text{Ke } \psi.$$

Und wir erhalten schließlich die Induktionsbehauptung

$$\text{Ke } \chi = \text{Ke } \psi^G \stackrel{(4.17)}{=} \bigcap_{\sigma \in G} \sigma(\text{Ke } \psi)\sigma^{-1} \supseteq \bigcap_{\sigma \in G} \sigma G^{(i)} \sigma^{-1} \stackrel{G^{(i)} \triangleleft G}{=} G^{(i)}.$$

Beweis von Satz (4.15): Sei χ^* der reguläre Charakter von G , also nach Satz (2.13), p. 23,

$$\chi^* = \sum_{\chi \text{ irr.}} \chi(1) \cdot \chi$$

und es gilt $\text{Ke } \chi^* = \{1\}$ (siehe (1.4), 6), p. 7). Damit erhält man aus (4.16) mit dem dort definierten $k \in \mathbb{N}$:

$$\{1\} = \text{Ke } \chi^* \stackrel{(3.13)}{=} \bigcap_{\chi \text{ irr.}} \text{Ke } \chi \supset G^{(k)},$$

und es folgt die Auflösbarkeit von G . □

Ohne Beweis sei erwähnt, dass die Umkehrung nicht gilt: Die auflösbare Gruppe $\text{SL}(2, 3) = \text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ ist keine M -Gruppe.

Allerdings sind alle nilpotenten, alle überauflösbaren und alle metabelschen Gruppen M -Gruppen (siehe Dornhoff: *Group representation theory*, Marcel Dekker 1971, §15).

d. Der Satz von Artin

(4.18) Satz: (Artin) *Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt*

- a) *Jeder rationalwertige Charakter von G ist $\mathbb{Q}$ -Linearkombination von Permutationscharakteren 1_H^G , $H \leq G$ zyklisch.*
- b) *Genauer: Es sei $\mathcal{Z}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der zyklischen Untergruppen von G . Dann existieren für jeden rationalwertigen Charakter χ von G ganze Zahlen $a_H \in \mathbb{Z}$ ($H \in \mathcal{Z}$) mit*

$$\chi = \sum_{H \in \mathcal{Z}} \frac{a_H}{(\mathcal{N}_G(H) : H)} \cdot 1_H^G,$$

wobei $\mathcal{N}_G(H) = \{\sigma \in G \mid \sigma H \sigma^{-1} = H\}$ den Normalisator von H in G bezeichne.

Beweis: Es genügt b) zu beweisen. Sei $H_1, \dots, H_s$ eine Abzählung von $\mathcal{Z}$ und $H_i = \langle \sigma_i \rangle$. Wie im Beweis von Satz (3.7) gezeigt wurde (siehe die sich daran anschließende Anmerkung, p. 27) sind rationalwertige Gruppencharaktere konstant auf den Abteilungen

$$\mathcal{A}_i := \mathcal{A}(\sigma_i) = \{\tau \in G \mid \langle \tau \rangle \text{ konjugiert zu } \langle \sigma_i \rangle\}.$$

Es bezeichne im Folgenden $\sim$ die Konjugiertheit von Elementen bzw. Untergruppen in G . Da jede zyklische Untergruppe zu genau einem $H_i = \langle \sigma_i \rangle$ konjugiert ist, bilden diese $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, \dots, s$) eine disjunkte Zerlegung von G und jeder rationalwertige Charakter ist folglich darstellbar als Linearkombination der charakteristischen Funktionen Φ_i der $\mathcal{A}_i$:

$$\Phi_i(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \in \mathcal{A}_i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \langle \tau \rangle \sim H_i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da rationalwertige Charaktere ganze Werte haben (siehe (3.5) und (3.6)), ergibt sich schließlich:

(*) Jeder Charakter $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Q}$ besitzt eine Darstellung als $\varphi = \sum_{i=1}^s b_i \Phi_i$ mit $b_i = \varphi(\sigma_i) \in \mathbb{Z}$.

Zum Beweis des Satzes von Artin muss man nun die Klassenfunktionen Φ_i als Linearkombinationen der Charaktere 1_H^G ($H \in \mathcal{Z}$) darstellen. Dies geschieht, indem man zuerst *umgekehrt* die 1_H^G für zyklisches H als Linearkombinationen der Φ_i darstellt, und dann nach den Φ_i auflöst.

Als Permutationscharakter ist 1_H^G rationalwertig und besitzt daher nach (*) eine Darstellung $1_H^G = \sum_{i=1}^s b_i \Phi_i$ mit $b_i \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen nun die b_i mit Hilfe der Bilinearform für Klassenfunktionen. Da die Φ_i reellwertig und Abteilungen disjunkt sind, gilt

$$(\Phi_i, \Phi_j)_G = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \Phi_i(\sigma) \Phi_j(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \frac{1}{\#G} \# \mathcal{A}_i & \text{für } i = j \end{cases},$$

die Φ_i sind also paarweise orthogonal und es folgt

$$(1_H^G, \Phi_j)_G = \sum_{i=1}^s b_i (\Phi_i, \Phi_j)_G = b_j \cdot \frac{\#\mathcal{A}_j}{\#G} \iff b_j = \frac{\#G}{\#\mathcal{A}_j} \cdot (1_H^G, \Phi_j)_G.$$

Unter Verwendung der Frobenius-Reziprozität berechnen wir nun noch

$$(1_H^G, \Phi_j)_G \stackrel{(4.8)}{=} (1_H, \Phi_j|_H)_H = \frac{1}{\#H} \sum_{\sigma \in H} \Phi_j(\sigma) = \frac{\#(\mathcal{A}_j \cap H)}{\#H}$$

und erhalten damit

$$b_j = \frac{\#G}{\#H} \cdot \frac{\#(\mathcal{A}_j \cap H)}{\#\mathcal{A}_j}.$$

1. Bestimmung von $\#\mathcal{A}_j$:

$$\mathcal{A}_j = \{\tau \in G \mid \langle \tau \rangle \sim H_j\} = \dot{\bigcup}_{Z \sim H_j} \{\tau \mid \langle \tau \rangle = Z\} = \dot{\bigcup}_{Z \sim H_j} \{\tau \mid \tau \text{ erzeugt } Z\},$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist, da jedes $\tau \in \mathcal{A}_j$ natürlich das zugehörige $Z = \langle \tau \rangle \sim H_j$ eindeutig bestimmt. Wegen $\#Z = \#H_j =: n_j$ ist die Anzahl der Erzeugenden von Z gleich $\varphi(n_j)$, φ die Eulersche Phi-Funktion. Wir erhalten also

$$\#\mathcal{A}_j = \sum_{Z \sim H_j} \varphi(n_j) = \varphi(n_j) \cdot \#\{Z \leq G \mid Z \sim H_j\}.$$

Die Gruppe G operiert durch Konjugation auf ihren Untergruppen und der Normalisator $\mathcal{N}_G(H_j)$ ist per definitionem genau die Fixgruppe von H_j bei dieser Operation, so dass dessen Index $(G : \mathcal{N}_G(H_j))$ gerade die Zahl der Konjugierten von H_j ist. Also:

$$\#\mathcal{A}_j = \varphi(n_j) \cdot (G : \mathcal{N}_G(H_j)).$$

2. Bestimmung von $\#(\mathcal{A}_j \cap H)$ für *zyklische* Untergruppen $H \leq G$:

Wegen $\mathcal{A}_j \cap H = \{\tau \in H \mid \langle \sigma_j \rangle \sim \langle \tau \rangle\}$ ist $\#(\mathcal{A}_j \cap H) = 0 = b_j$ genau dann, wenn $\langle \sigma_j \rangle$ zu *keiner* (zyklischen) Untergruppe von H konjugiert ist, wenn also kein Konjugiertes von σ_j in H liegt, d.h. wenn $\sigma_j \notin H^G := \bigcup_{\tau \in G} \tau^{-1} H \tau$ ist.

