Einführung in die Mathematik

Übungen 1. Semester

Dr. Norbert Klingen, Köln-Kolleg

23. März 2003

Inhaltsverzeichnis

1a Mathematik (Kg) **12. Februar 2002**

Übungen (1)

1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Teilbarkeitskriterien möglichst viele Teiler der nachfolgenden Zahlen. Von welchen Zahlen können Sie ausschließen, dass sie Teiler sind?
$a = 553\,637\,225\,625$, $b = 456\,377\,651\,976$, $c = 239\,598\,267\,287\,400$.

2) Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen als Produkte von Potenzen mit möglichst kleinen Basen dar:
$a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5$, $b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3$, $c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5$, $d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2$.
Stellen Sie fest, welche Teilbarkeiten zwischen diesen Zahlen bestehen.

3) Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlen Potenzen sind. Mit welcher Basis und welchem Exponenten?
$a = 14^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 6^6 \cdot 21^3$, $b = 49^2 \cdot 51^3 \cdot 75 \cdot 17 \cdot 5^2$, $c = 10^4 \cdot 22^5 \cdot 80 \cdot 2^2$.

4) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen der folgenden natürlichen Zahlen:

$a = 198$	$b = 544$	$c = 1024$
$d = 2160$	$e = 24750$	$f = 26 \cdot 13^2 \cdot 98 \cdot 170$
$g = 25^4 \cdot 16^2$	$h = 39^3 \cdot 37^4 \cdot 27^5$	

5) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von

a) 27, 39	b) 10000, 500	c) 17, 3433
d) 6, 8, 12	e) 9, 30, 50	f) 34, 85, 153
g) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 11$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 13$	h) $6^3 \cdot 28$, $21^2 \cdot 27$	i) $25^3 \cdot 27$, $32 \cdot 18$

6) Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von

a) 12, 8	b) 18, 24	c) 12, 20, 30
d) 2, 3, 4, 5, 6	e) 39, 34	f) 16, 25
g) $2^3 \cdot 3 \cdot 17$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$	h) $17 \cdot 39$, $34 \cdot 26$	i) $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^8$, $3^{12} \cdot 5^{12}$

7) Gegeben sind drei natürliche Zahlen in dualer Darstellung:
$a = 10101$, $b = 11111$, $c = 1000001$.
a) Berechnen Sie (durch schriftliche Rechnung im Dualsystem) $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
b) Stellen Sie alle 6 Zahlen a, b, c, d, e, f dezimal dar und überprüfen Sie Ihre Rechnungen.

8) Stellen Sie die folgenden (in üblicher dezimaler Form angegebenen) Zahlen dual dar:

a) 1 bis 9	b) 314	c) 128	d) 255	e) 1000
f) 500	g) 250	h) 13	i) 26	j) 52

9) a) Wandeln Sie die Zahlen $a, \ldots, f$ von Aufgabe 7) ins Hexadezimalsystem um. Überprüfen Sie in dieser neuen Darstellung die Beziehungen $d = b + c$, $e = c - a$ und $f = a \cdot b$.
b) Erläutern Sie die Vor- und Nachteile der Rechnungen *innerhalb* des Dual-, Dezimal- und Hexadezimalsystems.

Übungen (1) — Lösungen

1) a ist nicht durch 2 (oder irgendeine gerade Zahl) teilbar;
a ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (da die Quersumme durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist);
a ist durch 125 (und daher erst recht durch 25 und 5) teilbar, da die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl 625 durch 125 teilbar ist;
a ist durch 11 teilbar (da die Wechselsumme $5-2+6-5+2-2+7-3+6-3+5-5 = 11$ durch 11 teilbar ist).
b ist durch 8 teilbar (da $976 = 800 + 160 + 16$ durch 8 teilbar ist);
b ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (Quersumme 66);
b ist nicht durch 5 teilbar;
b ist nicht durch 11 teilbar (Wechselsumme 4).
c ist durch 8, 9 und 25 teilbar; c ist nicht durch 11 teilbar.

2) $a = 6^{10} \cdot 10^4 \cdot 15^5 = (2 \cdot 3)^{10} \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^{10+4} \cdot 3^{10+5} \cdot 5^{4+5} = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.
$b = 12^5 \cdot 24^7 \cdot 75^3 = (2^2 \cdot 3)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^7 \cdot (3 \cdot 5^2)^3 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^{21} \cdot 3^7 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^6$.
$c = 54^4 \cdot 48^5 \cdot 250^5 = (2 \cdot 3^3)^4 \cdot (2^4 \cdot 3)^5 \cdot (2 \cdot 5^3)^5 = 2^{4+20+5} \cdot 3^{12+5} \cdot 5^{15} = 2^{29} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$.
$d = 12^6 \cdot 15^7 \cdot 30^2 = (2^2 \cdot 3)^6 \cdot (3 \cdot 5)^7 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^9$.
Offenbar ist $d = a$, insbesondere teilen sich a und d *gegenseitig.*
a teilt c, weil die Exponenten in der Darstellung von a *sämtlich* kleiner oder gleich den entsprechenden Exponenten in der Darstellung von c sind. b ist weder Teiler noch Vielfaches einer der anderen Zahlen.

3) $a = 2^4 \cdot 7^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 7^{10} = 42^{10}$,
$b = 7^4 \cdot 3^3 \cdot 17^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 5^2 = 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 17^4 = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17)^4 = 1785^4$,
$c = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 11^5 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2^2 = 2^{15} \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 8^5 \cdot 5^5 \cdot 11^5 = 440^5$.
Die Frage, ob eine natürliche Zahl eine Potenz ist, kann man also an der Primzerlegung ablesen.

- Eine natürliche Zahl ist genau dann k-te Potenz einer natürlichen Zahl, wenn in ihrer Primzerlegung *alle* Exponenten Vielfache von k sind.

4) $a = 198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 9 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$,
$b = 544 = 4 \cdot 136 = 2^2 \cdot 2 \cdot 68 = 2^3 \cdot 4 \cdot 17 = 2^5 \cdot 17$,
$c = 1024 = 2^{10}$,
$d = 10 \cdot 216 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$,
$e = 10 \cdot 5 \cdot 495 = 2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 99 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$,
$f = 2 \cdot 13 \cdot 13^2 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 10 \cdot 17 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 7^2 \cdot 17$,
$g = (5^2)^4 \cdot (2^4)^2 = 5^8 \cdot 2^8$,
$h = (3 \cdot 13)^3 \cdot 37^4 \cdot (3^3)^5 = 3^{18} \cdot 13^3 \cdot 37^4$.

5) a) $\mathrm{ggT}(27, 39) = \mathrm{ggT}(3^3, 3 \cdot 13) = 3$.
b) $\mathrm{ggT}(10000, 500) = 500$.
c) $\mathrm{ggT}(17, 3433) = 1$, da 17 eine Primzahl ist und 3433 nicht teilt.
d) $\mathrm{ggT}(6, 8, 12) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 3, 2^3, 2^2 \cdot 3) = 2$.
e) $\mathrm{ggT}(9, 30, 50) = 1$, da $9 = 3^2$ und 3 kein Teiler von 50 ist.
f) $\mathrm{ggT}(34, 85, 153) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 17, 5 \cdot 17, 9 \cdot 17) = 17$.
g) $\mathrm{ggT}(2^4 \cdot 3^3 \cdot 11, 2^3 \cdot 3^4 \cdot 13) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.
h) $\mathrm{ggT}(6^3 \cdot 28, 21^2 \cdot 27) = \mathrm{ggT}(2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^3) = \mathrm{ggT}(2^5 \cdot 3^3 \cdot 7, 3^5 \cdot 7^2) = 3^3 \cdot 7 = 189$.
i) $\mathrm{ggT}(25^3 \cdot 27, 32 \cdot 18) = \mathrm{ggT}(5^6 \cdot 3^3, 2^5 \cdot 2 \cdot 3^2) = 3^2 = 9$.

6) a) $\mathrm{kgV}(12, 8) = \mathrm{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^3) = 2^3 \cdot 3 = 24$.
b) $\mathrm{kgV}(18, 24) = \mathrm{kgV}(2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
c) $\mathrm{kgV}(12, 20, 30) = \mathrm{kgV}(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
d) $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
e) $\mathrm{kgV}(39, 34) = 39 \cdot 34 = 1326$, da 39 und 34 keinen Primteiler gemeinsam haben (teilerfremd sind).
f) $\mathrm{kgV}(16, 25) = 16 \cdot 25 = 400$, da 16 und 25 teilerfremd sind.
g) $\mathrm{kgV}(2^3 \cdot 3 \cdot 17, 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 2040$.
h) $\mathrm{kgV}(17 \cdot 39, 24 \cdot 26) = \mathrm{kgV}(3 \cdot 13 \cdot 17, 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13) = 2^4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 10608$
i) $\mathrm{kgV}(2^{10} \cdot 3^3 \cdot 2^8 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = \mathrm{kgV}(2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^8, 3^{12} \cdot 5^{12}) = 2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12} = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot (2 \cdot 5)^{12} = 34012224 \cdot 10^{12} = 34012224000000000000$.

