# Einführung in die Mathematik

Übungen 2. Semester

Dr. Norbert Klingen, Köln-Kolleg

20. Juni 2003

## Inhaltsverzeichnis

## Übungen (1)

1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist __________ mit dem _______ $a$ und dem __________________ $b$.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind ____________________.
c) Beschreiben Sie in Worten die Lösungsmengen der Gleichungen $y = 3$ und $x = 5$.
d) Welchen Anstieg haben die Geraden in c)?

2) Zeichnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in ein Koordinatenkreuz.
a) $y = x - 2$ b) $y = -3x + 5$
c) $y = \frac{x}{2} - 1$ d) $y = 3 + \frac{x}{5}$
e) $3x - 2y = 4$ f) $3x - 2y = 4(3x - y + 1)$

3) Beschreiben Sie in Worten die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen — so genau, dass eine Zeichnung unmittelbar möglich ist.
a) $(4x - 3)(3y + 1) = (6y - 1)(2x + 1)$ b) $(9x - 4)(2y + 5) = (3y + 1)(6x - 2)$
c) $(2x + 1)(6y - 4) = (3y - 2)(4x - 3)$ d) $(2x + 1)(6y - 4) = (3y - 2)(4x + 2)$

4) a) Markieren Sie in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $P = (3|2)$ und $Q = (-1|-1)$ und zeichnen Sie die Gerade durch diese Punkte.
b) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung möglichst genau den Anstieg und den $y$-Achsenabschnitt dieser Geraden.
c) *Berechnen* Sie nun diese Werte und vergleichen Sie sie mit den in b) gefundenen.
d) Beschreiben Sie die Gerade durch eine Gleichung, d. h. geben Sie eine Gleichung an, deren Lösungsmenge diese Gerade ist.
e) Welche der nachfolgenden Punkte liegen auf der Geraden?

$$Q_1 = (\frac{5}{2}|\frac{3}{2}), \quad Q_2 = (4|\frac{11}{4}), \quad Q_3 = (\frac{1}{9}|-\frac{1}{5})$$

f) Ergänzen Sie in den folgenden Punkten

$$P_1 = (2| \quad), \quad P_2 = (-3| \quad), \quad P_3 = ( \quad |1)$$

die fehlende Koordinate so, dass der jeweilige Punkt auf der gegebenen Geraden liegt. Markieren Sie die Punkte dann in ihrem Koordinatensystem.

5) Bestimmen Sie zu den gegebenen Punkten $P$ und $Q$ jeweils den Anstieg und den $y$-Achsenabschnitt der Geraden durch diese Punkte:
a) $P = (2|3)$, $Q = (1|1)$, b) $P = (3|8)$, $Q = (-3|2)$,
c) $P = (6|4)$, $Q = (1|3)$, d) $P = (2|3)$, $Q = (2|-1)$.

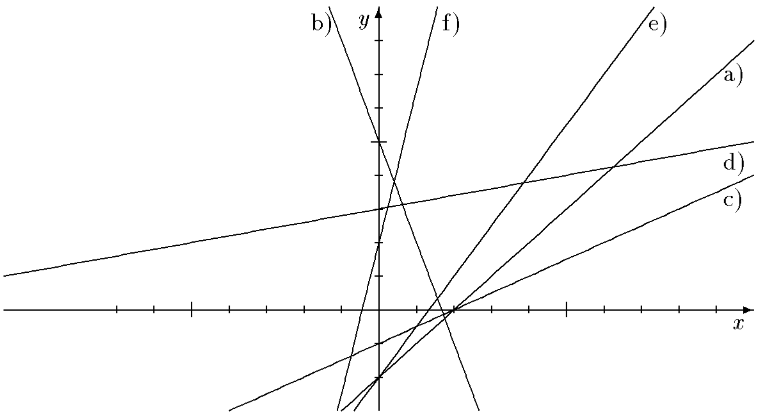
6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn ...
b) Der Graph einer Funktion $f$ mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist ...
c) Welche Teilmengen von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kommen als Graph einer linearen Funktion vor?

7) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ist linear und es gilt $f(-1) = 3$ sowie $f(3) = -3$.
a) Skizzieren Sie den Graphen von $f$.
b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für $f$.

## Übungen (1) — Lösungen

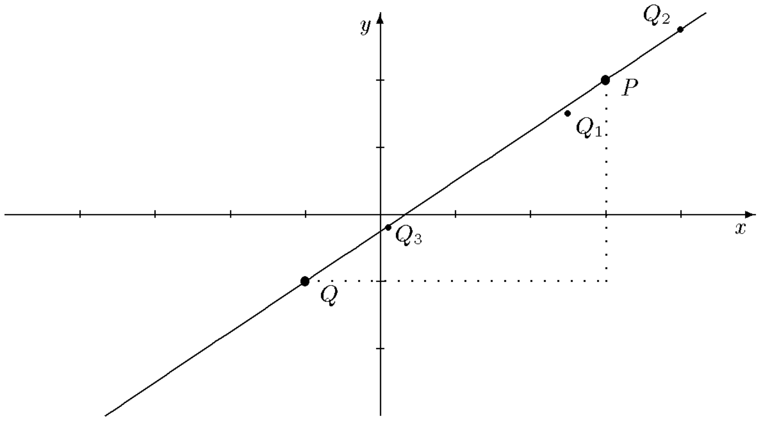
1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist die Gerade mit dem Anstieg $a$ und dem $y$-Achsenabschnitt $b$.
b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind Parallelen zur $x$-Achse.
c)/d) Die Lösungsmenge der Gleichung $y = 3$ in der Koordinatenebene ist die Parallele zur $x$(!)-Achse, die bei 3 die $y$-Achse schneidet. Sie hat den Anstieg 0. Die Lösungsmenge der Gleichung $x = 5$ ist die Parallele zur $y$(!)-Achse, die bei 5 die $x$-Achse schneidet. Für sie ist der Anstieg nicht definiert.

2)




3) a) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{2}{5}$ und dem $y$-Achsenabschnitt $-\frac{2}{15}$.
b) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{39}{2}$ und dem $y$-Achsenabschnitt $-9$.
c) Die Lösungsmenge ist die Parallele zur $x$-Achse mit dem $y$-Achsenabschnitt $\frac{2}{3}$.
d) Die Lösungsmenge ist die gesamte Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (da die gegebene Gleichung äquivalent ist zur Gleichung '$0 = 0$').

4) a) Die Skizze hat etwa folgende Gestalt.




Bei Zeichnung auf Millimeterpapier (bzw. bei Auswahl des 'richtigen' Steigungsdreiecks, siehe Skizze) kann man daraus den Anstieg $a = \frac{3}{4}$ entnehmen. Als $y$-Achsenabschnitt liest man etwa $-0,25$ ab. Eine (hinreichend genaue) Zeichnung

zeigt: Nur $Q_2$ liegt auf der Geraden. Völlige Sicherheit bietet die Zeichnung aber nicht. Dazu braucht man eine Gleichung für die Gerade.
c) Der Geradenanstieg ist $a = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$. Damit ist die Gerade Lösungsmenge der Gleichung $y = ax + b = \frac{3}{4}x + b$ und es muss noch $b$ bestimmt werden. Da der Punkt $P = (3 \mid 2)$ auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten diese Gleichung: $2 = a \cdot 3 + b = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, also $b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$. (Man kann statt $P$ auch den Punkt $Q$ benutzen, um $b$ zu berechnen. Führt man beide Rechnungen durch, so hat man eine gute Probe!)
Insgesamt erhalten wir als Gleichung für die Gerade: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Eine andere (äquivalente) Gleichung wäre etwa $3x - 4y = 1$.
d) Damit läßt sich nun leicht (und exakt) entscheiden, dass $Q_2$ auf der Geraden liegt (seine Koordinaten erfüllen die Gleichung: $\frac{11}{4} = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4}$). während $Q_1$ und $Q_3$ nicht darauf liegen ($\frac{3}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$).
e) Man bestimmt für $P_1$ und $P_2$ die fehlende $y$-Koordinate gerade so, dass die Geradengleichung erfüllt ist: Also $y_1 = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ für $P_1$ und $y_2 = \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}$ für $P_2$.
Bei $P_3$ ist die $y$-Koordinate $y_3 = 1$ bekannt und die $x$-Koordinate $x_3$ gesucht. Da $P_3$ auf der Geraden liegen soll, muss $x_3$ so gewählt werden, dass die Geradengleichung erfüllt ist: $1 = \frac{3}{4} \cdot x_3 - \frac{1}{4}$. Diese Gleichung löst man wie üblich und erhält als (einzige) Lösung $x_3 = \frac{5}{3}$. Damit sind die Punkte $P_1 = (2|\frac{5}{4})$, $P_2 = (-3| - \frac{5}{2})$ und $P_3 = (\frac{5}{3} \mid 1)$.

5) a) Anstieg $a = \dfrac{1-3}{1-2} = 2$, $y$-Achsenabschnitt $b = y_1 - ax_1 = 3 - 2 \cdot 2 = -1$.
b) $a = \dfrac{2-8}{-3-3} = 1$, $b = 8 - 3 = 5$. c) $a = \dfrac{3-4}{1-6} = \dfrac{1}{5}$, $b = 4 - \dfrac{1}{5} \cdot 6 = \dfrac{14}{5}$.
d) Der Anstieg $a$ ist nicht definiert; die Gerade ist eine Parallele zur $y$-Achse. (Dies merkt man spätestens daran, dass in der Formel für $a$ bei Einsetzen der gegebenen Punktkoordinaten im Nenner eine 0 auftaucht!)

6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn *sie durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax + b$ beschrieben werden kann.*
b) Der Graph einer Funktion $f$ mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist *eine Gerade in der Koordinatenebene mit dem Anstieg $a$ und dem $y$-Achsenabschnitt $b$.*
c) Alle Geraden in der Koordinatenebene, die *nicht parallel zur $y$-Achse* sind, kommen als Graph einer linearen Funktion vor.