Ist dagegen σ_j konjugiert zu einem Element in H , so ist $\langle \sigma_j \rangle = H_j$ konjugiert zu einer Untergruppe $H(j) \leq H$. In der *zyklischen* Gruppe H muss $H(j)$ dann die *eindeutige* Untergruppe der Ordnung $\#H_j = n_j$ sein. Also ist in diesem Falle

$$\mathcal{A}_j \cap H = \{\tau \in H \mid \langle \tau \rangle \sim \langle \sigma_j \rangle\} = \{\tau \in H \mid \langle \tau \rangle = H(j)\} \implies \#(\mathcal{A}_j \cap H) = \varphi(\#H(j)) = \varphi(n_j).$$

Damit ergibt sich bei *zyklischem* H und $\sigma_j \in H^G$

$$b_j = \frac{\#G}{\#H} \cdot \frac{\#(\mathcal{A}_j \cap H)}{\#\mathcal{A}_j} = \frac{\#G}{\#H} \cdot \frac{\varphi(n_j)}{\varphi(n_j)(G : \mathcal{N}_G(H_j))} = \frac{\#\mathcal{N}_G(H_j)}{\#H}$$

Insgesamt:

$$1_H^G = \sum_{j=1}^s b_j \Phi_j \quad \text{mit} \quad b_j = b_j(H) := \begin{cases} \frac{\#\mathcal{N}_G(H_j)}{\#H} & \sigma_j \in H^G, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Indem man dies für alle zyklischen Gruppen $H_i \in \mathcal{Z}$ ($i = 1, \dots, s$) anwendet, erhält man ein $s \times s$ lineares Gleichungssystem zwischen den $1_{H_i}^G$ und den Φ_j

$$1_{H_i}^G = \sum_{j=1}^s b_{ij} \Phi_j \quad \text{mit} \quad b_{ij} = b_j(H_i) = \begin{cases} \frac{\#\mathcal{N}_G(H_j)}{\#H_i} & \sigma_j \in H_i^G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzt man $E_i = \#H_i \cdot 1_{H_i}^G$ und $\tilde{\Phi}_j = \#\mathcal{N}_G(H_j) \cdot \Phi_j$, so gilt

$$(1) \quad E_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij} \tilde{\Phi}_j \quad \text{mit} \quad \beta_{ij} = \begin{cases} 1 & \sigma_j \in H_i^G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $i = j$ ergibt sich $\beta_{ii} = 1$, denn $\sigma_i \in H_i^G$. Für $i \neq j$ hingegen gilt

$$\beta_{ij} = 1 \iff \sigma_j \in H_i^G \iff H_j = \langle \sigma_j \rangle \sim H(j) \leq H_i \xrightarrow[H_j \not\leq H_i]{\iff} H_j \sim H(j) \neq H_i \implies n_j < n_i,$$

so dass in der Darstellung (1) für E_i neben $\tilde{\Phi}_i$ nur solche $\tilde{\Phi}_j$ mit $n_j < n_i$ vorkommen. Nummeriert man also die H_j bzw. σ_j so, dass die Ordnungen $n_j = \#H_j = \text{ord } \sigma_j$ monoton steigen, so gilt

$$(2) \quad i < j \implies n_i \leq n_j \implies \beta_{ij} = 0,$$

und die Koeffizientenmatrix $(\beta_{ij})_{ij}$ ist eine untere Dreiecksmatrix mit Hauptdiagonalelementen $\beta_{ii} = 1$ und sonst nur Einträgen $\beta_{ij} \in \{0, 1\}$. Die Matrix $(\beta_{ij})_{ij}$ ist also regulär und *ganzzahlig* invertierbar, die $\tilde{\Phi}_j$ sind folglich ganzzahlige Linearkombinationen der E_i :

$$(3) \quad \tilde{\Phi}_j = \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} E_k \quad \text{mit} \quad \gamma_{jk} \in \mathbb{Z}.$$

Wir wollen dies nun induktiv beweisen mit dem Zusatz $\gamma_{jk} = 0$ für $\sigma_k \notin H_j^G$ oder anders formuliert

$$(4) \quad \beta_{jk} = 0 \implies \gamma_{jk} = 0 \quad \text{bzw. äquivalent} \quad \gamma_{jk} = \beta_{jk} \gamma_{jk} \quad \text{für alle } j, k.$$

Ausgangspunkt ist gemäß (1) und (2) $\tilde{\Phi}_i = E_i - \sum_{j < i} \beta_{ij} \tilde{\Phi}_j$.

Sei nun $i \geq 1$ und es gelten die Induktionsbehauptungen (3), (4) für alle $j < i$. Dann folgt

$$\tilde{\Phi}_i = E_i - \sum_{j < i} \beta_{ij} \tilde{\Phi}_j \stackrel{(3)}{=} E_i - \sum_{j < i} \beta_{ij} \cdot \sum_k \gamma_{jk} E_k \stackrel{(4)}{=} \sum_k \underbrace{\left(\delta_{ik} - \sum_{j < i} \beta_{ij} \beta_{jk} \gamma_{jk} \right)}_{=: \gamma_{ik}} E_k$$

Zum Nachweis der Induktionsbehauptung (4) für $j = i$ sei nun $\beta_{ik} = 0$, also $i \neq k$ und daher $\gamma_{ik} = - \sum_{j < i} \beta_{ij} \beta_{jk} \gamma_{jk}$. Nun gilt

$$\beta_{ij} \beta_{jk} = 1 \iff \beta_{ij} = \beta_{jk} = 1 \iff \sigma_k \in H_j^G = \langle \sigma_j \rangle^G \wedge \sigma_j \in H_i^G \implies \sigma_k \in H_i^G \iff \beta_{ik} = 1$$

und daher durch Kontraposition

$$\beta_{ik} = 0 \iff \beta_{ik} \neq 1 \implies \beta_{ij} \beta_{jk} \neq 1 \iff \beta_{ij} \beta_{jk} = 0 \implies \gamma_{ik} = - \sum_{j < i} \beta_{ij} \beta_{jk} \gamma_{jk} = 0.$$

Der Induktionsbeweis von (3), (4) ist damit vollständig und es gilt für alle $1 \leq j \leq s$

$$(3') \quad \tilde{\Phi}_j = \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} E_k, \quad \text{bzw. gleichwertig} \quad \Phi_j = \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \cdot \frac{\#H_k}{\#\mathcal{N}_G(H_j)} \cdot 1_{H_k}^G$$

mit

$$(4') \quad \gamma_{jk} \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sigma_k \notin H_j^G \implies \gamma_{jk} = 0.$$

Beweisschluss von Satz (4.18),b):

Sei nun χ ein rationalwertiger Charakter von G und daher nach (*)

$$\chi = \sum_{j=1}^s c_j \Phi_j \quad \text{mit} \quad c_j = \chi(\sigma_j) \in \mathbb{Z}.$$

Dann erhalten wir aus (3')

$$\chi = \sum_{j=1}^s c_j \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \cdot \frac{\#H_k}{\#\mathcal{N}_G(H_j)} \cdot 1_{H_k}^G = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^s \underbrace{\frac{c_j \gamma_{jk} \cdot \#\mathcal{N}_G(H_k)}{\#\mathcal{N}_G(H_j)}}_{=: a_{jk}} \right) \cdot \frac{\#H_k}{\#\mathcal{N}_G(H_k)} \cdot 1_{H_k}^G.$$

Mittels (4') zeigen wir, dass alle a_{jk} ganzzahlig sind:

1. Fall: $\sigma_k \notin H_j^G \xRightarrow{(4')} \gamma_{jk} = 0 \implies a_{jk} = 0$.

2. Fall: $\sigma_k \in H_j^G$, also $\tau H_k \tau^{-1} = \langle \sigma_j^l \rangle$ für geeignete $\tau \in G$, $l \in \mathbb{Z}$. Dann folgt

$$\mathcal{N}_G(H_j) \subset \mathcal{N}_G(\langle \sigma_j^l \rangle) = \mathcal{N}_G(\tau H_k \tau^{-1}) = \tau \mathcal{N}_G(H_k) \tau^{-1} \implies \#\mathcal{N}_G(H_j) \mid \#\mathcal{N}_G(H_k) \implies a_{jk} \in \mathbb{Z}.$$

Damit erhalten wir die Behauptung von Satz (4.18),b)

$$\chi = \sum_{k=1}^s a_k \cdot \frac{1}{(\mathcal{N}_G(H_k) : H_k)} \cdot 1_{H_k}^G \quad \text{mit} \quad a_k := \sum_{j=1}^s a_{jk} \in \mathbb{Z}.$$

e. Frobeniusgruppen

Schon beim Burnside'schen Satz (3.24), p. 40, über Permutationsgruppen von Primzahlgrad sind wir den sog. Frobeniusgruppen begegnet (siehe S. 44), die wir hier noch einmal explizit definieren wollen:

(4.19) Definition: Sei G eine endliche Gruppe, Ω eine nicht-leere Menge.

- a) G heißt *Frobeniusgruppe auf Ω* genau dann, wenn G transitiv auf Ω operiert und alle $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$ höchstens einen Fixpunkt in Ω haben.
- b) Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *Frobeniuskomplement* in G genau dann, wenn für alle $\sigma \in G$, $\sigma \notin H$ gilt: $H \cap \sigma^{-1}H\sigma = \{1\}$.

Beide Konzepte beschreiben dieselbe Situation, genauer gilt:

(4.20) Bemerkung: Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt:

- a) Ist H ein Frobeniuskomplement in G , so auch jede konjugierte Untergruppe $H^\tau = \tau^{-1}H\tau$.
- b) Ist G eine Frobeniusgruppe auf Ω , so sind die (zueinander konjugierten) Fixgruppen G_α ($\alpha \in \Omega$) Frobeniuskomplemente in G .
- c) Ist $H \leq G$ ein Frobeniuskomplement in G , so operiert G auf der Menge $\Omega = G/H$ der Linksnebenklassen von H als Frobeniusgruppe mit den Konjugierten von H als Fixgruppen G_α ($\alpha \in \Omega$).