7) a) Bei der schriftlichen Addition bzw. Subtraktion im Dualsystem beachte man: $1 + 1 = 0$ mit *Übertrag* 1.

$d = b + c:$

$$\begin{array}{r} 11111 \\ +\ 1000001 \\ \hline 1100000 \end{array}$$

$e = c - a:$

$$\begin{array}{r} 1000001 \\ -\ 10101 \\ \hline 101100 \end{array}$$

$f = a \cdot b:$

$$\begin{array}{l} 11111 \cdot 10101 \\ \hline 11111 \\ \quad 11111 \\ \qquad 11111 \\ \hline 1010001011 \end{array}$$

b) Wir wandeln in dezimale Darstellung um:
$a = 10101 = 1 + 4 + 16 = 21$,
$b = 11111 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$,
$c = 1000001 = 1 + 64 = 65$,
$d = 1100000 = 32 + 64 = 96$ $(= b + c)$,
$e = 101100 = 4 + 8 + 32 = 44$ $(= c - a)$,
$f = 1010001011 = 1 + 2 + 8 + 128 + 512 = 651$ $(= a \cdot b)$.

8) a) $1 = 1$, $2 = 10$, $3 = 11$, $4 = 100$, $5 = 101$, $6 = 110$, $7 = 111$, $8 = 1000$, $9 = 1001$
b) Methode 1 – In Zweierpotenzen zerlegen:
$314 = 256 + 58 = 256 + 32 + 26 = 256 + 32 + 16 + 10 = 256 + 32 + 16 + 8 + 2 = 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 = 100111010$
Methode 2 – Halbieren mit Rest:

halbierte Zahlen	0 ←	1 ←	2 ←	4 ←	9 ←	19 ←	39 ←	78 ←	157 ←	314
Rest=Dualziffer		1	0	0	1	1	1	0	1	0

c) $128 = 10000000$
d) $255 = 11111111$
e) $1000 = 8 \cdot 125 = 1000 \cdot 1111101 = 1111101000$
f) $500 = 1000 : 2 = 1111101000 : 10 = 111110100$
g) $250 = 11111010$
h) $13 = 1101$
i) $26 = 13 \cdot 2 = 1101 \cdot 10 = 11010$
j) $52 = 110100$

9) a) Da die Basis des Hexadezimalsystems $16 = 2^4$ ist, kann man je 4 Dualziffern zu einer Hexadezimal-Ziffer zusammenfassen. (Man braucht also nur die Umwandlung von 4-stelligen Dualzahlen in Hexadezimalziffern zu beherrschen, etwa indem man eine Liste dafür anlegt.) Daher ist die Umwandlung zwischen diesen beiden Zahldarstellungen besonders einfach. (Dies ist der Grund dafür, dass in Computern über dem zugrundeliegenden Dualsystem meist mit Zahldarstellungen auf Zweierpotenz-Basis gearbeitet wird.)

Wir unterteilen also die Dualdarstellungen von $a, \ldots, f$ in Viererblöcke und wandeln diese in Hexadezimalziffern um:

$a = \mathsf{1\ 0101}$: $\mathsf{0101} = 1 + 4 = 5 = 5_{\mathrm{h}}$, also $a = 15_{\mathrm{h}}$,

$b = \mathsf{1\ 1111}$: $\mathsf{1111} = 15 = \mathrm{F}_{\mathrm{h}}$, also $b = 1\mathrm{F}_{\mathrm{h}}$,

$c = \mathsf{100\ 0001}$: $\mathsf{0001} = 1 = 1_{\mathrm{h}}$, $\mathsf{100} = 4 = 4_{\mathrm{h}}$, also $c = 41_{\mathrm{h}}$,

$d = b + c = 1\mathrm{F}_{\mathrm{h}} + 41_{\mathrm{h}} = 60_{\mathrm{h}}$,

$e = c - a = 41_{\mathrm{h}} - 15_{\mathrm{h}} = 2\mathrm{C}_{\mathrm{h}}$,

$f = a \cdot b = 15_{\mathrm{h}} \cdot 1\mathrm{F}_{\mathrm{h}}$. Um dies im Hexadezimalsystem berechnen zu können, muss man das ‘kleine Einmaleins’ für die hexadezimalen Ziffern aufstellen. So etwa benötigt man für die nebenstehende Rechnung: $5_{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{F}_{\mathrm{h}} = 5 \cdot 15 = 75 = 4 \cdot 16 + 11 = 4\mathrm{B}_{\mathrm{h}}$. Man erhält schließlich $f = 28\mathrm{B}_{\mathrm{h}}$. (Kontrolle: $f = 28\mathrm{B}_{\mathrm{h}} = 2 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 11 = 2 \cdot 256 + 128 + 11 = 512 + 139 = 651$.)

$$
\begin{array}{lllll}
1 & 5 & \cdot & 1 & \mathrm{F} \\
\hline
1 & 5 & & & \\
1 & 3 & \mathrm{B} & & \\
\hline
2 & 8 & \mathrm{B} & &
\end{array}
$$

b) Im Dualsystem haben die Zahlen viermal soviel Ziffern wie im Hexadezimalsystem, dafür ist aber die Addition und besonders die Multiplikation der Dualziffern wesentlich einfacher. So einfach, dass sie in einem Microprozessor realisiert werden können.

Übungen (2)

1) Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form:
   a) die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen,
   b) die Menge der zweistelligen durch sieben teilbaren Zahlen,
   c) die Menge T_{60} der Teiler von 60,
   d) die Menge der arabischen Ziffern,
   e) die Menge der Zweierpotenzen.
   Welche der Mengen sind endlich, welche unendlich?
2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft:
   a) $A = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$,
   b) $B = \{10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$,
   c) $C = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$,
   d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
   e) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$,
   f) $F = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
3) Es sei Q die Menge der Quadratzahlen und $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen.
   a) Geben Sie an, welche der folgenden Zahlen

   $$1\,,4\,,5\,,6\,,9\,,12\,,24\,,25\,,27\,,1234544554355$$

   zu diesen Mengen gehören und welche nicht. Verwenden Sie dabei die mathematischen Symbole $\in$ und $\notin$.
   b) Welche Zahlen gehören zu beiden Mengen?
4) Berechnen Sie:
   a) $(8-4)+(7-8)-(-6+9)$
   b) $(-3)(16-18)-(17-19)(-4)-(34-28)(22-28)$
   c) $(x-y)+(3x-7y)-(4x+5y)$
   d) $(-4x)\cdot 7x$
   e) $(-3x)\cdot 6y\cdot(-4x)$
   f) $(-x)(2x+y)+(3x-y)(-y)-(4x+4y)\cdot 6y$
5) a) Definieren Sie den Betrag $|x|$ einer Zahl x.
   Berechnen Sie:
   b) $|-7|$
   c) $|7-12|$
   d) $|(13-24)(7-12)|$
6) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   a) $(5x-6y)-(3x-7y)$
   b) $(3p-4q)-(-5p+7q)+(-9p-10q)$
   c) $8(7u-v)-12(4u-5v)$
   d) $-5r(6k-7r)-6k(-5r+6k)$

Übungen (2) — Lösungen

1) a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$,
b) $\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
c) $T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$,
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
e) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$.
Die Mengen unter a) und e) sind unendlich, die anderen endlich.

2) a) A ist die Menge der Vielfachen von 4.
b) B ist die Menge der Potenzen von 10.
c) C ist die Menge der durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen.
d) D ist die Menge der Teiler von 12.
e) E soll die Menge aller Primzahlen darstellen, und
f) F die Menge aller Quadrate von natürlichen Zahlen.

3) a) Von der letzten Zahl 1234544554355 abgesehen gilt:

$$1 \in Q\,, 4 \in Q\,, 5 \notin Q\,, 6 \notin Q\,, 9 \in Q\,, 12 \notin Q\,, 24 \notin Q\,, 25 \in Q\,, 27 \notin Q\,,$$
$$1 \notin \mathcal{P}\,, 4 \notin \mathcal{P}\,, 5 \in \mathcal{P}\,, 6 \notin \mathcal{P}\,, 9 \notin \mathcal{P}\,, 12 \notin \mathcal{P}\,, 24 \notin \mathcal{P}\,, 25 \notin \mathcal{P}\,, 27 \notin \mathcal{P}\,.$$

Schließlich gilt:

$$1234544554355 \notin Q\,,\ 1234544554355 \notin \mathcal{P}\,.$$

Zur Begründung: Diese Zahl ist offensichtlich durch 5 teilbar, aber von 5 verschieden, ist also keine Primzahl. Wäre sie eine Quadratzahl, so müßte sie nicht nur durch 5, sondern dann sogar durch 25 teilbar sein. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl nicht durch 25 teilbar ist. Also kann 1234544554355 keine Quadratzahl sein.
b) Keine. (Eine Quadratzahl kann keine Primzahl sein.)