7) a) Wegen $f(-1) = 3$ gehört der Punkt $P = (-1|3)$ zum Graphen von $f$, und wegen $f(3) = -3$ der Punkt $Q = (3| - 3)$ ebenfalls. Da $f$ eine lineare Funktion ist, ist ihr Graph eine Gerade. Man verbindet also die Punkte $P$ und $Q$ durch eine Gerade und erhält so den Graphen von $f$.
b) Da man zwei Punkte des Graphen kennt und dieser eine Gerade ist, kann man deren Anstieg und $y$-Achsenabschnitt berechnen:

$$a = \frac{3-(-3)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad b = 3 - a(-1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ein Term für die Funktion $f$ ist also gegeben durch $f(x) = ax + b = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

## Übungen (2)

1) a) Vervollständigen Sie: Eine Funktion ist ...
b) Jeder Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen $x$ bestimmt eine Funktion $f$. Wie lautet die Funktionsvorschrift?
c) Vervollständigen Sie: Der Graph einer Funktion $f$ ist die Menge

$$G(f) =$$

Jeder Graph einer Funktion $f$ ist Lösungsmenge einer passenden Gleichung. Welcher?
d) Stellt eine Kreislinie einen Funktionsgraphen dar?

2) Gegeben sind drei Punkte $A = (2, 3)$, $B = (-2, -1)$ und $C = (-3, 4)$.
a) Zeigen Sie, dass diese ein Dreieck bilden, d. h. dass sie nicht zusammen auf einer Geraden liegen.
b) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Dreiecksseiten.
c) Sind die Dreiecksseiten Funktionsgraphen? Wenn ja, von welchen Funktionen?
d) Ist das Dreieck rechtwinklig?

3) Der Graph der Funktion $f$ mit dem Funktionsterm $f(x) = 7x - 4$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ in genau einem Punkt.
a) Woran kann man dies unmittelbar erkennen?
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

4) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{bmatrix} 4x - 2y & = & 4 \\ -x - y & = & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2x - y & = & 5 \\ -4x + 2y & = & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 4x - 7y & = & 3 \\ 4x + y & = & -3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -4x - 2y & = & -2 \\ 6x + 3y & = & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 & = & 2x + y - 1 \\ 4x - y + 1 & = & 2x - y - 1 \end{bmatrix}$,

5) Was können Sie allgemein über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aussagen? Benutzen Sie geometrische Überlegungen.

## Übungen (2) — Lösungen

1) a) Eine Funktion ist *eine Zuordnung, die jeder Zahl (aus einer Menge $D$) eine eindeutig bestimmte Zahl zuordnet.*
b) Ein Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen $x$ bestimmt eine Funktion $f$ durch folgende Zuordnungsvorschrift: Zu einer Zahl $r \in \mathbb{Q}$ bestimmt man den Funktionswert, indem man die gegebene Zahl $r$ *in den Term einsetzt und den Term ausrechnet.* Das dabei berechnete Ergebnis ist dann der zugeordnete Wert $f(r)$. Definitionsbereich von $f$ ist dabei die Menge all der rationalen Zahlen $r$, die sinnvoll in den Term $f(x)$ eingesetzt werden können, also genau der Definitionsbereich des Terms.
c) Der Graph einer Funktion $f$ ist die Menge

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = f(x)\}\,.$$

Dies ist offenbar die Lösungsmenge der *Funktionsgleichung* $y = f(x)$.
d) Eine Kreislinie kann keinen Funktionsgraphen darstellen, weil Parallelen zur $y$-Achse die Kreislinie in der Regel in keinem oder in zwei Punkten schneiden. Funktionsgraphen dürfen von Parallelen zur $y$-Achse aber nur in einem Punkt geschnitten werden.

2) a) Wir bestimmen eine Gleichung für die Gerade $g$ durch $A$ und $B$, indem wir wie üblich den Anstieg $a$ und den $y$-Achsenabschnitt $b$ berechnen:

$$a = \frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1 \quad \text{und} \quad y = 1 \cdot x + b \implies 3 = 2 + b \iff b = 1\,.$$

Die Gerade durch $A, B$ hat als Gleichung $y = x+1$. Da der Punkt $C$ diese Gleichung nicht erfüllt, liegt er nicht auf der Geraden durch $A, B$.
b) Für die anderen Dreiecksseiten erhält man:

$$\begin{aligned} g(A,C):& \quad a = \frac{4-3}{-3-2} = -\frac{1}{5}\,,\ b = 3 - (-\frac{1}{5} \cdot 2) = \frac{17}{5}\,,\\ g(B,C):& \quad a = \frac{4-(-1)}{-3-(-2)} = -5\,,\ b = 4 - (-5 \cdot (-3)) = -11\,. \end{aligned}$$

Damit sind die gesuchten Gleichungen

$$g(A,B):\ y = x+1\,, \quad g(A,C):\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}\,, \quad g(B,C):\ y = -5x - 11\,.$$

c) Da keine der Dreiecksseiten parallel zur $y$-Achse verläuft, sind sie alle Funktionsgraphen. Funktionsterme dafür sind $f(x) = x+1$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ und $h(x) = -5x - 11$.
d) Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn zwei der drei Seiten senkrecht zueinander verlaufen, d. h. wenn zwei Seitenanstiege negative Kehrwerte voneinander sind. Die Anstiege der Seiten sind $1$, $-\dfrac{1}{5}$ und $-5$; keiner davon ist das Negative des Kehrwertes eines anderen: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

3) a) Der Graph von $f$ ist eine Gerade mit dem Anstieg 7 (und dem $y$-Achsenabschnitt $-4$), während die andere Gerade den Anstieg 1 hat. Da die Anstiege unterschiedlich sind, sind die Geraden nicht parallel, haben in der Ebene also einen Schnittpunkt.
b) Für den gesuchten Schnittpunkt $(x, y)$ gilt $y = f(x) = 7x-4$ und auch $y = x+1$. Also

$$7x - 4 = x + 1 \iff 6x = 5 \iff x = \frac{5}{6}\,.$$

Damit ist die $x$-Koordinate des Schnittpunktes bekannt und die $y$-Koordinate ergibt sich dann durch $y = x + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}$. Der gesuchte Schnittpunkt ist also $S = (\frac{5}{6}, \frac{11}{6})$.

4) a) Wir lösen eine Gleichung nach $y$ auf, etwa die zweite $y = -x - 4$, und setzen dann in die erste ein:

$$4x - 2(-x - 4) = 4 \iff 6x = -4 \iff x = -\frac{2}{3}\,.$$

Damit ergibt sich $y = -(-\frac{2}{3}) - 4 = -\frac{10}{3}$; der einzige Lösungspunkt ist $(-\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$.
b) $4x + y = -3 \iff y = -4x - 3$, also

$$4x - 7(-4x - 3) = 3 \iff 32x = -18 \iff x = -\frac{9}{16}\,.$$

Dies ergibt $y = 4 \cdot \frac{9}{16} - 3 = -\frac{3}{4}$; der einzige Lösungspunkt ist $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$.
c) Zunächst formt man beide Gleichungen in die Standarform $Ax + By = C$ um:

$$\begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 & = & 2x + y - 1 \\ 4x - y + 1 & = & 2x - y - 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x + 6y & = & 0 \\ 2x & = & -2 \end{bmatrix}$$

Hier macht es keinen Sinn, nach $y$ aufzulösen, da die zweite Gleichung $y$ gar nicht enthält. Vielmehr lösen wir die zweite Gleichung nach $x$ auf: $x = -1$, und setzen dies in die erste ein: $-2 + 6y = 0 \iff y = \frac{1}{3}$. Die einzige Lösung ist $(-1, \frac{1}{3})$.
d) Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung: $2x - y = 5 \iff y = 2x - 5$ in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt den Widerspruch $-4x + 2(2x - 5) = 2 \iff -10 = 2$.
e) Auflösen nach $y$ ergibt $y = -2x + 1$ und einsetzen dann

$$6x + 3(-2x + 1) = 3 \iff 3 = 3\,.$$

Dies bedeutet, dass $x$ beliebig gewählt werden, während $y = -2x+1$ sein muss. Es gibt also unendlich viele Lösungspunkte; es sind dies genau die Punkte der Form $(x, -2x + 1)$.
Geometrisch lassen sich die letzten beiden Ergebnisse sehr gut verstehen: In beiden Fällen stellen die beiden Einzelgleichungen *parallele* Geraden dar (d) Anstieg 2, e) Anstieg $-2$). Während im Falle d) die beiden Geraden verschieden sind und daher keinen Punkt gemeinsam haben, sind sie im Falle e) identisch: Die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems ist eine komplette Gerade, nämlich die mit der Gleichung $y = -2x + 1$.

5) *Ein lineares Gleichungssystem (mit 2 Variablen) hat keine, eine oder unendliche viele Lösungen.*

Zur Begründung betrachten wir die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen. Diese sind (in der Regel[1]) Geraden und die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist damit der Durchschnitt zweier Geraden. Nun schneiden sich zwei Geraden in *einem* Punkt, es sei denn, sie sind parallel. In diesem Falle gäbe es *keinen* gemeinsamen Punkt oder die Geraden sind sogar identisch und *alle* Geradenpunkte sind Lösungen des Gleichungssystems.

[1] Die Ausnahmen von dieser Regel sind lineare Gleichungen $ax+by=c$ mit $a=b=0$. Diese stellen keine Gerade dar, sondern die leere Menge (bei $c \neq 0$) oder die ganze Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (bei $c = 0$). Also bleibt auch in diesen Randfällen die obige Aussage richtig. Sie gilt sogar für mehr als 2 Variable und lässt sich dann noch verfeinern (siehe Lineare Algebra, 5. Semester).