Beweis: a) Sei $\sigma' \notin H' = H^\tau$, also $\sigma = \tau\sigma'\tau^{-1} \notin H$ und daher

$$H' \cap \sigma'^{-1}H'\sigma' = \tau^{-1}H\tau \cap \sigma'^{-1}\tau^{-1}H\tau\sigma' = \tau^{-1} \cdot (H \cap \sigma^{-1}H\sigma) \cdot \tau = \{e_G\}$$

b) Sei $\sigma \in G \setminus G_\alpha$, also $\sigma\alpha \neq \alpha$. Ist dann $\rho \in G_\alpha \cap \sigma G_\alpha \sigma^{-1} = G_\alpha \cap G_{\sigma\alpha}$, so hat ρ die zwei verschiedenen Fixpunkte $\alpha, \sigma\alpha$, also gilt nach Definition $\sigma = e_G$.

c) Für jede Untergruppe $H \leq G$ operiert G durch Linksmultiplikation auf der Menge $\Omega = G/H = \{\sigma H \mid \sigma \in G\}$ der Linksnebenklassen von H . Diese Operation ist offenbar transitiv und $\sigma H \sigma^{-1}$ ist die Fixgruppe von $\alpha = \sigma H \in G/H$. Sei nun $\sigma \notin H$, also $\alpha = H \neq \beta = \sigma H$. Dann hat jedes $\rho \in H \cap \sigma H \sigma^{-1} = G_\alpha \cap G_\beta$ zwei verschiedene Fixpunkte und ist daher trivial: $\rho = e_G$; G ist eine Frobeniusgruppe auf Ω . $\square$

Wir kommen zum zentralen Resultat dieses Abschnittes, in dem wir zeigen, dass Frobeniusgruppen semidirekte Produkte sind.

(4.21) Definition: Eine Gruppe G ist *semidirektes Produkt* eines Normalteilers $N \triangleleft G$ mit einem *Komplement* $H \leq G$ genau dann, wenn jedes $\sigma \in G$ eine eindeutige Darstellung $\rho = \sigma\tau$ mit $\sigma \in N$, $\tau \in H$ besitzt:

$$G = NH = \{\sigma\tau \mid \sigma \in N, \tau \in H\} \quad \text{und} \quad N \cap H = \{e_G\}.$$

Im Unterschied zum direkten Produkt wird hier die Vertauschbarkeit der Faktoren nicht gefordert, d. h. i. a. $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ für $\sigma \in N$, $\tau \in H$.

Ist H ein Komplement, so auch jedes Konjugierte $H^\sigma = \sigma^{-1}H\sigma$ ($\sigma \in G$).

(4.22) Satz: (Frobenius) *Frobeniusgruppen G sind semidirekte Produkte eines Normalteilers $N \triangleleft G$ mit einem Komplement $H \leq G$. Genauer gilt:*

- a) *Ist G eine Frobeniusgruppe auf der Menge Ω , so bilden die fixpunktfreien Elemente von G zusammen mit der Eins einen Normalteiler $N \triangleleft G$ mit $\#N = \#\Omega$ und G ist das semidirekte Produkt von N mit einer/jeder Fixgruppe G_α ($\alpha \in \Omega$) als Komplement.*
- b) *Ist $H \leq G$ ein Frobeniuskomplement und $H^G = \bigcup_{\sigma \in G} H^\sigma$ die Vereinigung aller Konjugierten von H in G , so ist $N := (G \setminus H^G) \cup \{e_G\}$ ein Normalteiler in G und G semidirektes Produkt von N mit H als Komplement.*

Beweis: Mit den Überlegungen von Bem. (4.20)) ist klar, dass beide Aussagen des Satzes äquivalent sind. Wir beweisen b).

(4.23) Lemma: *Ist $H \leq G$ ein Frobeniuskomplement, e wie immer das Einselement der Gruppen und $N = (G \setminus H^G) \cup \{e\}$, so gilt:*

- a) $\#N = (G : H)$.
- b) $M \triangleleft G \wedge M \cap H = \{e\} \implies M \subseteq N$.
- c) $M \triangleleft G \wedge M \cap H = \{e\} \wedge G = MH \implies M = N$.

Beweis: a) $H^\sigma \cap H = \{e\}$ für $\sigma \in G \setminus H$ bedeutet $H^\tau \cap H^\rho = \{e\}$ für $\tau\rho^{-1} \notin H \iff H^\tau \neq H^\rho$. Ist jedoch $H^\tau = H^\rho$, so ist natürlich $\tau^{-1}H = \rho^{-1}H$ und damit $H^\tau = H^\rho$. Also gilt für ein vollständiges Repräsentantensystem σ_i ($i = 1, \dots, r$) der Rechtsnebenklassen von H

$$\begin{aligned} H^G &= \bigcup_{\sigma \in G} H^\sigma = \bigcup_{i=1}^r H^{\sigma_i} = \bigcup_{i=1}^r (H^{\sigma_i} \setminus \{e\}) \cup \{e\} \\ \implies \#H^G &= r \cdot (\#H - 1) + 1 = (G : H)(\#H - 1) + 1 = \#G - (G : H) + 1 \\ \implies \#N &= \#(G \setminus H^G) + 1 = (G : H). \end{aligned}$$

- b) $M \cap H = \{e\} \implies \{e\} = M^\sigma \cap H^\sigma \underset{M \triangleleft G}{=} M \cap H^\sigma$ für alle $\sigma \in G$, also

$$M \setminus \{e\} \subseteq G \setminus \bigcup_{\sigma \in G} H^\sigma = N \setminus \{e\}.$$

c) Es ist $G = M \cdot H$ semidirektes Produkt und daher $\#M = (G : H) \underset{a)}{=} \#N$. Nach b) ist $M \subseteq N$ und es folgt $M = N$. $\square$

Zum Beweis des Satzes von Frobenius bleibt nun zu zeigen, dass die Menge $N = G \setminus H^G \cup \{e\}$ ein Normalteiler in G ist. Wegen $N \cap H = \{e\}$ und $\#N = (G : H)$ ist dann $G = N \cdot H$ semidirektes Produkt von N mit H .

(4.24) Lemma: Sei H ein Frobeniuskomplement in G . Dann gilt für alle Klassenfunktionen $\psi : H \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\psi(e) = 0$:

$$\psi^G|_H = \psi.$$

Beweis: Zunächst gilt für $h = e$ (siehe (4.7), c), p. 49)

$$\psi^G(e) = \frac{1}{\#H} \sum_{\sigma \in G} \psi_0(e) = (G : H)\psi(e) = 0 = \psi(e).$$

Ist hingegen $h \in H$, $h \neq e$, so gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad \sigma \notin H &\implies H \cap H^\sigma = \{e\} \implies e \neq h^\sigma \notin H \implies \psi_0(h^\sigma) = 0 \\ (2) \quad \sigma \in H &\implies \psi_0(h^\sigma) = \psi(h^\sigma) = \psi(h) \end{aligned}$$

und daher

$$\psi^G(h) \underset{(1)}{=} \frac{1}{\#H} \sum_{\sigma \in H} \psi_0(h^\sigma) \underset{(2)}{=} \frac{1}{\#H} \sum_{\sigma \in H} \psi(h) = \psi(h).$$

Beweis von Satz 4.22: Um zu zeigen, dass $N = (G \setminus H^G) \cup \{e\}$ ein Normalteiler ist, stellen wir N als Durchschnitt der Kerne gewisser irreduzibler Charaktere von G dar. Es sei dabei an Satz (3.13), c), p. 33, erinnert, demzufolge jeder Normalteiler als ein solcher Durchschnitt darstellbar ist.

Es sei φ ein irreduzibler Charakter von H über $\mathbb{C}$, $\varphi \neq 1_H : H \rightarrow \{1\} \subset \mathbb{C}$. Dann ist $\psi = \varphi - \varphi(e)1_H$ eine Klassenfunktion von H mit $\psi(e) = 0$. Für diese gilt nach Lemma (4.24) und Frobeniusreziprozität

$$\begin{aligned} (\psi^G, \psi^G)_G &= (\psi^G|_H, \psi)_H = (\psi, \psi)_H \\ &= (\varphi - \varphi(e)1_H, \varphi - \varphi(e)1_H)_H \\ &\underset{\varphi \neq 1_H \text{ irr}}{=} 1 + \varphi(e)^2. \end{aligned}$$

Ebenfalls nach Frobeniusreziprozität gilt

$$(\psi^G, 1_G)_G = (\psi, 1_G|_H)_H = (\psi, 1_H)_H = (\varphi - \varphi(e)1_H, 1_H)_H = -\varphi(e).$$

Damit erhalten wir für alle nicht-trivialen irreduziblen Charaktere φ von H eine Klassenfunktion $\varphi^* := \psi^G + \varphi(e)1_G$ von G mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (\varphi^*, 1_G)_G &= (\psi^G, 1_G)_G + \varphi(e) = -\varphi(e) + \varphi(e) = 0, \\ (\varphi^*, \varphi^*)_G &= 1 + \varphi(e)^2 - 2\varphi(e)^2 + \varphi(e)^2 = 1, \end{aligned}$$

Nach Ansatz ist ψ eine Differenz von Charakteren von H , also ist ψ^G eine Differenz von Charakteren von G , denn der Induzierungsprozess ist mit der Summe von Darstellungen bzw. Charakteren vertauschbar. Damit ist dann auch φ^* eine Differenz von Charakteren von G , also eine $\mathbb{Z}$ -Linearkombination irreduzibler Charaktere von G . Wegen der Orthonormalität der irreduziblen Charaktere und $(\varphi^*, \varphi^*)_G = 1$ muss $\pm\varphi^*$ ein irreduzibler Charakter von G sein, der wegen $(\varphi^*, 1_G)_G = 0$ nicht-trivial ist.