4) a) $(8 - 4) + (7 - 8) - (-6 + 9) = 4 - 1 - 3 = 0$.
b) $(-3)(16 - 18) - (17 - 19)(-4) - (34 - 28)(22 - 28) =$
$= (-3)(-2) - (-2)(-4) - 6(-6) = 6 - 8 + 36 = 34$.
c) $(x - y) + (3x - 7y) - (4x + 5y) = x - y + 3x - 7y - 4x - 5y = -13y$.
d) $(-4x) \cdot 7x = -28x^2$.
e) $(-3x) \cdot 6y \cdot (-4x) = 72x^2y$.
f) $(-x)(2x + y) + (3x - y)(-y) - (4x + 4y) \cdot 6y =$
$= -2x^2 - xy - 3xy + y^2 - 24xy - 24y^2 = -2x^2 - 28xy - 23y^2$.

5) a) Anschaulich gesprochen ist der Betrag $|x|$ einer rationalen Zahl x der Abstand von der 0. Dies bedeutet, für positive Zahlen ist der Betrag gleich der Zahl selbst, während für negative Zahlen der Betrag genau die Gegenzahl ist: $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$.
b) $|-7| = 7$, c) $|7 - 12| = 5$, d) $|(13 - 24)(7 - 12)| = 55$.

6) a) $(5x - 6y) - (3x - 7y) = 2x + y$.
b) $(3p - 4q) - (-5p + 7q) + (-9p - 10q) =$
$= 3p - 4q + 5p - 7q - 9p - 10q = -p - 21q$.
c) $8(7u - v) - 12(4u - 5v) = 56u - 8v - 48u + 60v = 8u + 52v$.
d) $-5r(6k - 7r) - 6k(-5r + 6k) = -30kr + 35r^2 + 30kr - 36k^2 = 35r^2 - 36k^2$.

Übungen (3)

1) Schreiben Sie die folgenden Terme als Produkt, indem Sie 'ausklammern':
   a) $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 =$
   b) $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 =$
   c) $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b =$
   d) $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 =$
   e) $a(x-3) + b(x-3) =$
   f) $3(x-1)^2y - 9a(x-1)^3y + 6(x-1)^2y^3 =$
   g) $(u+v) - b(u+v) =$
   h) $a(x-y) + (x-y)^2 =$.
2) a) Formulieren Sie das Distributivgesetz.
   b) Folgern Sie daraus die Regel:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

   Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   c) $(2a+3b)(c+d) =$
   d) $(9x-5y)(7x-6y) =$
   e) $(x-4)(x-5) =$
   f) $(x+y)(x-y)(2x+y) =$
   g) $(2a-3b)(-2b-3a) =$
   h) $(4b^2-3b)(b-2b^2) =$
   i) $(9x-5y)(7y-6x) =$
   j) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4) =$
   k) $(a+b)(a-b) =$
3) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   a) $(x+y)^2 =$
   b) $(x+y)^3 =$
   c) $(x+y)^4 =$
   d) $(a+b+c)^2 =$
   e) $(a-b+c)^2 =$
   f) $(x-3)^2(x-4) =$
   g) $(3x+2y-z)^2 =$
4) Vereinfachen Sie:
   a) $(x-y)^2 + (x+y)^2 =$
   b) $(x+y)^2 - (x-y)^2 =$
   c) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1-x) =$
   d) $(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)(1+a) =$
   e) Was vermuten Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse bei c) und d) allgemein?

Übungen (3) — Lösungen

1) a) $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 = 2xy(2x - 3 + 6y^2 - 12xy)$.
   b) $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 = 3pq^2(1 + 2pq - 2p^2 - p)$.
   c) $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b = -7a^2b + 7ab - 14a^3b = 7ab(-a + 1 - 2a^2)$.
   d) $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 = 2abz(2a^2b - b^2z + 5az)$.
   e) $a(x - 3) + b(x - 3) = (a + b)(x - 3)$.
   f) $3(x - 1)^2y - 9a(x - 1)^3y + 6(x - 1)^2y^3 = 3(x - 1)^2y\big(1 - 3a(x - 1) + 2y^2\big) = 3(x - 1)^2y(1 + 3a - 3ax + 2y^2)$.
   g) $(u + v) - b(u + v) = (1 - b)(u + v)$.
   h) $a(x - y) + (x - y)^2 = (a + (x - y))(x - y) = (a + x - y)(x - y)$.
2) a) Es gilt für alle Zahlen x, y, z: $x(y + z) = xy + xz$.
   b) $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
   c) $(2a + 3b)(c + d) = 2ac + 2ad + 3bc + 3bd$.
   d) $(9x - 5y)(7x - 6y) = 63x^2 - 54xy - 35xy + 30y^2 = 63x^2 - 89xy + 30y^2$.
   e) $(x - 4)(x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$.
   f) $(x + y)(x - y)(2x + y) = (x^2 - y^2)(2x + y) = 2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$.
   g) $(2a - 3b)(-2b - 3a) = -4ab - 6a^2 + 6b^2 + 9ab = -6a^2 + 5ab + 6b^2$.
   h) $(4b^2 - 3b)(b - 2b^2) = 4b^3 - 8b^4 - 3b^2 + 6b^3 = -8b^4 + 10b^3 - 3b^2$.
   i) $(9x - 5y)(7y - 6x) = 63xy - 54x^2 - 35y^2 + 30xy = -54x^2 + 93xy - 35y^2$.
   j) $(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 4a^2 + 8a + 4a^2 - 8a + 16 = a^4 + 4a^2 + 16$.
   k) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.
3) a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
   b) $(x + y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) =$
   $= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,
   c) $(x + y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x + y) = \ldots =$
   $= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.
   d) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,
   e) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.
   f) $(x - 3)^2(x - 4) = (x^2 - 6x + 9)(x - 4) = x^3 - 10x^2 + 33x - 36$.
   g) $(3x + 2y - z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$.
4) a) $(x - y)^2 + (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$.
   b) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 2xy + 2xy = 4xy$.
   c) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6 = 1 - x^6$.
   d) $(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)(1+a) = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a-a^2+a^3-a^4+a^5-a^6 = 1 - a^6$.
   e) In Verallgemeinerung von c) gilt für alle natürlichen Exponenten n:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1} \,. \qquad (*)$$

Aber Vorsicht: Die Verallgemeinerung von d) liefert ein anderes Ergebnis. Für *ungerades* n gilt analog zu d):

$$(1 - a + a^2 - + \ldots + a^{n-1} - a^n)(1 + a) = 1 - a^{n+1} \,.$$

Für *gerades* n hingegen gilt

$$(1 - a + a^2 - + \ldots - a^{n-1} + a^n)(1 + a) = 1 + a^{n+1}\,.$$

Beide Formen kann man zusammenfassen zu $(1 - a + a^2 - + \ldots \pm a^n)(1 + a) = 1 - (-a)^{n+1}$, und diese Form ist sogar ein Spezialfall von $(*)$, indem man dort überall x durch $-a$ ersetzt!

Übungen (4)

1) a) Was versteht man unter Erweitern und Kürzen einer Bruchzahl? Was ändert sich dabei, was ändert sich nicht?
   b) Begründen Sie: $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
   c) Welche weiteren Rechenregeln mit Vorzeichen kennen Sie bei Bruchzahlen?
2) a) Wiederholen Sie das Kriterium für die Gleichheit von Brüchen.
   b) Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ heißt (vollständig) *gekürzt,* wenn $b > 0$ ist und a, b teilerfremd sind. Zeigen Sie: Zwei gekürzte Brüche können nur dann dieselbe Bruchzahl darstellen, wenn sowohl ihre Zähler als auch ihre Nenner übereinstimmen, m. a. W. wenn die beiden Brüche *identisch* sind.
3) Berechnen Sie die folgenden Bruchzahlen:
   a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} =$
   b) $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{-3}{-2} =$
   c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} : \frac{3}{18} =$
   d) $\frac{7}{9} : (\frac{7}{18} + \frac{2}{9}) + \frac{-2}{7} =$
4) Berechnen Sie die folgenden Bruchterme:
   a) $\frac{2x - y}{x - 1} + \frac{y - 2x}{x + 1} =$
   b) $\frac{x - y}{y - x} =$
   c) $\frac{(x - a)(x^2 + a^2)(x + a)}{(x^2 - a^2)(x + a)^2} =$
   d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} =$
   e) $\frac{x + y}{\frac{x-y}{x^2-y^2}} =$
   f) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2 - y^2} =$
   g) $\frac{x - y}{x + y} + \frac{x + y}{x - y} =$
   h) $\frac{\frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}} =$

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Einen Bruch *erweitern* heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl $\neq 0$ mupltiplizieren; einen Bruch *kürzen* heißt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl $\neq 0$ teilen. Dabei ändern sich zwar Zähler und Nenner des Bruches, nicht aber die Bruch*zahl*.
b) Die beiden Brüche entstehen auseinander durch Erweitern mit -1 und stellen daher dieselbe Bruchzahl dar.
c) Es gilt
$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}\,.$$

2) a) Es gilt
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc\,.$$
b) Selbstverständlich stellen identische Brüche dieselbe Zahl dar. Seien nun umgekehrt zwei Brüche wie in a) gegeben, die dieselbe Zahl darstellen. Also gilt mit den Bezeichnungen aus a): $ad = bc$. Sind nun beide Brüche zusätzlich gekürzt, so gilt $b, d > 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Aus $ad = bc$ folgt, daß b ein Teiler von ad ist. Da a und b teilerfremd sind, muß b ein Teiler von d sein. Umgekehrt erhält man genauso $d \mid b$. Für zwei positive Zahlen bedeutet dies aber Gleichheit: $b = d$. Damit gilt dann $ad = bc \iff ab = bc \iff a = c$. Insgesamt sind somit die beiden gegebenen Brüche identisch.