## Übungen (3)

1) Auf den Skizzenblättern Normalparabeln (1) bzw. (2) sind ausschließlich Normalparabeln skizziert.
a) Bestimmen Sie Gleichungen für die auf Blatt (1) skizzierten Graphen.
b) Führen Sie dasselbe für Blatt (2) durch.

2) Beschreiben Sie die Lösungsmengen der folgenden Relationsgleichungen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $y = x^2 + 1$, | g) | $y + 6 = x^2$, |
| b) | $y = -x^2 - 4$, | h) | $y - 4 = -x^2$, |
| c) | $y = -(x + 2)^2$, | i) | $y - (x + 4)^2 + 1 = 0$, |
| d) | $y = (x - 2)^2 + 3$, | j) | $y = -((x - 2)^2 + 3)$, |
| e) | $y = (x + 1)^2 + 4$, | k) | $y - 2 = (x + 2)^2$, |
| f) | $y = 3x - 4$, | l) | $y^2 = x$. |

3) Welche der nachfolgenden Relationsgleichungen lassen sich äquivalent in Scheitelpunktsform umformen? Geben Sie die Lösungsmenge an.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $y = x^2 + 2x + 1$, | f) | $y + 2 = -x^2 + 2x - 1$, |
| b) | $y = -x^2 - 4x - 4$, | g) | $y - 1 = x^2 - 2x$, |
| c) | $y = x^2 - 6x + 9$, | h) | $y - 4 = x^2 - 4x$, |
| d) | $y - 1 = x^2 + 4x + 4$, | i) | $y = x^2 - 4x$, |
| e) | $y + 3 = x^2 - 10x + 25$, | j) | $y = x^2 - 4x + 5$. |

4) Bestimmen Sie die Graphen der Funktionen mit den nachfolgend definierten Funktionstermen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = x^2 + 4x - 7$ , | f) | $f(x) = (-x + 2)^2 + 5$, |
| b) | $f(x) = (x - 4)^2 + 2x$, | g) | $f(x) = x^2 + 7x - 1$, |
| c) | $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, | h) | $f(x) = -x^2 - x + 1$, |
| d) | $f(x) = x^2 + 5x - 2$, | i) | $f(x) = (x + 2)^2 - x^2 - 4$ , |
| e) | $f(x) = -(x - 2)^2 + 8x + 3$, | j) | $f(x) = x^2 + 5(x + 1)$. |

5) Bestimmen Sie die Graphen der nachfolgend definierten Funktionen.

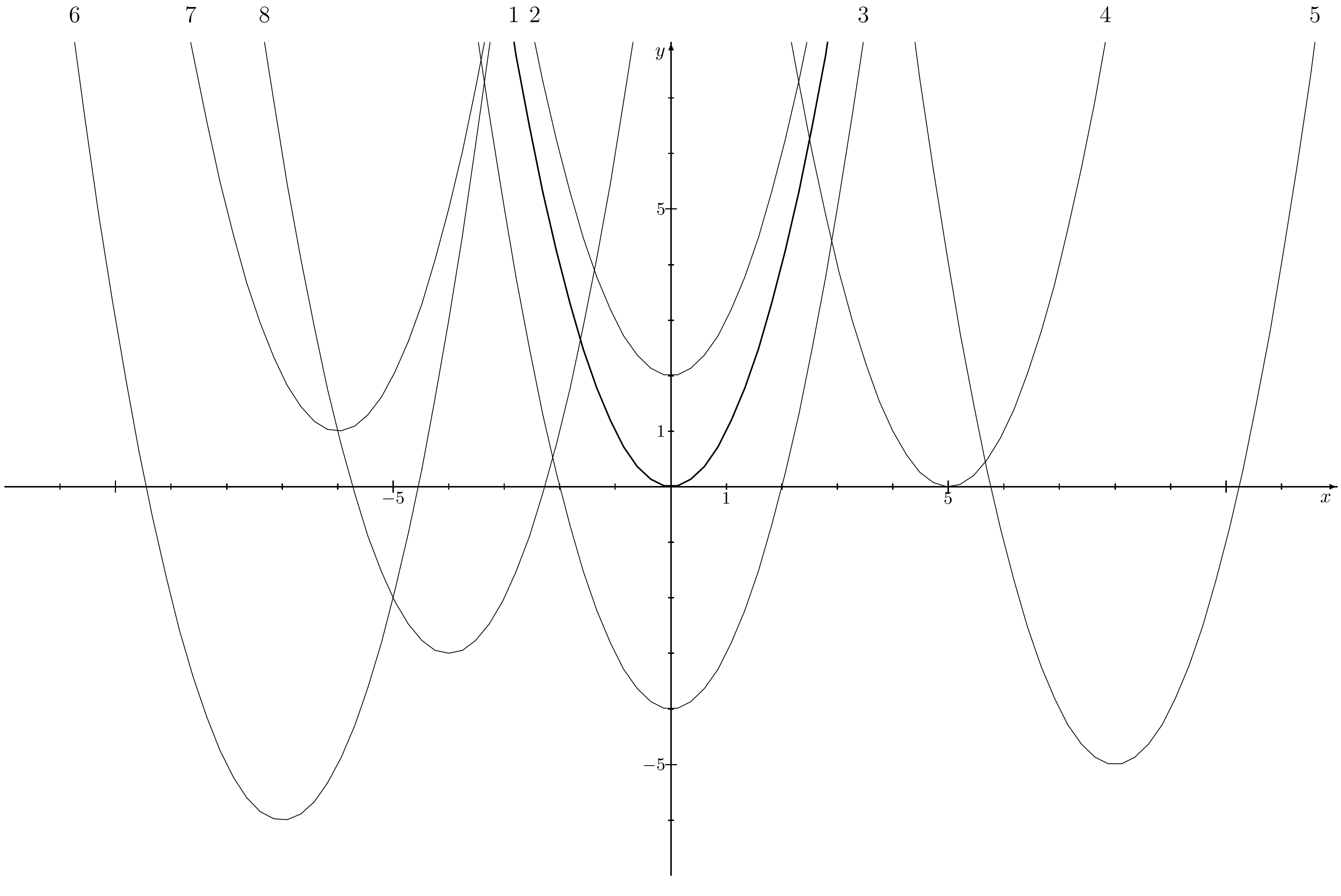
| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = (2x - 2)^2 - (x - 1)^2 + 5$, | d) | $f(x) = 4x^3 + (2x^2 + 1)(1 - 2x)$, |
| b) | $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1)$, | e) | $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 7$, |
| c) | $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$, | f) | $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)(3 - x)$. |

6) a) Gegeben ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (4, 2)$. Wie lautet eine Gleichung für die Symmetrieachse dieser Parabel? In wievielen Punkten trifft die Parabel die $x$-Achse?
b) Man verschiebt die Parabel aus a) um 3 Einheiten nach unten und um 2 Einheiten nach links. Bestimmen Sie eine Gleichung für diese verschobene Parabel und beantworten Sie für diese neue Parabel die Fragen von a).

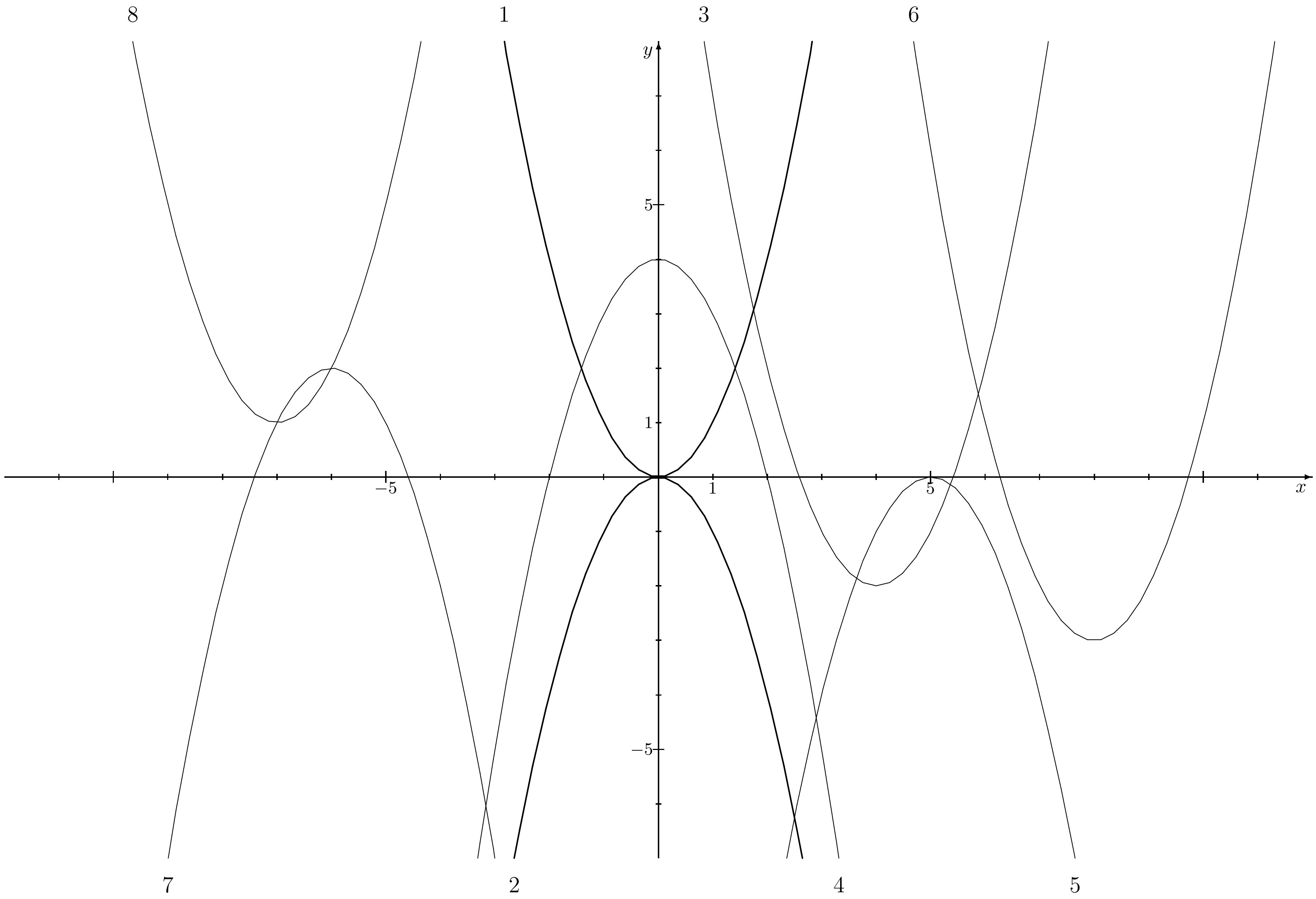
7) Gegeben ist die Funktion $f$ mit dem Term $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$. Untersuchen Sie, welche Werte $f$ annehmen kann. Gibt es einen *kleinsten* Wert $f(x)$, den die Funktion $f$ annimmt? An welcher Stelle $x$ nimmt sie ihn ggf. an? Gibt es auch einen größten Wert, den $f$ annimmt?