Nach Lemma (4.24) gilt für alle $h \in H$

$$\varphi^*(h) = \psi^G(h) + \varphi(e) = \psi(h) + \varphi(e) = \varphi(h), \text{ also } \varphi^*|_H = \varphi.$$

Insbesondere gilt $\varphi^*(e) = \varphi(e) > 0$, so dass φ^* irreduzibler Charakter von G ist (und nicht $-\varphi^*$). Insgesamt ist so zu jedem nicht-trivialen irreduziblen Charakter φ von H eine Fortsetzung zu einem nicht-trivialen Charakter φ^* von G konstruiert.

Wir definieren nun den Normalteiler $M \triangleleft G$ als Durchschnitt der Kerne

$$M = \bigcap_{\varphi \neq 1_H \text{ irr.}} \text{Ke } \varphi^* \triangleleft G.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h \in M \cap H &\implies \bigwedge_{\varphi \neq 1_H \text{ irr.}} \varphi(h) = \varphi^*(h) = \varphi^*(e) = \varphi(e) \\ &\implies h \in \bigcap_{\varphi \neq 1_H \text{ irr.}} \text{Ke } \varphi = \bigcap_{\varphi \text{ irr.}} \text{Ke } \varphi = \{e\}, \end{aligned}$$

denn nach Satz (3.13),c), p. 33, ist jeder Normalteiler, insbesondere $\{e\}$ Durchschnitt von Kernen irreduzibler Charaktere. Damit ist $M \cap H = \{e\}$ und nach Lemma (4.23),b) folgt dann $M \subseteq N$. Sei nun umgekehrt $\sigma \in N = (G \setminus H^G) \cup \{e\}$, $\sigma \neq e$. Dann gilt $\sigma^\tau \notin H$ für alle $\tau \in G$ und daher

$$\varphi^*(\sigma) = \varphi(e) + \psi^G(\sigma) = \varphi(e) + \frac{1}{\#H} \sum_{\tau \in G} \psi_0(\tau^{-1}\sigma\tau) = \varphi(e) = \varphi^*(e).$$

Das heißt, $\sigma \in \text{Ke } \varphi^*$ für alle irreduziblen $\varphi \neq 1_H$ und damit $\sigma \in M$, $N \subset M$. Insgesamt folgt $M = N$ und N ist Normalteiler von G . $\square$

§5 Zerfällungskörper

Es sei im Folgenden stets K ein Körper mit $\text{char } K = 0$. Die meisten Resultate gelten auch für $\text{char } K \nmid \#G$. Dann benötigt man zum Beweis aber den Gruppenring und Kenntnisse über seine Struktur, die hier nicht vorausgesetzt werden können.

a. Absolut irreduzible Darstellungen

Sei $D : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ eine (Matrix-)Darstellung der endlichen Gruppe G über K . Dann ist für jeden Oberkörper L von K D auch eine Darstellung über L :

$$D : G \rightarrow \text{GL}_n(K) \hookrightarrow \text{GL}_n(L).$$

Ob man D als K - oder L -Darstellung betrachtet, ist unbedeutend für die Abbildung D und für den Charakter χ_D , nicht aber für die Eigenschaften von Darstellungen, wie etwa Äquivalenz oder Irreduzibilität. Wir unterscheiden daher zwischen $D : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ und $D^L : G \rightarrow \text{GL}_n(L)$. Ebenso unterscheiden wir zwischen dem Charakter $\chi_D : G \rightarrow K$ von D und $\chi^L := \chi_{D^L} : G \rightarrow L$, die zwar als Abbildungen gleich sind, jedoch hinsichtlich Irreduzibilität unterschiedlich sein können. Wir sagen kurz “ χ ist ein K -Charakter”, wenn χ Charakter einer Darstellung über K ist. In diesem Sinne ist dann χ^L ein L -Charakter.

Spricht man von der Irreduzibilität von D bzw. D^L , so meint man damit

(A) D ist reduzibel $\iff D$ ist als K -Darstellung reduzibel $\iff$

$$\bigvee_{D_i : G \rightarrow \text{GL}_{n_i}(K)} \bigvee_{T \in \text{GL}_n(K)} \bigwedge_{\sigma \in G} D(\sigma) = T^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} D_1(\sigma) & * \\ \hline 0 & D_2(\sigma) \end{array} \right) \cdot T.$$

(B) D^L ist reduzibel $\iff D$ ist als L -Darstellung reduzibel $\iff$

$$\bigvee_{D_i: G \rightarrow \mathrm{GL}_{n_i}(L)} \bigvee_{T \in \mathrm{GL}_n(L)} \bigwedge_{\sigma \in G} D(\sigma) = T^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} D_1(\sigma) & * \\ \hline 0 & D_2(\sigma) \end{array} \right) \cdot T.$$

(A) und (B) unterscheiden sich somit an 2 Stellen:

- i) Man lässt in (B) als transformierende Matrizen T solche aus $\mathrm{GL}_n(L)$ zu.
- ii) Man lässt in (B) bei der Zerlegung von D Teildarstellungen D_i über L zu.

Wesentlich ist dabei ii). i) allein würde zu keinem neuen Begriff führen, denn es gilt

(5.1) Bemerkung: Sei K ein Körper mit $\mathrm{char} K = 0$, D_1, D_2 K -Darstellungen von G und $L|K$ eine Körpererweiterung. Dann gilt:

$$D_1 \text{ äquivalent } D_2 \iff D_1^L \text{ äquivalent } D_2^L.$$

Beweis: $\Rightarrow$ ist trivialerweise erfüllt. Sei umgekehrt $T \in \mathrm{GL}_n(L)$ mit $D_2^L(\sigma) = T^{-1} D_1^L(\sigma) T$ für alle $\sigma \in G$. Dann stimmen die Charaktere überein: $\chi_{D_1^L} = \chi_{D_2^L}$. Da aber D_i und D_i^L als Abbildungen identisch sind, gilt $\chi_{D_1} = \chi_{D_2}$, weshalb nach Satz (2.9), c), p. 18, D_1 und D_2 (als K -Darstellungen) äquivalent sind. $\square$

(5.2) Bemerkung: Ist D eine K -Darstellung von G und $L|K$ ein Oberkörper, so gilt

$$D \text{ reduzibel} \implies D^L \text{ reduzibel} \quad \text{bzw.} \quad D^L \text{ irreduzibel} \implies D \text{ irreduzibel}.$$

Die Umkehrungen gelten nicht allgemein.

Beweis: Gilt $D \sim D_1 \oplus D_2$ mit K -Darstellungen D, D_i , so folgt trivialerweise $D^L \sim D_1^L \oplus D_2^L$ und D^L ist reduzibel. Die zweite Behauptung ist die Kontraposition. Bleibt nur noch ein *Gegenbeispiel* anzugeben: Sei $G = \langle \sigma \rangle$ die zyklische Gruppe der Ordnung 3, $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ und

$$D : G \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die angegebene Matrix die Ordnung 3 hat, ist dadurch eine $\mathbb{R}$ -Darstellung D wohldefiniert. Wäre D reduzibel, so wäre nach dem Satz von Maschke (1.10), p. 11, $D(\sigma)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Wegen $D(\sigma)^3 = E_2$ Einheitsmatrix gilt $\lambda_i^3 = 1$ und wegen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dann $\lambda_i = 1$. $D(\sigma)$ wäre also ähnlich zur Einheitsmatrix und damit gleich der Einheitsmatrix, Wid.

Damit ist D eine irreduzible $\mathbb{R}$ -Darstellung von G . Aber über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$ muss $D^{\mathbb{C}}$ als 2-dimensionale Darstellung einer abelschen Gruppe reduzibel sein (siehe Korollar (2.15), p. 24). $\square$

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, unter welchen Bedingungen eine irreduzible Darstellung bei Erweiterung des Grundkörpers irreduzibel bleibt.

(5.3) Definition: Sei D eine Darstellung einer endlichen Gruppe über einem Körper K . Dann heißt D *absolut irreduzibel* genau dann, wenn für jeden Erweiterungskörper $L|K$ D^L irreduzibel ist.

Die nachfolgende Proposition zeigt nun den Zusammenhang dieses Begriffes mit einem für den Aufbau der Theorie in den Paragraphen §2 und §3 wichtigen, aber etwas sperrigen Konzept, der Schurbedingung (S_D) (siehe Def. (1.16), p. 14).