3) Ergebnisse:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} = -\frac{1}{6}$ b) $3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{-3}{-2} = -\frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} : \frac{3}{18} = 1$ d) $\frac{7}{9} : (\frac{7}{18} + \frac{2}{9}) + \frac{-2}{7} = \frac{76}{77}$

4) Ergebnisse:

a) $\frac{2x-y}{x-1} + \frac{y-2x}{x+1} = \frac{4x-2y}{x^2-1}$ b) $\frac{x-y}{y-x} = -1$

c) $\frac{(x-a)(x^2+a^2)(x+a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2} = \frac{x^2+a^2}{(x+a)^2}$ d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$

e) $\frac{x+y}{\frac{x-y}{x^2-y^2}} = (x+y)^2$ f) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{x^2-y^2} = \frac{1}{(x-y)^2}$

g) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$ h) $\frac{\frac{x^2-y^2}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}} = x - y$

Übungen (5)

Lösen Sie die nachfolgenden (Un)Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen:

1) $9x = 13 + (6x - 13)$
2) $8(3z - 20) = 4(6z - 40)$
3) $(x - 3)(x - 5) > (x - 2)(x - 6)$
4) $5(3x - 1) = 3(5x - 2)$
5) $(x + 6)(x + 1) < (x + 2)(x + 4)$
6) $(2x - 4)(x + 5) > (x - 3)(2x + 5)$
7) $(4 - 3x)(4x - 7) \leq (2x + 5)(7 - 6x)$
8) $x(x - 3) = x(2x + 5)$

Übertragen Sie die nachfolgenden Fragen zunächst in (Un)Gleichungen für die gesuchte(n) Zahl(en). Formulieren Sie diesen *Ansatz* so dicht wie möglich am Text der Aufgabe. Beantworten Sie dann die gestellten Fragen.

9) Von welcher Zahl ist das 3-fache um 4 größer als das 5-fache?
10) Von welcher Zahl ist das 5-fache, vermindert um das 3-fache der um 2 kleineren Zahl, gleich dem Dreifachen der um 3 größeren Zahl?
11) Für welche Zahlen ist das um 10 verminderte 3-fache der Zahl kleiner als das 2-fache der um 5 vergrößerten Zahl?
12) Bei welchen 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Summe viermal so groß wie die Summe der beiden kleinsten dieser Zahlen?
13) Von welcher Zahl ist das 3-fache, vergrößert um das Doppelte der um 1 kleineren Zahl, gleich dem 5-fachen der um 2 größeren Zahl?

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen mit Formvariablen (*Parametern*).

14) a) $3x + 4a = 5x + 8a$, b) $(x + a)(a - 2) < (x - a)(a + 2)$.
15) $(x - a)(a + 2) + 4a = 2(x - a)$
16) $6(4x + a) = 8(3x + a)$
17) a) $ax = a$, b) $ax = 1$.
18) a) $ax < a$, b) $a^2x < a^2$, c) $ax < x$

Übungen (5) — Lösungen

1)
$$\begin{aligned} & 9x = 13 + (6x - 13) \\ \iff & 9x = 6x \quad \mid -6x \\ \iff & 3x = 0 \quad \mid :3 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{0\}$

2)
$$\begin{aligned} & 8(3z - 20) = 4(6z - 40) \\ \iff & 24z - 160 = 24z - 160 \quad \mid -24z + 160 \\ \iff & 0 = 0 \end{aligned}$$
Da die letzte Gleichung wahr ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer wahr. Das bedeutet, alle Zahlen sind Lösungen: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

3)
$$\begin{aligned} & (x - 3)(x - 5) > (x - 2)(x - 6) \\ \iff & x^2 - 3x - 5x + 15 > x^2 - 2x - 6x + 12 \quad \mid -x^2 \\ \iff & -8x + 15 > -8x + 12 \quad \mid +8x \\ \iff & 15 > 12 \end{aligned}$$
Da die letzte Ungleichung wahr ist, ist auch die erste immer wahr, also $L = \mathbb{Q}$.

4)
$$\begin{aligned} & 5(3x - 1) = 3(5x - 2) \\ \iff & 15x - 5 = 15x - 6 \quad \mid -15x \\ \iff & -5 = -6 \end{aligned}$$
Da die letzte Gleichung falsch ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer falsch. Das bedeutet, sie hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

5)
$$\begin{aligned} & (x + 6)(x + 1) < (x + 2)(x + 4) \\ \iff & x^2 + 7x + 6 < x^2 + 6x + 8 \quad \mid -x^2 - 6x - 6 \\ \iff & x < 2 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\} = \left]-\infty; 2\right[$.

6)
$$\begin{aligned} & (2x - 4)(x + 5) > (x - 3)(2x + 5) \\ \iff & 2x^2 + 6x - 20 > 2x^2 - x - 15 \quad \mid -2x^2 + x + 20 \\ \iff & 7x > 5 \quad \mid :7 (> 0!) \\ \iff & x > \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$
Also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{5}{7}\} = \left]\frac{5}{7}; \infty\right[$.

7)
$$\begin{aligned} & (4 - 3x)(4x - 7) \leq (2x + 5)(7 - 6x) \\ \iff & -12x^2 + 37x - 28 \leq -12x^2 - 16x + 35 \quad \mid +12x^2 + 16x + 28 \\ \iff & 53x \leq 63 \quad \mid :53 (> 0!) \\ \iff & x \leq \tfrac{63}{53} \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{63}{53}\} = \left]-\infty; \frac{63}{53}\right]$.

8) Behandelt man diese Gleichung wie die anderen (ausmultiplizieren), so wird man auf eine sog. *quadratische* Gleichung geführt, die Sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht lösen können.
Der andere, im Unterricht vorgeschlagene Weg war: Man dividiere beide Seiten der Gleichung durch x. Dies ist aber *keine* Äquivalenzumformung, denn dafür müsste sichergestellt sein, dass x nicht 0 ist; andernfalls ist die Division durch x nicht

möglich! Ein möglicher Ausweg besteht in einer Fallunterscheidung: Man untersucht die Gleichung zunächst für $x = 0$ und löst sie dann für $x \neq 0$.
1. Fall: $x = 0$. Dann ist die Gleichung wahr, wie man durch Einsetzen feststellt. 0 ist eine Lösung: $0 \in \mathbb{L}$.
2. Fall: $x \neq 0$: Wir untersuchen die gegebene Gleichung über der verkleinerten Grundmenge $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. *Über dieser Grundmenge G ist nun die Division durch x eine Äquivalenzumformung!* Also:

$$\begin{array}{rrcll} & x(x-3) &=& x(2x+5) & \mid :x(\neq 0!) \\ \Longleftrightarrow & x-3 &=& 2x+5 & \mid -x-5 \\ \Longleftrightarrow & -8 &=& x & \end{array}$$

Das bedeutet, dass unter den Zahlen $\neq 0$ die einzige Lösung der Gleichung -8 ist. Zusammen mit der Lösung 0 haben wir also gezeigt: 0 und -8 sind die beiden einzigen Lösungen: $\mathbb{L} = \{-8, 0\}$.

9) Die gesuchte Zahl nennen wir x. Die Forderungen der Aufgabenstellung lauten dann: $3x = 5x + 4$. Wir lösen nun diese Gleichung:

$$\begin{array}{rrcll} & 3x &=& 5x+4 & \mid -5x \\ \Longleftrightarrow & -2x &=& 4 & \mid :(-2) \\ \Longleftrightarrow & x &=& -2 & \end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist -2.

10)
$$\begin{array}{rrcll} & 5x-3(x-2) &=& 3(x+3) & \\ \Longleftrightarrow & 2x+6 &=& 3x+9 & \mid -2x-9 \\ \Longleftrightarrow & -3 &=& x & \end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist -3.

11)
$$\begin{array}{rrcll} & 3x-10 &<& 2(x+5) & \\ \Longleftrightarrow & 3x-10 &<& 2x+10 & \mid -2x+10 \\ \Longleftrightarrow & x &<& 20 & \end{array}$$

Die gesuchten Zahlen sind die rationalen Zahlen, die kleiner sind als 20.

12) Hier ist nach 5 Zahlen gefragt. Da diese aber aufeinanderfolgen sollen, genügt es die kleinste davon zu kennen; nennen wir sie x. Dann sind die anderen $x+1$, $x+2$, $x+3$ und $x+4$. Die gesuchte Zahl x muss also die folgende Gleichung erfüllen:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 4(x + (x+1))\,.$$

$$\begin{array}{rrcll} & x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) &=& 4(x+(x+1)) & \\ \Longleftrightarrow & 5x+10 &=& 8x+4 & \mid -5x-4 \\ \Longleftrightarrow & 6 &=& 3x & \mid :2 \\ \Longleftrightarrow & 2 &=& x & \end{array}$$

Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind 2, 3, 4, 5 und 6.