8) Eine Parabel hat ihren Scheitel im Punkt $S = (2, -1)$ und verläuft durch den Punkt $P = (3, 1)$. Bestimmen Sie eine Gleichung, deren Lösungsmenge diese Parabel ist. In welche Richtung ist die Parabel geöffnet? Ist sie enger oder weiter als die Normalparabel?

# Normalparabeln (1)



# Normalparabeln (2)



## Übungen (3) — Lösungen

1) a) Alle skizzierten Normalparabeln entstehen durch Verschiebung aus der Normalparabel Nr. 1 mit der Gleichung $y = x^2$. Man muß nur aus der Lage des Scheitelpunkts die Verschiebung ablesen und erhält dann die folgenden Gleichungen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1: | $y = x^2$ | 5: | $y = (x-8)^2 - 5$ |
| 2: | $y = x^2 + 2$ | 6: | $y = (x+7)^2 - 6$ |
| 3: | $y = x^2 - 4$ | 7: | $y = (x+6)^2 + 1$ |
| 4: | $y = (x-5)^2$ | 8: | $y = (x+4)^2 - 3$ |

Man erhält also in allen Fällen ein Gleichung der Form $y = (x - x_S)^2 + y_S$, wobei $(x_S, y_S) = S$ der Scheitelpunkt ist. Man nennt diese Gleichung auch die *Scheitelpunktsgleichung* für die Parabel.

b) Hier sind einige Normalparabeln nach unten geöffnet. Sie erhält man, indem man zunächst die Normalparabel Nr. 1 an der $x$-Achse spiegelt (das Ergebnis ist die ebenfalls dicker gezeichnete Normalparabel Nr. 2 mit der Gleichung $-y = x^2$ bzw. $y = -x^2$) und diese dann verschiebt. Man erhält also für die *nach oben geöffneten* Normalparabeln eine Gleichung in der bisher behandelten Scheitelpunktsform $y = (x - x_S)^2 + y_S$, während sich für die *nach unten geöffneten* Normalparabeln Gleichungen in der Form $y = -(x-x_S)^2 + y_S$ ergeben. Beide Gleichungstypen kann man zusammenfassen als:

$$\text{Allgemeine Scheitelpunktsgleichung:} \qquad y = a(x - x_S)^2 + y_S\,.$$

Dabei ist hier $a = \pm 1$; und zwar $a = +1$ bei nach *oben* und $a = -1$ bei nach *unten* geöffneten Normalparabeln.

Als Gleichungen für die 'Normalparabeln (2)' erhält man so:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1: | $y = x^2$ | 5: | $y = -(x-5)^2$ |
| 2: | $y = -x^2$ | 6: | $y = (x-8)^2 - 3$ |
| 3: | $y = (x-4)^2 - 2$ | 7: | $y = -(x+6)^2 + 2$ |
| 4: | $y = -x^2 + 4$ | 8: | $y = (x+7)^2 + 1$ |

2) Die Gleichungen a)–e) haben sämtlich die Form $y = \pm(x - x_S)^2 + y_S$, so dass die Lösungsmengen Normalparabeln sind. Der Scheitel ist dann durch $S = (x_S, y_S)$ gegeben und das Vorzeichen des Quadrats $(x - x_S)^2$ gibt die Öffnungsrichtung an. Damit ist dann die Lage der Normalparabeln eindeutig beschrieben:

| | | |
|---|---|---|
| a) | Scheitel $S = (0, 1)$, | nach oben geöffnet, |
| b) | Scheitel $S = (0, -4)$, | nach unten geöffnet, |
| c) | Scheitel $S = (-2, 0)$, | nach unten geöffnet, |
| d) | Scheitel $S = (2, 3)$, | nach oben geöffnet, |
| e) | Scheitel $S = (-1, 4)$, | nach oben geöffnet. |

f) ist eine lineare Funktionsgleichung. Die Lösungsmenge also eine Gerade, und zwar mit dem $y$-Achsenabschnitt $-4$ und Anstieg 3.

Die Gleichungen g)–k) lassen sich durch einfache Äquivalenzumformungen in Scheitelpunktsform bringen, so dass die Lösungsmenge ebenfalls Normalparabeln sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| g) | $\iff y = x^2 - 6$, | Scheitel $S = (0, -6)$, | nach oben geöffnet, |
| h) | $\iff y = -x^2 + 4$, | Scheitel $S = (0, 4)$, | nach unten geöffnet, |
| i) | $\iff y = (x+4)^2 - 1$, | Scheitel $S = (-4, -1)$, | nach oben geöffnet, |
| j) | $\iff y = -(x-2)^2 - 3$, | Scheitel $S = (2, -3)$, | nach unten geöffnet, |

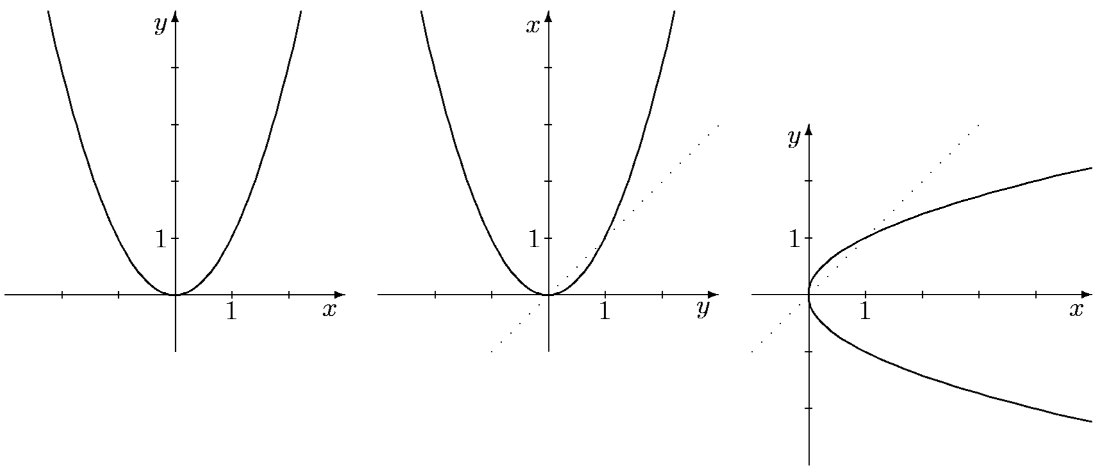
k) $\iff y = (x+2)^2 + 2$, Scheitel $S = (-2, 2)$, nach oben geöffnet.

l) Die gegebene Gleichung $y^2 = x$ ist zwar auch quadratisch, aber hier ist das $y$ quadriert und nicht die Variable $x$. Daher hat die Gleichung zwei verschiedene Lösungen mit gleicher $x$-Koordinate: $(1, 1)$ und $(1, -1)$. Also kann sie nicht äquivalent zu einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ sein und erst recht nicht in Scheitelpunktsform $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ umgeformt werden.

Dennoch kann man die Ähnlichkeit mit einer Scheitelpunktsgleichung benutzen, um die Lösungsmenge zu ermitteln. Vertauscht man in der gegebenen Gleichung $y^2 = x$ die Variablen $x$ und $y$, so erhält man die bekannte Gleichung $x^2 = y$; deren Lösungsmenge ist die nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel im Koordinatenursprung (erste Skizze).

Welche geometrische Bedeutung hat nun die Vertauschung der beiden Variablen? Zunächst einmal bedeutet dies, dass man die Benennung der Koordinatenachsen ausgetauscht hat (zweite Skizze). Um danach wieder die vereinbarte Lage der Achsen zu erhalten, muss man das gesamte Bild an der (gestrichelt gezeichneten) Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten *spiegeln*! Dann nimmt die $y$-Achse die Lage der $x$-Achse ein und umgekehrt. Dies führt dann zur dritten Skizze. Die Lösungsmenge von $x = y^2$ ist also (im korrekt orientierten Koordinatensystem) eine nach rechts geöffnete Normalparabel mit der $x$-Achse als Symmetrieachse und dem Scheitelpunkt $S = (0, 0)$!

**Graph von $y = x^2$** **Umbenannte Achsen** **Graph von $x = y^2$**




Die obigen Überlegungen gelten allgemein für beliebige Relationen.Vertauscht man in einer Relations(un)gleichung die Variablen $x$ und $y$, so erhält man die sog. *Umkehrrelation.* Deren Graph entsteht aus dem ursprünglichen durch Spiegelung an der $45^0$-Linie. Beachten Sie, dass der letzte Schritt nicht eine Drehung um $90^0$ bedeutet, denn dabei würde dann die $x$-Achse zwar richtig liegen, aber die $y$-Achse würde *nach unten* weisen.