(5.4) Proposition: Sei K ein Körper mit $\text{char } K = 0$ und $D : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ eine Darstellung über K . Dann sind äquivalent:

- (i) D ist absolut irreduzibel.
- (ii) D^L ist irreduzibel für alle endlichen Körpererweiterungen $L|K$.
- (iii) D ist irreduzibel und K erfüllt die Schurbedingung (S_D) für D .
- (iv) $(\chi_D, \chi_D)_G = 1$ für den Charakter χ_D von D .
- (v) $D^{\tilde{K}}$ ist irreduzibel für die algebraisch abgeschlossene Hülle $\tilde{K}$ von K .

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) ist eine logische Abschwächung.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $D = D^K$ ist nach Voraussetzung irreduzibel. Bleibt für K die Schurbedingung (S_D) nachzuweisen. Sei also $A \in M_n(K)$ mit $D(\sigma)A = AD(\sigma)$ für alle $\sigma \in G$. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung, in der das charakteristische Polynom $P_A \in K[X]$ von A eine Wurzel und A damit einen Eigenwert $\lambda \in L$ hat. Dann ist $A - \lambda E_n \in \text{GL}_n(L)$ nicht regulär.

Andererseits gilt $(A - \lambda E_n)D^L(\sigma) = D^L(\sigma)(A - \lambda E_n)$, so dass wegen der Irreduzibilität von D^L aus dem Lemma von Schur (1.15), a), p. 13, folgt

$$A - \lambda E_n = 0 \implies \lambda E_n = A \in M_n(K).$$

Damit ist jedes derartige A eine Skalarmatrix λE_n , insbesondere $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A .

(iii) $\Rightarrow$ (iv): (2.5), c)

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Klar wegen $\chi_D = \chi_{D^{\tilde{K}}}$ und Satz (2.10).

(iv) $\Rightarrow$ (i): Seien $L|K$ eine beliebige Körpererweiterung und $\tilde{L}$ eine algebraisch abgeschlossene Hülle von L . Wegen $1 = (\chi_D, \chi_D)$ und $\chi_D = \chi_{D^{\tilde{L}}}$ folgt wieder aus Satz (2.10)

$$D^{\tilde{L}} = (D^L)^{\tilde{L}} \text{ irreduzibel} \xRightarrow{(5.2)} D^L \text{ irreduzibel.}$$

Dies gilt für jede Erweiterung $L|K$ und somit ist D absolut irreduzibel. □

Die Äquivalenz (iii) $\Leftrightarrow$ (i) von (5.4) bedeutet, dass in allen Resultaten der Paragraphen §2 und §3 die Forderung

D irreduzibel über K und K erfüllt die Schurbedingung (S_D) , p. 14,

ersetzt werden kann durch die begrifflich einfachere Bedingung

D absolut irreduzibel.

b. Zerfällungskörper

Auch die Bedingung

K erfüllt die Schurbedingung (S) für eine endliche Gruppe G

kann dann einfacher formuliert werden als

Alle irreduziblen Darstellungen von G über K sind absolut irreduzibel.

Diese Bedingung wollen wir in diesem Unterabschnitt genauer studieren.

(5.5) Definition: Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper mit $\text{char } K = 0$.

Dann heißt K *Zerfällungskörper* von G genau dann, wenn jede irreduzible Darstellung von G über K absolut irreduzibel ist.

(5.6) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\text{char } K = 0$.

Dann sind äquivalent:

- (i) K ist Zerfällungskörper für G .
- (ii) K erfüllt die Schurbedingung für G .
- (iii) G besitzt über K die maximale Anzahl $h = \#G$ von inäquivalenten irreduziblen Darstellungen $D_1, \dots, D_h$ und es gilt $\sum_{i=1}^h (\deg D_i)^2 \leq \#G$.
- (iv) Jede irreduzible Darstellung $\tilde{D} : G \rightarrow \text{GL}(\tilde{K})$ von G über dem algebraischen Abschluss $\tilde{K}$ ist bereits über K realisierbar, d. h. es gibt eine K -Darstellung $D : G \rightarrow \text{GL}_n(K)$ mit $\tilde{D} \sim D^{\tilde{K}}$.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) klar nach (5.4), (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar nach Satz (2.7), p. 17, und Korollar (2.14), p. 23, (sogar mit Gleichheit statt der Abschätzung).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Seien $D_1, \dots, D_h$ mit den Eigenschaften von (iii). Wir betrachten nun die $\tilde{K}$ -Darstellungen $H_i = D_i^{\tilde{K}}$ und ihre Zerlegungen in irreduzible $\tilde{K}$ -Darstellungen. Für $i \neq j$ gilt $D_i \not\sim D_j$ und daher $(\chi_{H_i}, \chi_{H_j})_G = (\chi_{D_i}, \chi_{D_j})_G \stackrel{(2.5), b)}{=} 0$. Also haben die verschiedenen H_i keinen irreduziblen Bestandteil gemeinsam, und da die Anzahl der H_i gleich der Maximalzahl h irreduzibler $\tilde{K}$ -Darstellungen (modulo Äquivalenz) ist, folgt:

$H_i = n_i \cdot F_i$ mit $n_i \geq 1$, $F_1, \dots, F_h$ sämtliche irreduzible $\tilde{K}$ -Darstellungen (modulo Äquivalenz).

Korollar (2.14) und Voraussetzung (iii) ergeben dann

$$\sum_{i=1}^h (\deg F_i)^2 \stackrel{(2.14)}{=} \#G \stackrel{(iii)}{\geq} \sum_{i=1}^h (\deg D_i)^2 = \sum_{i=1}^h n_i^2 (\deg F_i)^2.$$

und man erhält für jedes j

$$\sum_{i=1}^h (\deg F_i)^2 \geq n_j^2 \cdot (\deg F_j)^2 + \sum_{i \neq j} (\deg F_i)^2 \iff (\deg F_j)^2 \geq n_j^2 \cdot (\deg F_j)^2 \iff n_j = 1.$$

Damit ist jede irreduzible $\tilde{K}$ -Darstellung F äquivalent zu einem $F_i = H_i = D_i^{\tilde{K}}$ mit einer K -Darstellung D_i .

(iv) $\Rightarrow$ (i): Seien D_i ($i = 1, \dots, h$) mit $h = \#G$ inäquivalente irreduzible $\tilde{K}$ -Darstellungen und nach Voraussetzung (iv) F_i K -Darstellungen mit $D_i \sim F_i^{\tilde{K}}$. Dann sind $F_1, \dots, F_h$ inäquivalente irreduzible K -Darstellungen. Nach Satz (2.8), p. 18, sind dies dann *sämtliche* irreduziblen K -Darstellungen (modulo Äquivalenz) und sie sind absolut irreduzibel, da $F_i^{\tilde{K}} \sim D_i$ über $\tilde{K}$ irreduzibel sind. $\square$

Aussage (iv) lässt sich noch wie folgt verschärfen:

(5.7) Korollar: Jede Darstellung einer endlichen Gruppe G über einem Körper k der Charakteristik 0 lässt sich über jedem Zerfällungskörper K für G realisieren. Das bedeutet:

Eigenschaft (iv) von Prop. (5.6) gilt für jeden Körper K der Charakteristik 0, nicht nur für $\tilde{K}$.

Beweis: O. E. sind K, k Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ und o. E. $\tilde{K}, \tilde{k}$ algebraisch abgeschlossene Hüllen, die $\tilde{\mathbb{Q}}$ enthalten. Da K und $\tilde{\mathbb{Q}}$ Zerfällungskörper sind, kann man über K bzw. $\tilde{\mathbb{Q}}$ vollständige Repräsentantensysteme irreduzibler Darstellungen von G (modulo Äquivalenz) D_i

bzw. F_i ($i = 1, \dots, h = \#[G]$) wählen, die dann über dem gemeinsamen Oberkörper $\tilde{K}$ zueinander äquivalent sein müssen: $D_i \sim F_i$ nach Umnummerierung. Zerlegt man eine k -Darstellung D über $\tilde{k}$ in die $\tilde{Q}$ -Darstellungen F_i , so erhält man

$$D \sim \bigoplus_i n_i F_i \sim \bigoplus_i n_i D_i \text{ } K\text{-Darstellung.}$$

Etwas lax formuliert besagen diese Charakterisierungen, dass über einem Zerfällungskörper die größte Zahl von inäquivalenten irreduziblen Darstellungen existiert ((iii)). Zugleich lassen sich über einem Zerfällungskörper alle Darstellungen von G realisieren (modulo Äquivalenz) (Korollar (5.7)).

Es ist klar, dass algebraisch abgeschlossene Körper Zerfällungskörper sind (siehe (iv) oder (ii) und die Definition der Schurbedingung (S), p. 14) und jeder Oberkörper eines Zerfällungskörper wieder einer ist (siehe (iii)).

Aber wie groß muss ein Zerfällungskörper sein? Zumindest muss man nicht unbedingt bis zum algebraischen Abschluss gehen. Es gilt

(5.8) Proposition: Sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper mit $\text{char } k = 0$. Dann existiert eine endliche Erweiterung $K|k$, so daß K ein Zerfällungskörper für G ist.