13)
$$\begin{array}{rrcll} & 3x+2(x-1) &=& 5(x+2) & \\ \Longleftrightarrow & 5x-2 &=& 5x+10 & \mid -5x \\ \Longleftrightarrow & -2 &=& 10 & \end{array}$$

Es gibt keine Zahl mit den geforderten Eigenschaften.

Parameteraufgaben löst man zunächst genauso wie solche ohne Parameter. Man muss hier nun jedoch besonders genau darauf achten, ob die beabsichtigten Umformungen auch tatsächlich Äquivalenzumformungen sind. In Aufgabe 14) ist dies noch problemlos. Aber ab Aufgabe 15) muss man im Laufe der Rechnung durch Terme dividieren, von denen nicht immer gesichert ist, dass sie $\neq 0$ sind (bzw. bei Ungleichungen, dass sie > 0 sind). Man ist dann gezwungen verschiedene *Fälle* zu *unterscheiden*.

14) a)

$$\begin{array}{rrcll} & 3x+4a &=& 5x+8a & \mid -3x-8a \\ \Longleftrightarrow & -4a &=& 2x & \mid :2(\neq 0) \\ \Longleftrightarrow & -2a &=& x & \end{array}$$

Also: $\mathbb{L} = \{-2a\}$.

b)

$$\begin{array}{rrcll} & (x+a)(a-2) &<& (x-a)(a+2) & \\ \Longleftrightarrow & xa+a^2-2x-2a &<& ax-a^2+2x-2a & \mid -ax+2x+a^2+2a \\ \Longleftrightarrow & 2a^2 &<& 4x & \mid :4\,(>0!) \\ \Longleftrightarrow & \frac{a^2}{2} &<& x & \end{array}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{a^2}{2}\} = \left]\frac{a^2}{2};\infty\right[$.

15)

$$\begin{array}{rrcll} & (x-a)(a+2)+4a &=& 2(x-a) & \\ \Longleftrightarrow & ax-a^2+2x-2a+4a &=& 2x-2a & \mid -2x+a^2-2a \\ \Longleftrightarrow & ax &=& a^2-4a & (*) \end{array}$$

Die jetzt üblicherweise anstehende Division durch a (um x zu 'isolieren') ist aber nur möglich, wenn $a \neq 0$ ist. Wir müssen also die beiden Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ unterscheiden:

1. Fall: $a = 0$.

Dann lautet die Gleichung $(*)$:

$$\begin{array}{rrcl} (*) & 0 \cdot x &=& 0^2 - 4 \cdot 0 \\ \Longleftrightarrow & 0 &=& 0 \\ & \mathbb{L} &=& \mathbb{Q}\,. \end{array}$$

2. Fall: $a \neq 0$.

In diesem Falle können wir bei $(*)$ mit einer Division durch a fortfahren:

$$\begin{array}{rrcll} (*) & ax &=& a^2-4a & \mid :a\,(\neq 0!) \\ \Longleftrightarrow & x &=& \frac{a^2-4a}{a} & \\ \Longleftrightarrow & x &=& a-4 & \end{array}$$

Also: $\mathbb{L} = \{a-4\}$

Damit ist in beiden Fällen die Lösungsmenge bestimmt worden. Zusammengefasst:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{a-4\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

16)

$$\begin{array}{rrcll} & 6(4x+a) &=& 8(3x+a) & \\ \Longleftrightarrow & 24x+6a &=& 24x+8a & \mid -24x-6a \\ \Longleftrightarrow & 0 &=& 2a & \end{array}$$

Die Ausgangsgleichung hat also für alle x denselben Wahrheitswert wie die letzte Gleichung $2a = 0$. Deren Wahrheitswert hängt nun vom Wert von a ab:

1. Fall: $a = 0$.

Dann ist die letzte Gleichung, also auch die erste wahr; das heißt $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

2. Fall: $a \neq 0$.

Dann ist die letzte Gleichung falsch, also auch die erste: $\mathbb{L} = \emptyset$.

Zusammengefasst: $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \emptyset & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$

17) a) Die erste Umformung, die man hier durchführen möchte, ist die Division durch a. Dies ist aber nur dann eine zulässige Äquivalenzumformung, wenn $a \neq 0$ ist. Wir unterscheiden daher wieder die beiden Fälle:

1. Fall: $a = 0$.
Dann lautet die Gleichung einfach:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad | \, (a = 0!) \\ \iff \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$

2. Fall: $a \neq 0$.
Dann ist die Division durch a eine Äquivalenzumformung und wir erhalten:

$$\begin{aligned} ax &= a \quad | : a \, (\neq 0!) \\ \iff \quad x &= 1 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{1\}$

Zusammengefasst folgt: $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{falls } a = 0, \\ \{1\} & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$

b) Hier ist dieselbe Fallunterscheidung nötig.
1. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Gleichung $0 = 1$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.
2. Fall: $a \neq 0$. Dann gilt $ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}$: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{a}\}$.

18) a) Auch hier wäre die erste Umformung eine Division durch a. Da es sich hier aber um eine Ungleichung handelt, ist die Division durch a nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $a > 0$ ist; wenn hingegen $a < 0$ ist, muss man das Relationszeichen ($<$, $>$) 'umdrehen'. Wir haben daher hier 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $a > 0$.
$$\begin{aligned} ax &< a \quad | : a(> 0!) \\ \iff \quad x &< 1 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\} =]-\infty; 1[$.

2. Fall: $a = 0$. Dann lautet die Ungleichung $0 \cdot x < 0$, also $0 < 0$, und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a < 0$.
$$\begin{aligned} ax &< a \quad | : a(< 0!) \\ \iff \quad x &> 1 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\} =]1\,; \infty[$.

Zusammengefasst: $\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty; 1[& \text{falls } a > 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0, \\ ]1; \infty[& \text{falls } a < 0. \end{cases}$

b) Hier müsste man zunächst durch a^2 dividieren. Da aber a^2 nie negativ sein kann, braucht man nur zwei Fälle zu unterscheiden: $a^2 = 0$ und $a^2 > 0$. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie in a) und man erhält:

$$\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty; 1[& \text{falls } a^2 > 0, \text{ d.h. falls } a \neq 0, \\ \emptyset & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

c) Vorsicht: Man führe solange wie möglich die üblichen Äquivalenzumformungen durch! Man unterscheide verschiedene Fälle erst dann, wenn dies unbedingt nötig ist, d. h. wenn man multiplizieren oder dividieren will und sicherstellen muss, dass der Divisor > 0 ist.

$$\begin{aligned} ax &< x \quad | -x \\ \iff \quad ax - x &< 0 \\ \iff \quad (a-1)x &< 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Jetzt wäre der nächste Schritt die Division durch $a - 1$. Man muss also nun die 3 Fälle $a - 1 > 0$, $a - 1 = 0$ und $a - 1 < 0$ unterscheiden.

1. Fall: $a - 1 > 0$.
$$\begin{aligned} (*) \quad (a-1)x &< 0 \quad | :(a-1)\,(> 0!) \\ \iff \quad x &< 0 \end{aligned}$$
Also: $\mathbb{L} =]-\infty; 0[$

2. Fall: $a-1=0$. Dann lautet die Ungleichung $(*)$ $0 \cdot x < 0$ und ist falsch: $\mathbb{L} = \emptyset$.
3. Fall: $a-1<0$.

$$\begin{array}{rrcll} (*) & (a-1)x & < & 0 & \mid :(a-1)\,(<0!) \\ \iff & x & > & 0 & \\ \text{Also:} & \mathbb{L} & = &]0;\infty[& \end{array}$$

Da $a-1>0$ nichts anderes besagt als $a>1$, erhält man das Endergebnis:

$$\mathbb{L} = \begin{cases}]-\infty;0[& \text{falls } a>1, \\ \emptyset & \text{falls } a=1, \\ ]0;\infty[& \text{falls } a<1. \end{cases}$$

Übungen (6)

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Bruchgleichungen:

1) $\dfrac{x+6}{x} = \dfrac{x+4}{x+1}$

2) $\dfrac{5}{x-3} = \dfrac{2}{3-x}$

3) $\dfrac{x}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{1-x}$

4) $\dfrac{2-x}{3-x} - 1 = \dfrac{4-x}{x-3}$

5) $\dfrac{5x+1}{30-10x} = \dfrac{x+3}{4x-12}$

6) $\dfrac{4x}{6x-24} = \dfrac{x}{12-3x}$

7) $\dfrac{x+2}{6x} + \dfrac{x^2-2}{3x^2} = \dfrac{1}{2}$

8) $\dfrac{9}{x+3} - \dfrac{8}{x-2} - \dfrac{1}{x+1} = 0$

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen durch *Faktorisieren:*

9) a) $(x-3)\cdot(x+1) = 0$,
b) $(x-3)(x+1)(x-2) = 0$,
c) $(2x-4)(3x+1) = 0$,
d) $6x^2 + 3x = 0$,
e) $2x^2 - 50 = 0$,
f) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

10) a) $x^2 + 16 = 8x$,
b) $2x^2+6x+6 = x^2-2x-10$,
c) $(2x+2)(x+2) + 5 = 9$,
d) $3(x^2+3) = 36$,
e) $x^3 + 4x = 4x^2$,
f) $2x(x+3) - 45 = (3x-2)(x-2)$.