3) Bei dieser Aufgabe benutzt man die binomischen Formeln, um die gegebenen Gleichungen in Scheitelpunktsform umzuformen. Die Lösungsmengen sind also wiederum Normalparabeln, deren Scheitelpunkt und Öffnungsrichtung nachfolgend angegeben sind:

a) $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, Scheitel $S = (-1, 0)$, nach oben offen,
b) $y = -(x^2 + 4x + 4) = -(x+2)^2$, Scheitel $S = (-2, 0)$, nach unten offen,
c) $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, Scheitel $S = (3, 0)$, nach oben offen,

d) $\iff y = (x+2)^2 + 1,$ Scheitel $S = (-2, 1)$, nach oben offen,
e) $\iff y = (x-5)^2 - 3,$ Scheitel $S = (5, -3)$, nach oben offen,
f) $y + 2 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$
$\iff y = -(x-1)^2 - 2,$ Scheitel $S = (1, -2)$, nach unten offen,
g) $\iff y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$ Scheitel $S = (1, 0)$, nach oben offen,
h) $\iff y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2,$ Scheitel $S = (2, 0)$, nach oben offen,
i) $\iff y + 4 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
$\iff y = (x-2)^2 - 4,$ Scheitel $S = (2, -4)$, nach oben offen,
j) $y = x^2 - 4x + 4 \,+\, 1 = (x-2)^2 + 1,$ Scheitel $S = (2, 1)$, nach oben offen.

Die Idee für den Ansatz bei i) ergibt sich aus dem Vergleich mit h), wo auf der rechten Seite derselbe Term steht. Dieser wurde durch Addition von 4 zu einem vollständigen Quadrat; also kann man bei i) dies ebenfalls durchführen, um zur gewünschten Scheitelpunktsform zu kommen. Ähnlich ging man bei j) vor, nur dass man statt 4 zu addieren die 5 in $4 + 1$ aufspaltete, um ein volles Quadrat zu erhalten.

4) Die meisten Terme lassen sich mittels quadratischer Ergänzung in Scheitelpunktsform überführen, so dass der Graph eine Parabel ist, deren Scheitel und Öffnungsrichtung ablesbar sind.
a) $f(x) = x^2 + 4x - 7 = x^2 + 4x + \,2^2 - 4\, - 7 = (x+2)^2 - 11$. Der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (-2, -11)$.
b) $f(x) = (x-4)^2 + 2x = x^2 - 8x + 16 + 2x = x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 16 = (x-3)^2 + 7$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (3, 7)$.
c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6 = -(x^2 - 4x) - 6 = -(x^2 - 4x + 2^2 - 4) - 6 = -((x-2)^2 - 4) - 6 = -(x-2)^2 + 4 - 6 = -(x-2)^2 - 2$. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (2, -2)$.
d) $f(x) = x^2 + 5x - 2 = x^2 + 5x + \,(\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}\, - 2 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{33}{4}$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (-\frac{5}{2}, -\frac{33}{4})$.
e) $f(x) = -(x^2 - 4x + 4) + 8x + 3 = -x^2 + 12x - 1 = -(x^2 - 12x + 6^2 - 36) - 1 = -((x-6)^2 - 36) - 1 = -(x-6)^2 + 35$; der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (6, 35)$.
f) $f(x) = (-x+2)^2 + 5 = (-(x-2))^2 + 5 = (x-2)^2 + 5$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (2, 5)$.
g) $f(x) = x^2 + 7x + (\frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} - 1 = (x + \frac{7}{2})^2 - \frac{53}{4}$; der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-\frac{7}{2}, -\frac{53}{4})$.
h) $f(x) = -(x^2 + x) + 1 = -(x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 1 = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + 1 = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$; der Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.
i) $f(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4 = 4x$; der Graph ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Anstieg 4.
j) $f(x) = x^2 + 5(x+1) = x^2 + 5x + 5 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 5 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4}$. Der Graph ist also eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4})$.

5) a) $f(x) = (2(x-1))^2 - (x-1)^2 + 5 = 4(x-1)^2 - (x-1)^2 + 5 = 3(x-1)^2 + 5$. Also ist der Graph von $f$ eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S = (1, 5)$; sie ist enger als die Normalparabel.
b) $f(x) = 2(x-1)^2 - 3(x-1) = 2(x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 - 3x + 3 = 2x^2 - 7x + 5$. Die Funktion ist also quadratisch, ihr Graph folglich eine Parabel, und zwar nach oben geöffnet und enger als die Normalparabel (Faktor vor $x^2$ ist 2, also positiv und betraglich größer als 1). Um die Lage der Parabel, also den Scheitelpunkt, zu bestimmen, überführen wir den quadratischen Term $f(x)$ in

Scheitelpunktsform:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 7x + 5 = 2(x^2 - \frac{7}{2}x) + 5 = 2(x^2 - \frac{7}{2}x + (\frac{7}{4})^2 - \frac{49}{16}) + 5 \\ &= 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{49}{8} + \frac{40}{8} = 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion $f$ ist also eine nach oben geöffnete Parabel, enger als eine Normalparabel, mit dem Scheitelpunkt $S = (\frac{7}{4}, -\frac{9}{8})$.
c) Wieder liegt eine quadratische Funktion vor; der Graph ist eine Parabel, nach unten geöffnet und enger als die Normalparabel. Wir bestimmen nun noch den Scheitelpunkt: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5 = -3(x^2 - 2x) + 5 = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5 = -3(x-1)^2 + 3 + 5 = -3(x-1)^2 + 8$, der Scheitel ist $S = (1, 8)$.
d) $f(x) = 4x^3 + (2x^2 + 1)(1 - 2x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x^3 + 1 - 2x = 2x^2 - 2x + 1$. Wieder ist die Funktion $f$ quadratisch, ihr Graph eine nach oben geöffnete Parabel, die enger als eine Normalparabel ist. Scheitelpunktsbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 2x + 1 = 2(x^2 - x) + 1 = 2(x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 1 \\ &= 2((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
e) Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel, weiter als die Normalparabel. Wir berechnen den Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^2 + 2x - 7 = \frac{1}{4}(x^2 + 8x) - 7 = \frac{1}{4}(x^2 + 8x + 4^2 - 16) - 7 \\ &= \frac{1}{4}(x+4)^2 - \frac{1}{4} \cdot 16 - 7 = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 11\,. \end{aligned}$$

Der Scheitel ist $S = (-4, -11)$.
f) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)(3-x) = \frac{1}{3}(3x - x^2 - 6 + 2x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$. Die Funktion ist also quadratisch und ihr Graph somit eine Parabel: Diese ist nach unten geöffnet und weiter als die Normalparabel. Wir bestimmen wie üblich den Scheitelpunkt:

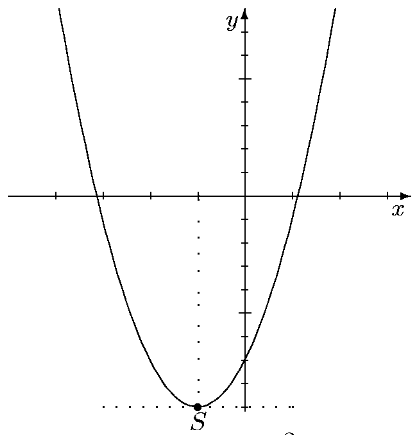
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}(x^2 - 5x) - 2 = -\frac{1}{3}(x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}) - 2 \\ &= -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{12} - \frac{24}{12} = -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Der Scheitel ist folglich $S = (\frac{5}{2}, \frac{1}{12})$.

6) a) Eine Gleichung für die Symmetrieachse ist $x = 4$. Da der Scheitel oberhalb der $x$-Achse liegt und die Parabel nach unten geöffnet ist, trifft sie die $x$-Achse in zwei Punkten.
b) Die verschobene Parabel ist wieder eine nach unten geöffnete Normalparabel, jetzt allerdings mit dem Scheitelpunkt bei $(4-2, 2-3) = (2, -1)$. Eine Funktion $f$ mit dieser Parabel als Graph ist also gegeben durch $f(x) = -(x-2)^2 - 1$. (Scheitelpunktsform $a(x - x_S)^2 + y_S$ mit $x_S = 2$ und $y_S = -1$; der Faktor $a$ ist in diesem Falle $-1$, da die Parabel eine *nach unten* geöffnete *Normal*parabel ist.) Diese

Parabel trifft die $x$-Achse nicht, da der Scheitel *unter* der $x$-Achse liegt ($y_S < 0$) und die Parabel nach *unten* geöffnet ist. Die Symmetrieachse hat als Gleichung $x = 2$.

7) *Geometrische* Argumentation: Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Daher gibt es keinen größten Wert, den $f$ annimmt, wohl aber einen kleinsten. Der kleinstmögliche Wert $f(x)$, den die Funktion annimmt, ist die $y$-Koordinate des Scheitelpunktes. (Unterhalb der durch den Scheitelpunkt verlaufenden Parallele zur $x$-Achse liegen keine Punkte des Graphen, also gibt es keine kleineren Funktionswerte von $f$.)




Wir bestimmen also den Scheitelpunkt des Graphen von $f$: $f(x) = 2(x^2 + 2x) - 7 = 2((x + 1)^2 - 1) - 7 = 2(x + 1)^2 - 9$. Damit ist der Scheitel $S = (-1, -9)$, der kleinste Wert von $f$ also $-9$. Dieser Wert wird als Funktionswert $f(x)$ gerade an der Stelle $x = -1$ angenommen ($-1$ ist die $x$-Koordinate des Scheitelpunkts). (Probe: $f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 7 = 2 - 11 = -9$)
Ausgehend von der Scheitelpunktsform von $f(x)$ kann man auch rein *algebraisch* argumentieren: Es ist $f(x) = -9 + 2(x + 1)^2$, die Werte von $f$ erhält man also, indem man zu $-9$ das Doppelte eines Quadrats (!) hinzuaddiert: es wird also zu $-9$ eine nicht-negative Zahl hinzuaddiert. Damit sind alle Werte $f(x) \geq -9$, und der Wert $-9$ selbst wird angenommen, wenn $2(x+1)^2 = 0$ ist, also wenn $x+1 = 0$, d. h. $x = -1$ ist.