Insbesondere gibt es zu jeder endlichen Gruppe G einen endlich algebraischen Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ (einen sog. algebraischen Zahlkörper), über dem jede Darstellung von G realisierbar ist.

Beweis: Es sei $D_1, \dots, D_h$ ein vollständiges System inäquivalenter irreduzibler (Matrix-)Darstellungen von G über dem algebraischen Abschluss $\tilde{k}$ von k .

Wir definieren nun K als den von allen Matrixeinträgen aller $D_i(\sigma)$ ($1 \leq i \leq h, \sigma \in G$) über k erzeugten Erweiterungskörper $K|k$. Wegen $K \subset \tilde{k}$ ist $K|k$ algebraisch, und da G endlich ist, auch endlich erzeugt, also $(K : k) < \infty$.

Damit ist jede irreduzible $\tilde{k}$ -Darstellung D äquivalent zu einem $D_i = F_i^{\tilde{k}}$ mit einer K -Darstellung F_i und folglich ist nach Satz (5.6) K ein Zerfällungskörper für G .

Der Zusatz ist nichts anderes als der Spezialfall $k = \mathbb{Q}$ verbunden mit Korollar (5.7). □

c. Die Sätze von Brauer

Ziel dieses Abschnittes ist ein Resultat von R. Brauer, das für beliebige Gruppen einen konkreten algebraischen Zahlkörper als Zerfällungskörper bestimmt. Dieses Ergebnis beruht allerdings auf einem fundamentalen Satz von Brauer, den wir hier leider nicht beweisen können.

(5.9) Definition: a) Eine Gruppe heißt *elementar*, wenn sie direktes Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer p -Gruppe, p eine Primzahl, ist.

b) Eine Darstellung einer Gruppe heißt *monomial*, wenn sie induziert wird von einer eindimensionalen Darstellung einer Untergruppe.

(5.10) Bemerkung: a) Elementare Gruppen sind nilpotent.

b) Nilpotente Gruppen sind sog. M -Gruppen, d. h. jede irreduzible Darstellung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit $\text{char } K \nmid \#G$ ist monomial.

Beweis: a) Als direktes Produkt nilpotenter Gruppen sind elementare Gruppen nilpotent.

b) Siehe [7] Huppert: Endliche Gruppen I. Satz V.18.5 b).

(5.11) Satz: (R. Brauer) Sei G eine endliche Gruppe.

a) Ist χ ein $\mathbb{C}$ -Charakter von G , so existieren elementare Untergruppen $H_i \leq G$, eindimensionale Charaktere $\lambda_i : H_i \rightarrow \mathbb{C}^\times$ und $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, r$) mit

$$\chi = \sum_{i=1}^r a_i \lambda_i^G$$

- b) (“Charakterisierung der Charaktere”) Eine Klassenfunktion $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist Differenz zweier Charaktere von G (ein sog. virtueller Charakter) genau dann, wenn für alle elementaren Untergruppen $H \leq G$ die Einschränkung $\psi|_H$ ein virtueller Charakter von H ist.

Zum Beweis siehe Dornhoff: *Group Representation Theory*, Theorem 16.2.

Aus diesem Satz können wir nun ein weiteres Resultat von R. Brauer ableiten, nämlich den folgenden Satz über Zerfällungskörper:

(5.12) Satz: (R. Brauer)

Ist G eine endliche Gruppe vom Exponenten m , so ist der Einheitswurzelkörper $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ Zerfällungskörper für G .

Beweis: Wir verwenden Satz (5.6), p. 63, und weisen Eigenschaft (iv) für K nach. Sei also $D : G \rightarrow \text{GL}_n(\tilde{K})$ eine irreduzible Darstellung von G und $\chi : G \rightarrow \tilde{K} \subset \mathbb{C}$ ihr Charakter. Nach Brauers Resultat (5.11),a) hat χ eine Darstellung $\chi = \sum_{i=1}^r a_i \lambda_i^G$ mit eindimensionalen Charakteren λ_i elementarer Untergruppen $H_i \leq G$ und $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, r$). Da eindimensionale Charaktere Homomorphismen $\lambda_i : H_i \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sind und $\exp H_i \mid \exp G = m$ gilt, ist $\lambda_i(H_i) \subset \mathbb{Q}(\zeta_m) = K$. Daher sind λ_i und dann auch die Induzierten λ_i^G K -Charaktere. Wir zerlegen nun χ als Differenz von K -Charakteren

$$\chi = \psi_+ - \psi_- \quad \text{mit} \quad \psi_+ = \sum_{a_i > 0} a_i \lambda_i^G, \quad \psi_- = \sum_{a_i < 0} |a_i| \lambda_i^G,$$

wobei $\psi_- = 0$ zugelassen ist. Unter allen derartigen Zerlegungen $\chi = \psi_1 - \psi_2$ mit K -Charakteren ψ_i oder $\psi_2 = 0$ wählen wir eine mit *minimalem* $\psi_2(e_G) \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun, dass $\psi_2(e_G) = 0$ und damit ψ_2 kein Charakter, sondern $\psi_2 = 0$ ist, folglich $\chi = \psi_1$ ein K -Charakter und $D \sim F^K$ mit einer K -Darstellung F .

Annahme: $\psi_2(e_G) > 0$ und daher ψ_2 ein K -Charakter. Wähle nun einen irreduziblen Bestandteil φ von ψ_2 , also φ ein K -Charakter und $(\varphi, \psi_2)_G > 0$. Dann folgt

$$(\varphi, \psi_1)_G = (\varphi^{\mathbb{C}}, \psi_1^{\mathbb{C}})_G = \underbrace{(\varphi^{\mathbb{C}}, \chi)_G}_{\geq 0} + \underbrace{(\varphi^{\mathbb{C}}, \psi_2^{\mathbb{C}})_G}_{> 0} > 0,$$

also ist φ ein irreduzibler Bestandteil von ψ_1 und daher

$$\psi_1 = \varphi + \psi'_1, \quad \psi_2 = \varphi + \psi'_2 \quad \text{mit} \quad \psi'_i \text{ } K\text{-Charaktere oder } \psi'_i = 0.$$

Wir erhalten so

$$\chi = \psi_1 - \psi_2 = \psi'_1 - \psi'_2.$$

Nun gilt $\psi'_1(e_G) = \chi(e_G) + \psi'_2(e_G) \geq \chi(e_G) > 0$, also ist ψ'_1 ein K -Charakter und $\psi'_2(e_G) = \psi_2(e_G) - \varphi(e_G) < \psi_2(e_G)$, im Widerspruch zur Minimalität von $\psi_2(e_G)$.

Damit folgt: $\psi_2 = 0$ und $\chi = \psi_1$ mit einem K -Charakter ψ_1 . Ist F_1 die Darstellung von G über K mit Charakter ψ_1 , so folgt $D \sim F_1^{\mathbb{C}}$. Also gilt Eigenschaft (iv) von Satz (5.6) und $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ ist Zerfällungskörper für G . $\square$

Es sei angemerkt, dass für Körper K positiver Charakteristik schärfer gilt:

(5.13) Satz: Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\text{char } K \neq 0$. Ist D eine Darstellung über K und hat ihr Charakter Werte in einem Teilkörper $k \subset K$: $\chi_D(G) \subset k$, so ist D über k realisierbar, d. h. es existiert eine Darstellung F über k mit $D \sim F^K$.

Zum Beweis siehe Isaacs: *Character theory of finite groups*, Thm. 9.16/9.23.

d. Der Schurindex

Während in Satz (5.12) für eine Gruppe G ein Zerfällungskörper bestimmt wird, also ein Körper über dem sich *jede* absolut irreduzible Darstellung von G realisieren lässt, soll in diesem Abschnitt die Frage beleuchtet werden, über welchem Körper eine einzelne vorgegebene Darstellung realisiert werden kann.