Lösen Sie die nachfolgenden Bruchgleichungen:

11) $\dfrac{8}{x-3} - \dfrac{10}{x+3} = \dfrac{40}{x^2-9}$

12) $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

13) $\dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{5x-4}{x^2-16}$

14) $\dfrac{6x+1}{2x+6} - \dfrac{5x-3}{3x-9} = \dfrac{4x^2+42}{3x^2-27}$

15) $\dfrac{3-x}{x+1} + \dfrac{2+x}{x-3} = \dfrac{4x-1}{x^2-2x-3}$

16) $\dfrac{3}{x^2+3x} - \dfrac{2}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x^2+x-6} = 0$

Übungen (6) — Lösungen

1) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, -1\}$. Über diesem Bereich nimmt der Term $x(x+1)$ nie den Wert 0 an, also ist die Multiplikation damit eine Äquivalenzumformung. Dies ergibt dann:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{x+6}{x} &= \frac{x+4}{x+1} & &\mid \ \cdot x(x+1) \\
&\iff & (x+6)(x+1) &= x(x+4) & & \\
&\iff & x^2+7x+6 &= x^2+4x & &\mid \ -x^2 \\
&\iff & 7x+6 &= 4x & &\mid \ -4x-6 \\
&\iff & 3x &= -6 & &\mid \ : 3 \\
&\iff & x &= -2 & &
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \{-2\}\,, \qquad \text{denn } -2 \in \mathbb{D}\,.$$

2) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$. Über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{5}{x-3} &= \frac{2}{3-x} & & \\
&\iff & \frac{5}{x-3} &= \frac{2}{-(x-3)} & &\mid \ \cdot(x-3) \\
&\iff & 5 &= \frac{2}{-1} = -2 & &
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \emptyset\,.$$

3) Über dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{x}{x-1} &= 1 - \frac{1}{1-x} & & \\
&\iff & \frac{x}{x-1} &= 1 - \frac{1}{-(x-1)} & &\mid \ \cdot(x-1) \\
&\iff & x &= (x-1) - (-1) & & \\
&\iff & x &= x & &\mid -x \\
&\iff & 0 &= 0 & &
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}\,.$$

4) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{2-x}{3-x} - 1 &= \frac{4-x}{x-3} & & \\
&\iff & \frac{2-x}{-(x-3)} - 1 &= \frac{4-x}{x-3} & &\mid \ \cdot(x-3) \\
&\iff & -(2-x) - (x-3) &= 4-x & & \\
&\iff & 1 &= 4-x & & \\
&\iff & x &= 3 & &
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \emptyset\,, \qquad \text{denn } 3 \notin \mathbb{D}\ !$$

5) Über $I\!D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{5x+1}{30-10x} = \frac{x+3}{4x-12} \\
\iff & \frac{5x+1}{-10(x-3)} = \frac{x+3}{4(x-3)} && | \cdot(-20)(x-3) \\
\iff & (5x+1)\cdot 2 = (x+3)\cdot(-5) \\
\iff & 10x+2 = -5x-15 \\
\iff & 15x = -17 \\
\iff & x = -\frac{17}{15}
\end{aligned}$$

$$L = \{-\frac{17}{15}\}\,, \qquad \text{denn } -\frac{17}{15} \in I\!D\ !$$

6) Über $I\!D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{4x}{6x-24} = \frac{x}{12-3x} \\
\iff & \frac{4x}{6(x-4)} = \frac{x}{-3(x-4)} && | \ \cdot 6(x-4) \\
\iff & 4x = -2x \\
\iff & x = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{0\}\,, \qquad \text{denn } 0 \in I\!D.$$

7) Über dem Definitionsbereich $I\!D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+2}{6x} + \frac{x^2-2}{3x^2} = \frac{1}{2} && | \cdot 6x^2 \\
\iff & (x+2)\cdot x + (x^2-2)\cdot 2 = 3x^2 && | -3x^2 \\
\iff & x^2+2x+2x^2-4-3x^2 = 0 && | +4 \\
\iff & 2x = 4 && | :\ 2 \\
\iff & x = 2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{2\}\,, \quad \text{denn } 2 \in I\!D.$$

8) Über dem Definitionsbereich $I\!D = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 2, -1\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{x+3} - \frac{8}{x-2} - \frac{1}{x+1} = 0 \quad | \cdot(x+3)(x-2)(x+1) \\
\iff & 9(x-2)(x+1) - 8(x+3)(x+1) - (x+3)(x-2) = 0 \\
\iff & 9(x^2-x-2) - 8(x^2+4x+3) - (x^2+x-6) = 0 \\
\iff & -42x - 36 = 0 \\
\iff & x = -\tfrac{6}{7}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{-\tfrac{6}{7}\}\,, \ \text{denn } -\tfrac{6}{7} \in I\!D\,.$$

9) a) $(x-3)(x+1)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \iff x=3 \vee x=-1$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,3\}$.

b) $(x-3)(x+1)(x-2)=0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \vee x-2=0 \iff$ $\iff x=3 \vee x=-1 \vee x=2$, also $\mathbb{L}=\{-1\,,\,2\,,\,3\}$.

c) $(2x-4)(3x+1)=0 \iff 2x=4 \vee 3x=-1 \iff x=2 \vee x=-1/3$, also $\mathbb{L}=\{-1/3\,,\,2\}$.

d) Hier faktorisiert man zunächst durch Ausklammern und schließt dann wie oben weiter: $6x^2+3x=0 \iff 3x(2x+1)=0 \iff 3x=0 \vee 2x=-1 \iff$ $\iff x=0 \vee x=-1/2$, und damit ist $\mathbb{L}=\{-1/2\,,\,0\}$ die Lösungsmenge.

e) Hier wird der Term mit der dritten binomischen Formel faktorisiert: $2x^2-50=0 \iff x^2-25=0 \iff (x+5)(x-5)=0 \iff$ $\iff x+5=0 \vee x-5=0 \iff x=-5 \vee x=5$, also $\mathbb{L}=\{-5\,,\,+5\}$.

f) $x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x-3=0 \iff x=3$, also $\mathbb{L}=\{3\}$.

10) a) $x^2+16=8x \iff x^2-8x+16=0 \iff (x-4)^2=0 \iff x-4=0 \iff$ $x=4$, also $\mathbb{L}=\{4\}$.

b) $2x^2+6x+6=x^2-2x-10 \iff x^2+8x+16=0 \iff (x+4)^2=0 \iff$ $x=-4$, also $\mathbb{L}=\{-4\}$.

c) $(2x+2)(x+2)+5=9 \iff 2x^2+6x+4-4=0 \iff x^2+3x=0 \iff$ $x(x+3)=0 \iff x=0 \vee x=-3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,0\}$.

d) $3(x^2+3)=36 \iff x^2+3=12 \iff x^2-9=0 \iff$ $\iff (x+3)(x-3)=0 \iff x=\pm 3$, also $\mathbb{L}=\{-3\,,\,+3\}$.

e) Auch diese (*kubische*) Gleichung ist durch Faktorisieren lösbar:

$$x^3+4x=4x^2 \iff x^3-4x^2+4x=0 \iff x(x^2-4x+4)=0$$
$$\iff x(x-2)^2=0 \iff x=0 \vee x=2\,,$$

also $\mathbb{L}=\{0\,,\,2\}$.

f) $2x(x+3)-45=(3x-2)(x-2) \iff 2x^2+6x-45=3x^2-8x+4 \iff$ $x^2-14x+49=0 \iff (x-7)^2=0 \iff x=7$, also $\mathbb{L}=\{7\}$.

Bei den nun folgenden Bruchgleichungen muß man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die auftretenden Nenner faktorisieren. Dies erleichtert zugleich die Bestimmung des Hauptnenners.

11) Die Nenner $x-3$ und $x+3$ werden 0 für $x=+3$ bzw. für $x=-3$. Der quadratische (!) Nenner x^2-9 wird mit der dritten binomischen Formel zerlegt: $x^2-9=(x+3)(x-3)$. Dieser Term kann nur dann den Wert 0 haben, wenn $x-3=0$ oder $x+3=0$ ist. Damit ist der Definitionsbereich der gesamten Gleichung $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-3,+3\}$.