8) Eine Parabel mit dem Scheitel $S = (2, -1)$ ist Graph einer Funktion $f$ mit dem Term $f(x) = a(x-2)^2-1$ mit einem unbekannten $a \neq 0$. Als Graph dieser Funktion ist die Parabel gerade die Lösungsmenge der Gleichung $y = a(x - 2)^2 - 1$. Es gilt nun $a$ zu bestimmen. Da der Punkt $P = (3, 1)$ auf der Parabel liegen soll, muß er die obige Gleichung erfüllen, also muß gelten: $1 = a(3 - 2)^2 - 1 = a - 1$. Dies ergibt $a = 2$, und $y = 2(x - 2)^2 - 1$ ist eine Gleichung mit den geforderten Eigenschaften. Da $a = 2$ ist, ist die Parabel nach oben geöffnet und enger als eine Normalparabel.

## Übungen (4)

1) a) Wiederholen Sie die Überlegungen zum Gleichungslösen mittels Faktorisierung (Abschnitt 3.f.).
b) Bestimmen Sie eine quadratische Gleichung mit vorgegebenen Lösungen 11 und $-17$.

2) Lösen Sie die nachfolgenden quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung:
a) $x^2 - 8x + 15 = 0$, b) $x^2 + 4x = 21$, c) $x^2 + 6x + 17 = 0$,
d) $x^2 - 18x + 82 = 0$, e) $x^2 + 7x + 6 = 0$, f) $4x^2 - 12x + 14 = 0$,
g) $6x^2 + 5x = 6$, h) $4x^2 = 15x + 4$, i) $12x^2 = 13x + 35$.

3) Wir gehen von einem normierten quadratischen Term $x^2 + px + q$ aus und wollen diesen *faktorisieren.* Wir setzen daher $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ an und suchen $a, b$.
a) Zeigen Sie: Ist $p = a + b$ die *Summe* und $q = ab$ das *Produkt* von $a, b$, so gilt tatsächlich diese Faktorisierung $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$.
b) Man benutzt dies, um gegebene Terme zu faktorisieren, indem man zunächst $q$ als Produkt von zwei Zahlen $a, b$ darstellt und dann überprüft, ob $p$ die Summe dieser Zahlen ist. Gelingt dies, hat man eine Faktorisierung des gegebenen Terms. (Es gelingt aber nicht immer!) Führen Sie dies für alle normierten quadratischen Terme der Aufgabe 2) durch.
c) Bestimmen Sie nun mit den gefundenen Faktorisierungen erneut die Lösungen der entsprechenden obigen Gleichungen. (Vergleichen Sie den Rechenaufwand!)

4) a) In welchen Punkten schneidet die nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S = (-2, 4)$ die Gerade durch die Punkte $P = (-3, 1)$, $Q = (2, 6)$?
b) Was ergibt sich bei nach oben geöffneter Parabel (bei ansonsten unveränderten Daten)?

5) Bestimmen Sie jeweils die Schnittpunkte der gegebenen Parabeln $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$:
   a) $\mathcal{P}_1$: Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S_1 = (2, -1)$,
   $\mathcal{P}_2$: Nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt $S_2 = (0, 9)$.
   b) $\mathcal{P}_1$: Graph der Funktion $f$ mit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$,
   $\mathcal{P}_2$: Nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel $S = (-2, 6)$.
   c) Nach oben geöffnete Normalparabeln mit den Scheiteln $S_1 = (3, -4)$ und $S_2 = (2, 5)$.
   d) Nach unten geöffnete Normalparabeln mit den Scheiteln $S_1 = (2, 5)$ und $S_2 = (2, -3)$.

6) Zeigen Sie allgemein: Zwei verschiedene Normalparabeln mit gleicher Öffnungsrichtung können sich höchstens einmal schneiden. Sie schneiden sich genau dann, wenn ihre Symmetrieachsen verschieden sind.
[Tip: Analysieren Sie genau Ihre Lösung zu c) und d) der vorangehenden Aufgabe.]

## Übungen (4) — Lösungen

1) a) Grundlage des Gleichungslösens durch Faktorisieren ist die Tatsache, dass ein *Produkt* dann und nur dann *Null* ist, wenn bereits einer der Faktoren Null ist:

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \ \vee \ B = 0\,. \tag{$*$}$$

Diese Tatsache kann man immer dann anwenden, wenn eine Gleichung vorliegt, bei der

1. auf einer Seite ein *faktorisierter* Term, also ein Produkt steht, und
2. auf der anderen Seite 0 steht!

Nur wenn beides vorliegt, kann man mittels ($*$) die eine Gleichung *aufspalten* in *zwei* (in der Tendenz einfachere) Gleichungen. Zum Beispiel

$$(x-1)(x+2) = 0 \iff x-1=0 \ \vee \ x+2=0 \iff x=1 \ \vee \ x=-2.$$

Auf diese Weise hat man *eine quadratische* Gleichung auf *zwei lineare* Gleichungen zurückgeführt und dadurch leicht lösen können.

b) Man setzt umgekehrt zwei lineare Gleichungen mit den geforderten Lösungen zusammen zu einer quadratischen Gleichung:

$$(x-11)(x+17)=0 \quad \text{bzw. durch Ausmultiplizieren} \quad x^2+6x-187=0\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen 11 und $-17$.

2) Ergebnisse:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\mathbb{L} = \{3\,,\,5\}$, | b) $\mathbb{L} = \{-7\,,\,3\}$, | c) $\mathbb{L} = \emptyset$, |
| d) $\mathbb{L} = \emptyset$, | e) $\mathbb{L} = \{-6\,,\,-1\}$, | f) $\mathbb{L} = \emptyset$, |
| g) $\mathbb{L} = \{-\frac{3}{2}\,,\,\frac{2}{3}\}$, | h) $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{4}\,,\,4\}$, | i) $\mathbb{L} = \{-\frac{5}{4}\,,\,\frac{7}{3}\}$. |

Rechnungen:

a) $x^2-8x+15=0 \iff x^2-8x=-15 \iff x^2-8x+4^2=-15+16 \iff (x-4)^2=1=1^2 \iff x-4=\pm1 \iff x=4\pm1 \iff x=5 \ \vee \ x=3$: $\mathbb{L} = \{3\,,\,5\}$.

b) $x^2+4x=21 \iff x^2+4x+2^2=21+4=25 \iff (x+2)^2=5^2 \iff x+2=\pm5 \iff x=-2\pm5 \iff x=3 \ \vee \ x=-7$: $\mathbb{L} = \{-7\,,\,3\}$.

c) $x^2+6x+17=0 \iff x^2+6x+3^2=-17+9 \iff (x+3)^2=-8$. Da Quadrate nie negativ sein können, hat die Gleichung keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

d) $x^2-18x+82=0 \iff x^2-18x+9^2=-82+81 \iff (x-9)^2=-1$. Wieder gibt es keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

e) $x^2+7x+6=0 \iff x^2+7x+(\frac{7}{2})^2=-6+\frac{49}{4}=\frac{25}{4} \iff (x+\frac{7}{2})^2=(\frac{5}{2})^2 \iff x+\frac{7}{2}=\pm\frac{5}{2} \iff x=-\frac{7}{2}\pm\frac{5}{2} \iff x=-1 \ \vee \ x=-6$: $\mathbb{L} = \{-1, -6\}$.

f) $4x^2-12x+14=0 \iff x^2-3x=-\frac{7}{2} \iff x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=-\frac{7}{2}+\frac{9}{4}=-\frac{5}{4} \iff (x-\frac{3}{2})^2=-\frac{5}{4}<0$. Da Quadrate nicht negativ sein können, gibt es keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

g) $6x^2+5x=6 \iff x^2+\frac{5}{6}x+(\frac{5}{12})^2=1+\frac{25}{144}=\frac{169}{144} \iff (x+\frac{5}{12})^2=(\frac{13}{12})^2 \iff$

$x = -\frac{5}{12} \pm \frac{13}{12} \iff x = \frac{2}{3} \ \vee\ x = -\frac{3}{2}$: $\mathbb{L} = \{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\}$.
h) $4x^2 = 15x + 4 \iff x^2 - \frac{15}{4}x = 1 \iff x^2 - \frac{15}{4}x + (\frac{15}{8})^2 = 1 + \frac{225}{64} = \frac{289}{64} \iff (x - \frac{15}{8})^2 = (\frac{17}{8})^2 \iff x = \frac{15}{8} \pm \frac{17}{8} \iff x = 4 \ \vee\ x = -\frac{1}{4}$: $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{4}\,,\ 4\}$.
i) $12x^2 = 13x + 35 \iff x^2 - \frac{13}{12}x + (\frac{13}{24})^2 = \frac{35}{12} + \frac{169}{576} = \frac{1849}{576} \iff (x - \frac{13}{24})^2 = (\frac{43}{24})^2 \iff x = \frac{13 \pm 43}{24} \iff x = \frac{56}{24} = \frac{7}{3} \ \vee\ x = -\frac{30}{24} = -\frac{5}{4}$: $\mathbb{L} = \{-\frac{5}{4}\,,\ \frac{7}{3}\}$.