(5.14) Proposition: Sei $K|k$ eine Körpererweiterung mit $(K : k) < \infty$. Für einen K -Charakter χ von G sei $k(\chi) := k(\chi(G))$ der Wertekörper von χ über k . Dann gilt:

$$(K : k(\chi)) \cdot \chi \text{ ist ein } k(\chi)\text{-Charakter von } G.$$

Beweis: Sei $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ eine Darstellung von G über K mit Charakter χ . Wir setzen $L := k(\chi) \subseteq K$ und $m = (K : L) \in \mathbb{N}_+$. Dann ist V natürlich ein L -Vektorraum der Dimension $\dim_L(V) = (K : L) \cdot \dim_K(V)$, denn

$$V = \bigoplus_{i=1}^n K v_i = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{\nu=1}^m L \underbrace{a_\nu v_i}_{=: w_{\nu i}}$$

mit einer K -Basis $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ von V , einer L -Basis $(a_j)_{1 \leq j \leq m}$ von K und der sich daraus ergebenden L -Basis $(a_\nu v_i)_{\nu i}$ von V mit der Länge mn . Da jeder K -Automorphismus von V natürlich auch L -Automorphismus ist: $\text{Aut}_K(V) \leq \text{Aut}_L(V)$, ist jede K -Darstellung $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ auch eine L -Darstellung $\tilde{D} : G \rightarrow \text{Aut}_L(V)$ mit dem Grad $\deg \tilde{D} = m \cdot \deg D$. Wir zeigen nun:

$$\tilde{\chi} := \chi_{\tilde{D}} = m \cdot \chi.$$

Wir berechnen dazu für beliebiges $\sigma \in G$

$$\begin{aligned} D(\sigma)(v_j) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\alpha_{ij}}_{\in K} v_i, \quad \chi(\sigma) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \in K. \\ \tilde{D}(\sigma)(a_\mu v_j) &\underset{a_\mu \in K}{=} a_\mu \cdot D(\sigma)(v_j) = a_\mu \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} \cdot a_\mu) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\nu=1}^m \underbrace{\beta_{ij, \nu \mu}}_{\in L} a_\nu \right) v_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^m \beta_{ij, \nu \mu} (a_\nu v_i). \end{aligned}$$

Dabei ist $A := (\alpha_{ij}) \in \text{GL}_n(K)$ die Matrix von $D(\sigma)$ bzgl. der K -Basis (v_i) von V , die $B_{ij} := (\beta_{ij, \nu \mu})_{\nu \mu} \in M_m(L)$ sind die Matrizen der Linksmultiplikationen $\alpha_{ij} \cdot \dots : K \rightarrow K$ bzgl. der L -Basis (a_ν) und die obige Rechnung zeigt dann:

$C := (\beta_{ij, \nu \mu})_{i \nu, j \mu} \in \text{GL}_{nm}(L)$ ist die Matrix von $\tilde{D}(\sigma)$ bzgl. der L -Basis $(a_\nu v_i)_{i \nu}$ von V

Die Matrix $C \in \text{GL}_{nm}(L)$ entsteht, indem man in der Matrix $A \in \text{GL}_n(K)$ jeden Eintrag $\alpha_{ij} \in K$ ersetzt durch die Matrix $B_{ij} \in M_m(L)$:

$$C = \begin{bmatrix} \overline{B_{11}} & \cdots & \overline{B_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{B_{n1}} & \cdots & \overline{B_{nn}} \end{bmatrix} \in \text{GL}_n(M_m(L)) \leq \text{GL}_{nm}(L)$$

Wir erhalten so

$$\tilde{\chi}(\sigma) = \text{Tr } \tilde{D}(\sigma) = \text{Tr } C = \sum_{i=1}^n \text{Tr } B_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^m \beta_{ii, \mu \mu} \in L$$

Andererseits gilt für alle μ

$$\underbrace{\chi(\sigma)}_{\in k(\chi)=L} \cdot a_\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \cdot a_\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^m \beta_{ii, \nu \mu} a_\nu = \sum_{\nu=1}^m \underbrace{\sum_{i=1}^n \beta_{ii, \nu \mu}}_{\in L} \cdot a_\nu,$$

woraus durch Koeffizientenvergleich (bzgl. der L -Basis $(a_\nu)_\nu$ von K) folgt

$$\bigwedge_{\mu=1}^m \chi(\sigma) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii,\mu\mu} \implies \tilde{\chi}(\sigma) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_{ii,\mu\mu} = m \cdot \chi(\sigma).$$

Damit ist $(K : k(\chi)) \cdot \chi$ gleich dem $k(\chi)$ -Charakter $\tilde{\chi}$, womit die Proposition bewiesen ist. $\square$

(5.15) Definition: Sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper mit $\text{char } k = 0$, χ ein Charakter von G über einem Erweiterungskörper von k . Dann definieren wir den *Schurindex* von χ über k

$$s_k(\chi) := \min\{m \in \mathbb{N}_+ \mid m\chi \text{ ist ein } k(\chi)\text{-Charakter von } G\}$$

Rechtfertigung: Sei χ ein Charakter von G über L , $k \subset L$. Nach Prop. (5.8), p. 64, gibt es einen Zerfällungskörper K für G mit $(K : k) < \infty$. Nach Korollar (5.7) ist dann χ Charakter einer K -Darstellung von G und nach Prop. (5.14) existiert ein $m \in \mathbb{N}_+$, nämlich $m = (K : k(\chi))$, so dass $m\chi$ ein $k(\chi)$ -Charakter ist. Also existiert auch das kleinste derartige m und der Schurindex $s_k(\chi)$ ist wohldefiniert.

(5.16) Proposition: Sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper mit $\text{char } k = 0$, χ ein Charakter von G über einem Erweiterungskörper $K|k$. Ist χ irreduzibel, so gilt für den Schurindex $s_k(\chi)$:

- a) $s_k(\chi) \cdot \chi$ ist irreduzibler $k(\chi)$ -Charakter von G .
- b) $s_k(\chi) = \text{ggT}\{m \in \mathbb{N}_+ \mid m\chi \text{ ist ein } k(\chi)\text{-Charakter von } G\}$

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$(*) \quad \chi \text{ irreduzibel und } m\chi \text{ } k(\chi)\text{-Charakter} \implies \bigvee_{r|m} \varphi = r\chi \text{ irreduzibler } k(\chi)\text{-Charakter.}$$

Sei $L = k(\chi)$ und φ ein L -irreduzibler Bestandteil von $m\chi$. Dann gilt $m\chi = r\varphi + \psi$ mit $r \in \mathbb{N}_+$ und $\psi = 0$ oder einem L -Charakter ψ , der φ nicht enthält, also mit $(\varphi, \psi)_G = 0$. Dann gilt über dem Körper K

$$m\chi = m\chi^K = r\varphi^K + \psi^K \xRightarrow{\chi \text{ irr}} \bigvee_{a,b \in \mathbb{N}_+} \varphi^K = a\chi \wedge \psi^K = b\chi$$

und daraus folgt der Widerspruch

$$0 = (\varphi, \psi)_G = ab(\chi, \chi)_G \neq 0, \text{ Wid.}$$

Also gilt $\psi = 0$ und daher $m\chi = r\varphi$ mit einem irreduziblen L -Charakter $\varphi = a\chi$. Wegen der Irreduzibilität von χ folgt weiter

$$m\chi = r\varphi = ra\chi \implies m = ra \implies r \mid m.$$

Wir folgern nun a) und b) aus (*). Wendet man (*) auf den Schurindex $s := s_k(\chi)$ an, so erhält man die Existenz eines $t \mid s$ mit $t\chi$ irreduzibler $k(\chi)$ -Charakter. Wegen der Minimalität von s muss $t = s$ sein und daher ist $s\chi$ ein irreduzibler $k(\chi)$ -Charakter, also gilt a).

Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und $m\chi$ L -Charakter. Dann gilt nach (*) $m\chi = \frac{m}{r}\varphi$ und $m\chi$ enthält nur einen irreduziblen Bestandteil φ über L . Nun ist nach b) $s\chi$ ein irreduzibler L -Charakter und es gilt

$$(m\chi, s\chi) = ms(\chi, \chi) \neq 0,$$

also ist $s\chi$ der eindeutig bestimmte irreduzible Bestandteil φ von $m\chi$ über L :

$$m\chi = r\varphi = r(s\chi) \implies m = rs \implies s \mid m.$$

Also teilt der Schurindex s jedes derartige m und es folgt b). $\square$

§6 Abschließende Bemerkungen

Wir möchten hier zum Abschluss nur kurz die Brücke schlagen zur erwähnten Theorie der halbeinfachen Algebren, in die sich die Darstellungstheorie einordnet und die dann zu tiefergehenden Resultaten führt.

a. Die Gruppenalgebra

(6.1) Definition: Ist K ein Körper, so definiert man für eine endliche Gruppe G die Gruppenalgebra $K[G]$ über K durch:

Als K -Vektorraum sei $K[G] = \bigoplus_{\sigma \in G} K\sigma$ von der Dimension $\#G$ (mit Basis G). Die Algebrenmultiplikation auf $K[G]$ wird durch distributive Fortsetzung der Gruppenmultiplikation erklärt:

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in G} b_{\tau} \tau \right) = \sum_{\sigma \in G} \sum_{\tau \in G} a_{\sigma} b_{\tau} \sigma \tau = \sum_{\rho \in G} \left(\sum_{\substack{\sigma, \tau \in G \\ \sigma \tau = \rho}} a_{\sigma} b_{\tau} \right) \cdot \rho = \sum_{\rho \in G} \left(\sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} b_{\sigma^{-1} \rho} \right) \cdot \rho.$$

(6.2) Proposition: Es bestehen natürliche Bijektionen zwischen

- (1) Darstellungen von G in K -Vektorräumen V ,
d. h. Gruppenhomomorphismen $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$.
- (2) Darstellungen der Gruppenalgebra $K[G]$,
d. h. K -Algebrenhomomorphismen $\tilde{D} : K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$,
- (3) $K[G]$ -Moduln V .

Dabei ist jeweils V als K -Vektorraum $\neq 0$ und endlich dimensional.