Zugleich erkennen wir $(x+3)(x-3)$ als Hauptnenner, mit dem wir dann die Bruchgleichung multiplizieren. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{x^2-9}\\
\iff\ &\frac{8}{x-3}-\frac{10}{x+3}=\frac{40}{(x-3)(x+3)} \quad \Big|\ \cdot(x-3)(x+3)\\
\iff\ &8(x+3)-10(x-3)=40\\
\iff\ &-2x+54=40 \quad |\ -54\\
\iff\ &-2x=-14 \quad |\ :(-2)\\
\iff\ &x=7\\
&\mathbb{L}=\{7\}\,,\quad \text{denn } 7\in\mathbb{D}\,.
\end{aligned}$$

12) Hier benutzt man entsprechend $x^2-16 = (x-4)(x+4)$ und erhält $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}$. Über $\mathbb{D}$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{x^2-16} & \\
&\Longleftrightarrow & \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{(x-4)(x+4)} & \quad | \cdot(x-4)(x+4) \\
&\Longleftrightarrow & 3(x-4) + 2(x+4) &= 5x-4 & \\
&\Longleftrightarrow & 5x-4 &= 5x-4 & \quad | -5x+4 \\
&\Longleftrightarrow & 0 &= 0 & \\
& & \mathbb{L} = \mathbb{D} &= \mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\} &
\end{aligned}
$$

13) Über $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-4,+4\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{x^2-16} & \\
&\Longleftrightarrow & \frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} &= \frac{5x-4}{(x-4)(x+4)} & \quad | \cdot(x-4)(x+4) \\
&\Longleftrightarrow & 3(x-4) - 2(x+4) &= 5x-4 & \\
&\Longleftrightarrow & x-20 &= 5x-4 & \quad | -x+4 \\
&\Longleftrightarrow & -16 &= 4x & \quad | : 4 \\
&\Longleftrightarrow & -4 &= x & \\
& & \mathbb{L} &= \emptyset\,, & \text{denn } -4 \notin \mathbb{D}\,!
\end{aligned}
$$

14) Wir stellen die drei Nenner als Produkte dar (durch Ausklammern bzw. mittels binomischer Formeln) und erhalten: $2(x+3)$, $3(x-3)$ und $3(x+3)(x-3)$. Daraus entnehmen wir den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-3,3\}$, sowie den Hauptnenner $6(x-3)(x+3)$. Über $\mathbb{D}$ gelten dann die nachfolgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{6x+1}{2x+6} - \frac{5x-3}{3x-9} &= \frac{4x^2+42}{3x^2-27} & \\
&\Longleftrightarrow & \frac{6x+1}{2(x+3)} - \frac{5x-3}{3(x-3)} &= \frac{4x^2+42}{3(x-3)(x+3)} & \quad | \cdot 6(x-3)(x+3) \\
&\Longleftrightarrow & (6x+1)\cdot 3(x-3) - (5x-3)\cdot 2(x+3) &= (4x^2+42)\cdot 2 & \\
&\Longleftrightarrow & 18x^2 - 51x - 9 - (10x^2 + 24x - 18) &= 8x^2 + 84 & \\
&\Longleftrightarrow & -75x &= 75 & \\
&\Longleftrightarrow & x &= -1 & \\
& & \mathbb{L} &= \{-1\}\,, & \text{denn } -1 \in \mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

15) Hier muß man zur Bestimmung des Definitionsbereiches die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ lösen. Da man weder ausklammern noch eine binomische Formel anwenden kann, fehlen Ihnen (noch) die nötigen Hilfsmittel. Wenn man jedoch den Verdacht hat, daß dabei die schon durch die anderen Nenner ($x+1$, $x-3$) bestimmten Ausnahmen -1, $+3$ eine Rolle spielen könnten, so berechne man einmal das Produkt $(x+1)(x-3)$ und erhält gerade $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$. Damit

folgt $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 3\}$. Zugleich erleichtert die Zerlegung $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$ auch die weiteren Äquivalenzumformungen über $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{3-x}{x+1} + \frac{2+x}{x-3} = \frac{4x-1}{x^2-2x-3} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{3-x}{x+1} + \frac{2+x}{x-3} = \frac{4x-1}{(x+1)(x-3)} \quad \mid \ \cdot(x+1)(x-3) \\
\Longleftrightarrow \quad & (3-x)(x-3) + (2+x)(x+1) = 4x-1 \\
\Longleftrightarrow \quad & -x^2+6x-9 \ + \ x^2+3x+2 = 4x-1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 9x-7 = 4x-1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 5x = 6 \\
\Longleftrightarrow \quad & x = \tfrac{6}{5} \\
& \mathbb{L} = \{\tfrac{6}{5}\}, \qquad \text{denn } \tfrac{6}{5} \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

16) Wieder zerlegen wir zuerst die Nenner in Faktoren. Die ersten beiden durch Ausklammern: $x(x+3)$, $x(x-2)$. Wir vermuten, daß der dritte Nenner aus den beiden Linearfaktoren $x+3$ und $x-2$ zusammengesetzt ist; in der Tat gilt $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$. Damit ist der Definitionsbereich dieser Gleichung $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, -3, 2\}$ und über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+x-6} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{3}{x(x+3)} - \frac{2}{x(x-2)} - \frac{1}{(x+3)(x-2)} = 0 \mid \cdot x(x+3)(x-2) \\
\Longleftrightarrow \quad & 3(x-2) - 2(x+3) - x = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 3x-6-2x-6-x = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -12 = 0 \\
& \mathbb{L} = \emptyset\,.
\end{aligned}$$

Übungen (7)

1) Zeigen Sie:
Stimmen in einem Dreieck an zwei Eckpunkten die Winkel überein, so ist die Höhe durch den dritten Punkt zugleich Winkelhalbierende und das Dreieck symmetrisch dazu. Insbesondere ist es gleichschenklig.
Mit den üblichen Dreiecksbezeichnungen gilt: $\alpha = \beta \iff a = b$.

2) Ein *gleichseitiges* Dreieck ist ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten. Zeigen Sie:
a) In einem gleichseitigen Dreieck betragen alle Winkel 60^0.
b) Ein Dreieck, in dem sämtliche Winkel 60^0 betragen, ist gleichseitig.

3) Zeigen Sie:
a) Ein Punkt P hat genau dann von zwei verschiedenen Punkten A und B *denselben* Abstand, wenn er auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt.
b) Es sei ABC ein Dreieck und M der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten. Zeigen Sie, daß M von allen drei Eckpunkten denselben Abstand hat und der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten ist.
c) M ist der Mittelpunkt des *Umkreises* des Dreiecks.

4) Zeigen Sie mit Hilfe der Kongruenzsätze:
a) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so liegt ein Parallelogramm vor.
b) Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks in ihrem jeweiligen Mittelpunkt im rechten Winkel, so ist das Viereck eine Raute.

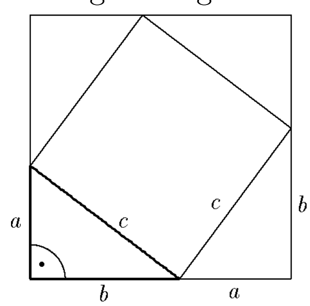
5) Welche Bedingungen müssen die Diagonalen eines Vierecks erfüllen, damit ein Drachenviereck vorliegt? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe geeigneter Kongruenzsätze.

6) Zeigen Sie: Ein Drachenviereck mit Diagonalen der Länge a, b hat die Fläche $\frac{a \cdot b}{2}$.

7) In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen eines Trapezes, dessen Grundlinie doppelt so lang ist wie die parallele Deckenlinie? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Strahlensatz.

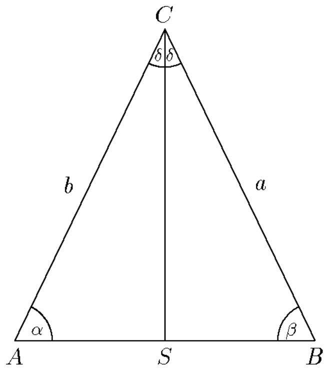
8) Ein *regelmäßiges n-Eck* wird gebildet durch n Punkte auf einem Kreis, bei denen benachbarte Punkte stets denselben Abstand haben. Den Kreis, auf dem die Ecken liegen, nennt man den *Umkreis.* Verbindet man benachbarte Eckpunkte mit dem Umkreismittelpunkt, so erhält man n Dreiecke.
a) Zeigen Sie, daß diese Dreiecke kongruent sind und bestimmen Sie ihre Winkel.
b) Zeigen Sie: Die Kantenlänge eines regelmäßigen 6-Ecks ist gleich dem Umkreisradius.
c) Begründen Sie damit eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige Sechseck.

9) Beweisen Sie mit Hilfe nebenstehender Figur durch geeignete Flächenberechnung den Satz des Pythagoras.



Übungen (7) — Lösungen

1) Die nebenstehende Skizze veranschauliche das gegebene Dreieck. Wir setzen voraus, daß die Winkel α und β übereinstimmen: $\alpha = \beta$. (Dies ist in der Zeichnung bewußt nicht genau erfüllt, damit man nicht durch die Zeichnung zu voreiligen Schlüssen kommt, sondern immer gezwungen ist, eventuelle Behauptungen genau zu begründen.) Die eingezeichnete Winkelhalbierende durch C zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke. Beide Teildreiecke haben identische Winkel δ sowie nach Voraussetzung einen weiteren übereinstimmenden Winkel $\alpha = \beta$. Nach dem Winkelsummensatz müssen dann auch die jeweiligen dritten Winkel beider Dreiecke an der Ecke S übereinstimmen[1)].



Daraus folgt nun, daß die beiden Teildreiecke in einer Seite (der Winkelhalbierende) und den beiden angrenzenden Winkeln übereinstimmen. Nach dem Kongruenzsatz **(WSW)** sind die beiden Teildreiecke *kongruent,* und zwar werden sie durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden deckungsgleich. Damit ist das Gesamtdreieck symmetrisch zur Winkelhalbierenden. Insbesondere sind die Seitenlängen a und b (Bezeichnungen laut Skizze) gleich: Das Dreieck ist gleichschenklig.