3) a) Durch Ausmultiplizieren erhält man $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$. Ist also $p = a + b$ und $q = ab$, so folgt selbstverständlich

$$x^2 + px + q = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)\,.$$

b) Für $\underline{x^2 - 8x + 15}$ betrachtet man mögliche Faktorisierungen von $q = 15$ und überprüft dann, ob die *Summe* der Faktoren $p = -8$ ergibt:

$$15 = (\pm 1) \cdot (\pm 15) = (\pm 3) \cdot (\pm 5)$$

sind sämtliche Faktorisierungen von 15 in zwei Faktoren $a, b \in \mathbb{Z}$. (Dabei sind jeweils die oben- oder die untenstehenden Vorzeichen zu kombinieren. Es gibt also 4 Zerlegungen.) Berechnet man die Summen von $a, b$, so erhält man in einem Falle $(-3) + (-5) = -8 = p$. Also

$$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15\,.$$

(Zur Kontrolle überprüfe man die gefundene Faktorisierung, indem man das Produkt ausmultipliziert! Dies vermeidet Fehler – insbesondere mit den Vorzeichen – und ist zugleich der zweifelsfreie *Nachweis* für die Faktorisierung! Die vorherigen Überlegungen zum Auffinden von $a, b$ sind dann unwichtig.)
Ähnlich erhält man aus $21 = 3 \cdot 7$ die Zerlegung $\underline{x^2 + 4x - 21} = (x + 7)(x - 3)$.
Bei $\underline{x^2 + 6x + 17}$ findet man für die Primzahl 17 nur die beiden Zerlegungen $17 = (\pm 1) \cdot (\pm 17)$, bei denen sich nicht die Summe 6 ergibt. Die hier beschriebene Methode *versagt!* In diesem Falle muss man zur quadratischen Ergänzung zurückkehren, um schließlich zeigen zu können, dass es keine Lösung gibt. (Dies zeigt dann auch, dass es *überhaupt keine* Zerlegung des quadratischen Terms geben kann!)
Bei $\underline{x^2 - 18x + 82}$ führt keine der Zerlegungen von $82 = \pm 1 \cdot \pm 82 = \pm 2 \cdot \pm 41$ zum Ziel. Schließlich erhält man $\underline{x^2 + 7x + 6} = (x + 1)(x + 6)$.
c) Aus einer Gleichung $(x + a)(x + b) = 0$ liest man sofort die Lösungen $-a$ und $-b$ ab. In den Fällen, in denen man in b) Faktorisierungen gefunden hat, erhält man so erneut die schon in 2) ermittelten Lösungen.
**Achtung:** In den Fällen, in denen man *keine* Zerlegung gefunden hat, muss man zur Lösung der Gleichung auf die quadratische Ergänzung zurückgreifen! Stellt man dabei fest, dass es keine Lösung gibt, so zeigt dies insbesondere, dass keine Faktorisierung des quadratischen Terms existieren kann!

4) a) Um die gemeinsamen Punkte von Parabel und Gerade zu bestimmen, ermitteln wir zunächst Gleichungen für beide geometrischen Objekte. Die Scheitelpunktsform der Parabelgleichung lautet $y = a(x - x_S)^2 + y_S$. Mit dem gegebenen Scheitel $S = (x_S, y_S) = (-2, 4)$ erhalten wir $y = a(x + 2)^2 + 4$. Da es sich um eine Normalparabel handelt, ist $|a| = 1$, und da sie nach unten geöffnet ist, ist $a < 0$, zusammen also $a = -1$. Wir erhalten so als <u>Parabelgleichung:</u> $y = -(x + 2)^2 + 4$.

Zur Bestimmung einer Gleichung für die Gerade berechnen wir zunächst den *Anstieg* $a = \frac{6-1}{2-(-3)} = 1$ und dann den $y$-Achsenabschnitt durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die Gleichung $y = ax + b = x + b$: $6 = 2 + b \iff b = 4$. Damit erhalten wir als Geradengleichung: $y = x + 4$.
Gesucht sind nun Punkte $P = (x, y)$, die sowohl auf der Parabel als auch auf der Geraden liegen, die also *beide* Gleichungen $y = -(x+2)^2+4$ und $y = x+4$ erfüllen. Die $x$-Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte (man nennt dies die Schnitt*stellen*) müssen also die folgende Gleichung für die Schnittstellen erfüllen:

$$-(x+2)^2 + 4 = x + 4 \iff -x^2 - 4x - 4 + 4 = x + 4 \iff x^2 + 5x + 4 = 0\,.$$

Die letzte quadratische Gleichung können wir mittels quadratischer Ergänzung lösen. Mit den Methoden von Aufgabe 4) findet man in diesem Falle aber leicht die Faktorisierung $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ und damit $x^2 + 5x + 4 = 0 \iff x = -1 \;\vee\; x = -4$. Dies sind die Schnitt*stellen*, also die $x$-Koordinaten der Schnittpunkte. Die $y$-Koordinaten bestimmt man, indem man die Schnitt*stellen* in eine der beiden Gleichungen (am besten die einfachere Geradengleichung $y = x + 4$) einsetzt. Wir erhalten so die zwei Schnitt*punkte* $P_1 = (-1, -1+4) = (-1, 3)$ und $P_2 = (-4, -4+4) = (-4, 0)$.
b) Hier ändert sich nur die Parabelgleichung zu $y = (x+2)^2 + 4$ und die zu untersuchende Gleichung für die Schnittstellen lautet nun $(x+2)^2 + 4 = x + 4 \iff x^2 + 3x + 4 = 0$. Mittels quadratischer Ergänzung stellt man fest, dass diese *keine* Lösung hat, es also auch keine Schnittpunkte gibt.

5) Wir gehen wie bei der vorangegangenen Aufgabe vor und bestimmen zunächst Gleichungen für beide Parabeln. Dabei handelt es sich immer um Funktionsgleichungen $y = \ldots$, so dass wir anschließend durch 'Gleichsetzen' *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten $x$ erhalten, die es zu lösen gilt.
a) Die Gleichungen für $\mathcal{P}_1$: $y = (x-2)^2 - 1$ und $\mathcal{P}_2$: $y = -x^2 + 9$ führen zur Schnittstellengleichung

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0$$

und damit zu den beiden Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. (Statt durch Faktorisierung kann man diese Lösungen auch mittels quadratischer Ergänzung ermitteln!) Die $y$-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man durch Einsetzen der Schnittstellen in eine der Parabelgleichungen: $y_1 = -x_1^2 + 9 = -1 + 9 = 8$ und $y_2 = -x_2^2 + 9 = 0$. Die gesuchten Schnittpunkte sind $P_1 = (-1, 8)$ und $P_2 = (3, 0)$.
b) Parabelgleichungen: $\mathcal{P}_1 : y = 2x^2 + 3x + 4$ und $\mathcal{P}_2 : y = (x+2)^2 + 6$.
Schnittstellen: $2x^2+3x+4 = (x+2)^2+6 \iff x^2-x-6 = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0 \iff x = -2 \;\vee\; x = 3$.
Schnittpunkte: $P_1 = (-2, 6)$, $P_2 = (3, 31)$.
c) Parabelgleichungen: $\mathcal{P}_1 : y = (x-3)^2 - 4$ und $\mathcal{P}_2 : y = (x-2)^2 + 5$.
Schnittstellen: $x^2 - 6x + 5 = x^2 - 4x + 9 \iff 2x = -4 \iff x = -2$.
Nur *ein* Schnittpunkt: $P = (-2, 21)$.
d) Parabelgleichungen: $\mathcal{P}_1 : y = -(x-2)^2 + 5$ und $\mathcal{P}_2 : y = -(x-2)^2 - 3$.
Schnittstellen: $-(x-2)^2 + 5 = -(x-2)^2 - 3 \iff 5 = -3$.
Diese Gleichung hat *keine* Lösung; es gibt also auch keine Schnittpunkte.

6) Zwei Normalparabeln mit gleicher Öffnungsrichtung lassen sich durch Gleichungen der Form $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ mit *demselben* $a$ $(= \pm 1)$ beschreiben. Die Symmetrieachsen sind die Parallelen zur $y$-Achse durch den Scheitelpunkt, also die Geraden mit der Gleichung $x = x_S$. Sind nun die Scheitelpunkte der Parabeln $S_1 = (x_1, y_1)$ und $S_2 = (x_2, y_2)$, so ergibt sich als Schnittstellengleichung

$$a(x-x_1)^2+y_1 = a(x-x_2)^2+y_2 \iff -2ax_1 \cdot x + ax_1^2 + y_1 = -2ax_2 \cdot x + ax_2^2 + y_2 \,. \quad (*)$$

Man erkennt, dass die quadratischen Terme wegfallen und dies eine *lineare* Gleichung ist. Will man diese nun lösen, so muss man 'nach $x$ auflösen':

$$(*) \iff 2a(x_1 - x_2) \cdot x = a(x_1^2 - x_2^2) + y_1 - y_2 \,. \qquad (**)$$

Da $a \neq 0$ ist, kann man diese Gleichung genau dann nach $x$ auflösen, wenn $x_1 - x_2 \neq 0$, d. h. $x_1 \neq x_2$ ist. Dies bedeutet, dass die *Symmetrieachsen verschieden* sind. In diesem Falle erhält man genau eine Schnittstelle und damit genau einen Schnittpunkt.
Sind die *Symmetrieachsen identisch,* also $x_1 = x_2$, so reduziert sich die Gleichung auf

$$(**) \iff 0 = y_1 - y_2 \,.$$

Diese Gleichung enthält die Variable $x$ gar nicht mehr. Die Lösungsmenge ist also entweder ganz $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{L} = \mathbb{Q}$, wenn $y_1 = y_2$) oder leer ($\mathbb{L} = \emptyset$, wenn $y_1 \neq y_2$ ist). Im Falle $y_1 \neq y_2$ existiert also *kein* Schnittpunkt. Im Falle $y_1 = y_2$ sind jedoch alle Stellen Schnittstellen; die beiden Parabeln sind identisch!