Beweis: (1)→(2): Sei $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ eine Darstellung von G über K . Da G eine Basis des K -Vektorraums $K[G]$ ist, besitzt die Abbildung $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V) \hookrightarrow \text{End}_K(V)$ genau eine Fortsetzung zu einem K -Homomorphismus $\tilde{D} : K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$. Da D ein Gruppenhomomorphismus ist und die Algebrenmultiplikation in $K[G]$ vermöge der Gruppenmultiplikation von G definiert ist, wird $\tilde{D} : K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$ ein Homomorphismus von K -Algebren.

(2)→(3): Ist $\tilde{D} : K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$ ein Algebrenhomomorphismus, so wird V durch folgende Definition ein $K[G]$ -Modul:

$$K[G] \times V \rightarrow V, (a, v) \mapsto a.v := \tilde{D}(a)(v).$$

(3)→(2): Ist V ein $K[G]$ -Modul, so erhält man umgekehrt einen K -Algebrenhomomorphismus durch

$$\tilde{D} : K[G] \rightarrow \text{End}_K(V), a \mapsto a \cdot (\dots).$$

(2)→(1): Ist $\tilde{D} : K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$ ein Algebrenhomomorphismus, so ist $D = \tilde{D}|_G : G \rightarrow \text{End}_K(V)$ multiplikativ und wegen $D(e_G) = \tilde{D}(1_{K[G]}) = \text{id}_V$ sowie $D(\sigma) \circ D(\sigma^{-1}) = D(e_G) = \text{id}_V = D(\sigma^{-1}) \circ D(\sigma)$ folgt: $D(G) \subset \text{Aut}_K(V)$ und $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ Gruppenhomomorphismus.

(6.3) Beispiel: $K[G]$ ist vermöge der Algebrenmultiplikation ein $K[G]$ -Modul endlicher Dimension über K . Dieser bestimmt also eine Darstellung von G über K , und zwar $V = K[G]$ und $D : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$, $\sigma \mapsto \sigma \cdot (\dots)$. $V = K[G]$ besitzt die K -Basis $(\tau \mid \tau \in G)$ und auf dieser operiert D durch $D(\sigma)(\tau) = \sigma \cdot \tau$. D ist also die reguläre Darstellung von G über K (siehe Bemerkung (1.5), p. 8).

(6.4) Proposition: Bei der Bijektion $(1) \leftrightarrow (3)$ in Prop. (6.2) entsprechen einander die folgenden Begriffe:

- a) (i) Äquivalenz von Darstellungen über K
(ii) Isomorphie von $K[G]$ -Moduln
- b) (i) Teildarstellungen
(ii) $K[G]$ -Untermoduln
- c) direkte Summen von Darstellungen bzw. von $K[G]$ -Moduln
- d) (i) irreduzible Darstellungen
(ii) einfache $K[G]$ -Moduln, d. h. Moduln ohne echte Untermoduln $\neq 0$

Beweis: Klar

Damit ist die Darstellungstheorie endlicher Gruppen in die Theorie der Algebren eingeordnet. In diesem Rahmen werden die Resultate strukturell übersichtlicher und in einen weiteren Kontext gestellt. So erhält man etwa die folgende allgemeinere Version des Lemmas von Schur:

(6.5) Lemma von Schur: Seien A ein unitärer Ring und V, W einfache A -Moduln. Dann gilt

- a) $\text{Hom}_A(V, W) = \{0\}$, falls $V \not\cong W$.
- b) $\text{End}_A(V)$ ist ein Divisionsring.

Beweis: Ist $f : V \rightarrow W$ ein A -Modulhomomorphismus, so ist $\text{Ker } f$ ein Untermodul des einfachen Moduls V , also $\text{Ker } f = \{0\}$ und f injektiv, oder $\text{Ker } f = V$ und $f = 0$. Genauso argumentiert man für das Bild: $\text{Im } f = \{0\}$ und $f = 0$, oder $\text{Im } f = W$ und f surjektiv. Ist also $f \neq 0$, so ist $f : V \xrightarrow{\sim} W$ ein Isomorphismus (und es gilt a)) und im Falle $V = W$ eine Einheit in $\text{End}_A(V) = \text{Hom}_A(V, V)$ (und es gilt b)). $\square$

Angewendet auf eine Gruppenalgebra $A = K[G]$ ergibt dies genau das Lemma von Schur (1.15),a) für Gruppendarstellungen.

b. Halbeinfache Ringe

Will man auch den fundamentalen Satz von Maschke (1.10), p. 11, in diesen Rahmen stellen, so kommt man zum Konzept der halbeinfachen Ringe.

(6.6) Definition: Sei A ein unitärer Ring. Ein A -Modul V heißt *halbeinfach* (oder vollständig reduzibel) genau dann, wenn $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ direkte Summe einfacher Untermoduln ist.

(6.7) Lemma: Ist A ein unitärer Ring und V ein A -Modul, so gilt:

- a) Es sind äquivalent:
 - (i) V ist halbeinfach.
 - (ii) V ist Summe von einfachen Moduln: $V = \sum_{i \in I} V_i$.
 - (iii) Für alle A -Untermoduln $W \leq V$ existiert ein A -Modul W' mit $W \oplus W' = V$.
- b) Unter- und Faktormoduln halbeinfacher Moduln sind selbst halbeinfach.

Beweis: Siehe [3] Dornhoff: *Group representation theory*

(6.8) Definition: Ein Ring A heißt *halbeinfach*, wenn A als A -Modul halbeinfach ist.

(6.9) Lemma: Ein unitärer Ring A ist genau dann halbeinfach, wenn jeder A -Modul V halbeinfach ist.

Beweis: Klar nach Lemma (6.7),b), da jeder Modul V epimorphes Bild eines freien Moduls $\bigoplus_{i \in I} A$ ist.

(6.10) Satz: (Maschke) Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper. Dann sind äquivalent:

(i) $K[G]$ ist eine halbeinfache K -Algebra.

(ii) $\text{char } K \nmid \#G$.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar nach dem Satz von Maschke (1.10) unter Beachtung der vorangehenden Resultate.

(i) $\Rightarrow$ (ii): O. E. sei $\#G > 1$. Wir setzen $e := \sum_{\sigma \in G} \sigma \in K[G]$ und $V := K.e$. Wegen $\tau e = e = e\tau$ für alle $\tau \in G$ ist $V = K.e$ ein (beidseitiges) Ideal in $K[G]$ und $(0) \neq V \neq K[G]$.

Nach (i) ist $V = K.e$ direkter Summand in $K[G]$: $K.e \oplus W = K[G]$ mit einem $K[G]$ -Linksideal W . Dann folgt $1_{K[G]} = \alpha.e + w$ mit $\alpha \in K$, $w \in W$ und damit $0 \neq e = \alpha e^2 + ew = \alpha e^2$, denn $ew \in W \cap V = \{0\}$. Also folgt

$$0 \neq e^2 = \left(\sum_{\sigma} \sigma \right) \left(\sum_{\tau} \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau} \sigma \tau = \sum_{\rho} \left(\sum_{\sigma} \underbrace{\#\{\tau \mid \sigma \tau = \rho\}}_{=1} \right) \cdot \rho = \sum_{\rho} \#G \cdot 1_K \cdot \rho = \#G \cdot 1_K \cdot e$$

Es ist also $\#G \cdot 1_K \neq 0_K$ und damit $\text{char } K \nmid \#G$. □

Damit ist nun die Darstellungstheorie endlicher Gruppen, wie wir sie in dieser Vorlesung elementar entwickelt haben, Teil der Theorie der halbeinfachen Ringe.

Literaturhinweise

- [1] W. Burnside:
Theory of groups of finite order,
Cambridge Univ. Press 1911
- [2] C. W. Curtis, I. Reiner:
Representation theory of finite groups and associative algebras,
Interscience Publ., London 1962
- [3] L. Dornhoff:
Group representation theory, Part A,B.
Marcel Dekker, New York 1971
- [4] W. Feit:
Characters of finite groups,
Benjamin, New York 1967
- [5] D. Gorenstein:
Finite groups,
Harper&Row, London 1968
- [6] M. Hall:
The theory of groups,
Macmillan Group, New York 1959
- [7] B. Huppert:
Endliche Gruppen I,
Springer, Berlin 1967
- [8] I. M. Isaacs:
Character theory of finite groups,
Academic Press, London 1976
- [9] R. Keown:
An introduction to group representation,
Academic Press, London 1975
- [10] S. Lang:
Algebra,
Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1967
- [11] W. Ledermann:
Introduction to group characters,
Cambridge Univ. Press 1977
- [12] I. Reiner (Hrsg.):
Representation theory of finite groups and related topics,
Proc. Symp. Pure Math. XXI, AMS Providence (Rhode Island) 1971
- [13] P. Ribenboim:
Linear representation of finite groups, Queen's Univ., Kingston (Ontario) 1966
- [14] J. P. Serre:
Représentations linéaires des groupes finis,
Hermann, Paris 1967 (Dt. Übersetzung bei vieweg 1972)