2) a) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seitenpaare gleich lang, also die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Damit sind alle drei Winkel gleich groß, wegen des Winkelsummensatzes also jeweils 60^0.
b) Umgekehrt schließt man genauso, da zwei gleich großen Winkeln immer gleich lange Seiten gegenüberliegen.

3) a) Eine 'genau dann, wenn'-Aussage setzt sich immer aus zwei Teilbehauptungen zusammen. In unserem Falle:
1. Wenn der Punkt P auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt, dann hat er von A und B den gleichen Abstand.
2. Wenn P von A und B denselben Abstand hat, dann liegt P auf der Mittelsenkrechten.
1. Wir setzen voraus, daß P auf der Mittelsenkrechten zu A und B liegt. Es bezeichne M den Mittelpunkt zwischen A und B (Skizze anfertigen!). Dann sind die beiden Dreiecke AMP und BMP kongruent (Kongruenzsatz (SWS), denn sie haben die Seite $\overline{MP}$ gemeinsam, die Seitenlängen $|AM|$ und $|BM|$ sind gleich (da M der Mittelpunkt ist), und der eingeschlossene Winkel ist auch derselbe, nämlich 90^0). Wenn die beiden Dreiecke kongruent sind, sind insbesondere die Seitenlängen $|PA|$ und $|PB|$ gleich, das heißt: P hat von A und B denselben Abstand.
2. Wir betrachten im Dreieck ABP. Dieses ist nach Voraussetzung gleichschenklig. Also stimmen in ihm die Höhe durch P und Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite überein (siehe Satz über gleichschenklige Dreiecke, Skript S. 31). Damit liegt P auf der Mittelsenkrechten.
b) Da M auf einer der Mittelsenkrechten liegt, etwa der zu A und hat M von beiden Punkten denselben Abstand (siehe a)). Dasselbe gilt etwa auch für B und C.

[1)] Da beide zusammen einen gestreckten Winkel (180^0) ergeben, müssen beide 90^0 betragen und die Winkelhalbierende ist zugleich Höhe.

Also hat M von allen *drei* Ecken denselben Abstand. Wenn aber der Abstand von A und C übereinstimmt, muß M auch auf der dritten Mittelsenkrechten zu A und C liegen: Alle drei Mittelsenkrechten verlaufen durch den Punkt M, schneiden sich also in einem einzigen Punkt.

c) Der Kreis ist die Ortslinie aller Punkte, die von einem festen Punkt (genannt *Mittelpunkt*) einen festen Abstand (genannt *Radius*) haben. Da alle drei Eckpunkte des Dreiecks von M denselben Abstand haben, liegen sie auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Diesen Kreis durch die drei Eckpunkte nennt man den *Umkreis* des Dreiecks.

4) a) Sei $ABCD$ das Viereck und S der Diagonalenschnittpunkt. Die beiden Diagonalen unterteilen das Viereck in vier Dreiecke (Skizze anfertigen!). Wir behaupten, daß die einander gegenüberliegenden Dreiecke ABS und CDS bzw. ASD und BCS kongruent sind.
Begründung: Die beiden Dreiecke ABS und CDS haben bei S denselben Winkel (Gegenwinkel). Außerdem sind nach Voraussetzung die angrenzenden Stücke auf den Diagonalen gleich lang, also sind beide Dreiecke nach dem Kongruenzsatz (SWS) kongruent. Dasselbe gilt dann auch für die beiden anderen Teildreiecke.
Aufgrund der Kongruenz sind insbesondere auch entsprechende Winkel gleich groß. So stimmen etwa die Winkel $\angle ACD$ und $\angle CAB$ überein. Dies bedeutet, daß die Diagonale AC die Vierecksseiten AB und DC unter denselben (Wechsel-)winkeln schneidet; die Vierecksseiten sind also *parallel.* Genauso argumentiert man für das andere Seitenpaar. Damit liegt ein Parallelogramm vor.

b) Hier wird *zusätzlich* vorausgesetzt, daß sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden. Das bedeutet, daß bei S alle 4 Winkel gleich groß sind. Damit werden von den oben betrachteten 4 Teildreiecken auch die *benachbarten* kongruent (eine halbe Diagonale als gemeinsame Seite, jeweils rechter Winkel bei S und zwei gleich lange Hälften der anderen Diagonale, Kongruenzsatz (SWS)). Wenn aber alle vier Teildreiecke kongruent sind, sind alle vier Seiten des Parallelogramms gleich lang: Das Viereck ist also eine Raute.

5) Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks rechtwinklig und wird eine halbiert, so liegt ein Drachenviereck vor.
Begründung: Aufgrund der Voraussetzung ist eine der Diagonalen die Mittelsenkrechte der anderen. Sei etwa die Diagonale AC die Mittelsenkrechte zur Diagonalen BD. Dann hat der Punkt A von B und C denselben Abstand (siehe Aufgabe 3)), also sind die von A ausgehenden benachbarten Vierecksseiten gleich lang.
Dasselbe gilt für den ebenfalls auf der Mittelsenkrechten von BD liegenden Punkt C, so daß auch die von C ausgehenden Vierecksseiten gleich lang sind: Das Viereck ist folglich ein Drachenviereck.
Von der hier bewiesenen Aussage gilt auch die Umkehrung: In einem Drachenviereck schneiden sich die Diagonalen rechtwinklig und eine wird halbiert. Siehe dazu die nächste Aufgabe.

6) Ein Drachenviereck ist definitionsgemäß aus zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zusammengesetzt. Die gemeinsame Basis ist eine Diagonale des Vierecks (etwa von der Länge a) und wird durch die andere Diagonale (Länge b) halbiert und rechtwinklig geschnitten (im gleichschenkligen Dreieck stimmen Höhe, Winkel- und Seitenhalbierende durch die Spitze und Mittelsenkrechte der Basis überein).
Die Fläche der beiden gleichschenkligen Dreiecke ist also gleich der halben Ba-

sislänge $a/2$ multipliziert mit der jeweiligen Höhe. Da die beiden Höhen zusammen die zweite Diagonale ergeben, ergeben die beiden Flächen zusammen $A = \frac{a}{2} \cdot b$.

7) Wir zeichnen die beiden Diagonalen ein (Skizze anfertigen!) und erhalten dadurch eine Strahlensatzfigur: Die beiden Diagonalen als sich schneidende Geraden (Schnittpunkt S) und zwei gegenüberliegende parallele Seiten des Trapezes. Nach dem Strahlensatz ist dann das Verhältnis der Abschnitte auf den Parallelen (nach Voraussetzung $1 : 2$) gleich dem Verhältnis der von S ausgehenden Abschnitte auf den Geraden (Diagonalen). Damit teilt S die Diagonalen ebenfalls im Verhältnis $1 : 2$.

8) a) Die Teildreiecke haben am Mittelpunkt alle denselben Winkel $\varphi = \frac{360^0}{n}$, da die Eckpunkte gleichmäßig auf dem Kreis angeordnet waren. Außerdem sind die vom Mittelpunkt ausgehenden Seiten alle gleich lang, nämlich gleich dem Kreisradius. Damit sind die Teildreiecke kongruent (SWS). Außerdem sind die Teildreiecke gleichschenklig, so daß die an der Peripherie liegenden Winkel ebenfalls alle gleich groß sind, und zwar

$$\frac{180^0 - \varphi}{2} = 90^0 - \frac{360^0}{2n} = 90^0 - \frac{180^0}{n} .$$

b) Bei $n = 6$ ergibt sich $\varphi = 60^0$ und damit sind die beiden verbleibenden (gleich großen) Winkel ebenfalls 60^0. Damit ist das Dreieck gleichseitig (siehe Aufgabe 2b)) und alle Seitenlängen gleich dem Radius.

c) Nach b) sind ist die Seitenlänge des regelmäßigen 6-Ecks gleich dem Radius seines Umkreises. Man zeichnet daher einen Kreis, setzt den Zirkel auf einen beliebigen Peripheriepunkt und schlägt um diesen einen Kreis mit unverändertem Radius. Von den entstehenden zwei Schnittpunkten mit dem Ausgangskreis ausgehend wiederholt man dies und erhält so die Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks auf dem Kreis.

9) Die skizzierte Figur entsteht, indem man die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks verlängert, und jeweils dasselbe Dreieck um 90^0 gedreht ansetzt. Dies bedeutet, dass das innen liegende Viereck rechte Winkel hat und dort folglich ein Quadrat der Kantenlänge c entsteht. Zusammen mit den 4 angrenzenden rechtwinkligen Dreiecken erhält man eine Gesamtfläche $A = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$.
Andererseits kann man die Fläche auch über das große Quadrat ermitteln; dieses hat die Kantenlänge $a+b$, so dass die Gesamtfläche auch als $A = (a+b)^2$ berechnet werden kann. Damit folgt:

$$c^2 + 2ab = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \, , \text{ also } \quad c^2 = a^2 + b^2 \, .$$