## Übungen (5)

1) a) Warum erweitert man den Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zum Zahlbereich $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen?
   b) Was haben $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gemeinsam, was unterscheidet sie?
   c) Geben Sie eine irrationale Zahl an. (Begründung der Irrationalität)
2) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
   a) Jede periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl.
   b) Jede rationale Zahl ist als abbrechende oder periodische Dezimalzahl darstellbar.
   c) Das Produkt zweier periodischer Dezimalzahlen ist wieder periodisch.
   d) Das Produkt zweier abbrechender Dezimalzahlen ist eine abbrechende Dezimalzahl.
   e) Das Produkt zweier irrationaler Zahlen ist irrational.
   f) Jede Dezimalzahl ist eine rationale Zahl.
3) Ordnen Sie der Größe nach und berechnen Sie die Abstände zwischen den folgenden vier Zahlen: $26/33$, $0{,}7\overline{8}$, $7/9$, $0{,}\overline{78}$. Geben Sie die Ergebnisse als Dezimalzahlen an.
4) a) Stellen Sie als Dezimalzahl dar: $22/7$, $17/330$, $1009/33300$.
   b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $5/7 \neq 0{,}\overline{7142857}$ ist.
   c) Berechnen Sie Summe, Produkt, (beide) Differenzen und Quotienten von $0{,}\overline{010}$ und $0{,}0\,\overline{101}$. Stellen Sie das Ergebnis als Dezimalzahl dar. Kommen unter den Ergebnissen irrationale Zahlen vor?
5) Von zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Teile der Dezimalentwicklung bekannt: $a = 12{,}01\ldots$ und $b = 2{,}11\ldots$.
   a) Berechnen Sie $a + b$, $a \cdot b$, und $a - b$ mit größtmöglicher Genauigkeit, d. h. geben Sie möglichst enge Intervalle an, in denen die Ergebnisse *mit Sicherheit* liegen müssen.
   b) Auf wie viele Stellen hinter dem Komma genau können Sie die Ergebnisse angeben?
   c) Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von $12{,}01+2{,}11$ ; $12{,}01\cdot 2{,}11$ und $12{,}01-2{,}11$.

## Übungen (5) — Lösungen

1) a) Man erweitert $\mathbb{Q}$, weil $\mathbb{Q}$ unvollständig ist. Z. B. gibt es in $\mathbb{Q}$ keine Zahl, deren Quadrat 2 ist.
b) In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ kann man dieselben Rechenoperationen ($+$, $-$, $\cdot$ und $:$) durchführen und Größenvergleiche anstellen ($<$). Dabei gelten in $\mathbb{R}$ alle Gesetzmäßigkeiten, wie wir sie für $\mathbb{Q}$ zusammengestellt haben.
Der entscheidende *Unterschied* besteht darin, dass $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ vollständig ist: Jede Intervallschachtelung, d. h. Folge ineinanderliegender, beliebig eng werdender Intervalle enthält in $\mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl.
c) $\mathbb{R}$ enthält die positive Zahl $\sqrt{2}$, deren Quadrat 2 ist. Diese gehört nicht zu $\mathbb{Q}$.
2) a), b) und d) sind wahr; c), e) und f) sind falsch.
Gegenbeispiele für c) und e): $0{,}\overline{428571} \cdot 2{,}\overline{3} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$ bzw. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.
3) Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass zwei der Zahlen identisch sind: $0{,}\overline{78} = 78/99 = 26/33$.
Weiter gilt $7/9 = 0{,}\overline{7} = 0{,}\overline{77}$. Damit liegen alle Zahlen als Dezimalzahlen vor und man kann unmittelbar die Größenvergleiche anstellen:

$$\frac{7}{9} = 0{,}\overline{77} < \frac{26}{33} = 0{,}\overline{78} = 0{,}78\,\overline{78} < 0{,}78\,\overline{88} = 0{,}7\,\overline{8}\,.$$

Zur Bestimmung der Abstände berechnet man die Differenzen zwischen den Zahlen. (Dies ist hier direkt mit den Dezimalzahlen möglich, da keine Überträge auftreten.)

$$\begin{aligned}
0{,}7\,\overline{8} - 0{,}\overline{78} &= 0{,}78\,\overline{88} - 0{,}78\,\overline{78} = 0{,}00\,\overline{10}\\
0{,}\overline{78} - \frac{26}{33} &= 0\\
0{,}\overline{78} - 0{,}\overline{7} &= 0{,}\overline{78} - 0{,}\overline{77} = 0{,}\overline{01}
\end{aligned}$$

Man kann diese Differenzen auch bestimmen, indem man alle Zahlen in Brüche umwandelt (warum ist dies möglich?), und dann die Differenzen berechnet.

4) a)

$$\begin{aligned}
\frac{22}{7} &= 3 + \frac{1}{7} = 3{,}\overline{142857}\,,\\
\frac{17}{330} &= \frac{51}{990} = \frac{1}{10} \cdot \frac{51}{99} = 0{,}\overline{51} : 10 = 0{,}0\,\overline{51}\,,\\
\frac{1009}{33300} &= \frac{3027}{99900} = \frac{1}{100} \cdot \frac{3027}{999} = \frac{1}{100} \cdot (3 + \frac{30}{999}) = \frac{1}{100} \cdot 3{,}\overline{030} = 0{,}03\,\overline{030}\,.
\end{aligned}$$

b) Ein gekürzter Bruch mit Nenner 7 stellt eine periodische Dezimalzahl dar, wobei die Periodenlänge höchstens $7 - 1 = 6$ sein kann. Die angebliche Darstellung für $5/7$ hat aber die Periodenlänge 7.
c) $0{,}\overline{010} = 10/999$ und $0{,}0\,\overline{101} = 101/9990$. Also

$$\begin{aligned}
0{,}\overline{010} + 0{,}0\,\overline{101} &= \frac{10}{999} + \frac{101}{9990} = \frac{100 + 101}{9990} = \frac{201}{9990} = 0{,}0\,\overline{201}\,,\\
0{,}\overline{010} \cdot 0{,}0\,\overline{101} &= \frac{10 \cdot 101}{999 \cdot 9990} = \frac{101}{999 \cdot 999} = \frac{101}{998001}\,,\\
0{,}0\,\overline{101} - 0{,}\overline{010} &= 0{,}0\,\overline{101} - 0{,}0\,\overline{100} = 0{,}0\,\overline{001}\,,\\
0{,}0\,\overline{101} : 0{,}\overline{010} &= \frac{101}{9990} : \frac{10}{999} = \frac{101 \cdot 999}{9990 \cdot 10} = \frac{101}{100} = 1{,}01\,.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der umgekehrten Differenz braucht man nur das Vorzeichen zu ändern. Für den umgekehrten Quotienten erhält man

$$0{,}\overline{010} : 0{,}0\,\overline{101} = \frac{100}{101} = 0{,}\overline{9900}\,.$$

Nun steht 'nur' noch die Umwandlung des Ergebnisses (101/998001) der Multiplikation in einen Dezimalbruch aus. Wir wissen zwar, dass dies einen periodischen Dezimalbruch ergibt (der Nenner dieses gekürzten Bruches enthält Primfaktoren verschieden von 2 und 5), und auch dass die Länge der Periode höchstens 998000 sein kann. Dies sind aber trotz allem wohl keine ermutigenden Aussichten für eine schriftliche Division.
Ich habe stattdessen ein kleines Programm geschrieben und einen Computer diese Rechnungen durchführen lassen. Das Ergebnis habe ich spaßeshalber auf einem gesonderten Blatt ausdrucken lassen. Die Periodenlänge ist 2997! Ein Protokoll der zugehörigen Rechenschritte umfasst rund 130 Seiten. Dies ist nur auf Diskette verfügbar. Glücklicherweise betrug die Periodenlänge nicht 998000! Allein der Ausdruck der Periode hätte über 300 Seiten umfasst! Man erkennt hier erneut, wie schwierig es sein kann, mit unendlichen Dezimalzahlen zu arbeiten, und wieviel unproblematischer ein Bruch ist. Solange man es also vermeiden kann, sollte man nicht mit Dezimalzahlen arbeiten.

5) Aufgrund der Angaben über $a$ und $b$ wissen wir $12{,}01 \leq a \leq 12{,}02$ und $2{,}11 \leq b \leq 2{,}12$. Unter Verwendung der bekannten Gesetzmäßigkeiten (hier der Regeln über die Anordnung (T) und (M), siehe Abschnitt über rationale Zahlen, S. 10) erhält man $12{,}01 + 2{,}11 \leq a + b \leq 12{,}02 + 2{,}12$, und $12{,}01 \cdot 2{,}11 \leq a \cdot b \leq 12{,}02 \cdot 2{,}12$, also

$$14{,}12 \leq a + b \leq 14{,}14 \quad \text{und} \quad 25{,}3411 \leq a \cdot b \leq 25{,}4824\,.$$

Die Differenz $a - b$ führt man am besten auf die Addition zweier Zahlen zurück: $a - b = a + (-b)$, und schließt dann wie oben, vorausgesetzt, man hat eine *Abschätzung für* $-b$. Diese erhält man aus der für $b$ durch Multiplikation mit $-1$. Man muss aber beachten, dass sich dabei *die Ungleichungszeichen umkehren*! Also: $-2{,}11 \geq -b \geq -2{,}12$ bzw. $-2{,}12 \leq -b \leq -2{,}11$. Damit folgt dann (wie oben bei der Addition)

$$12{,}01 + (-2{,}12) \leq a + (-b) \leq 12{,}02 + (-2{,}11)\,, \quad \text{also} \quad 9{,}89 \leq a - b \leq 9{,}91\,.$$

b) Man erhält also Summe und Differenz bis auf eine Genauigkeit von 2/100, dies bedeutet bei der Summe, dass das Ergebnis auf die erste Stelle hinter dem Komma genau ist (14,1), während bei der Differenz die erste Stelle hinter dem Komma eine 8 oder 9 ist.
Beim Produkt ist die Genauigkeit viel geringer, der Abstand zwischen den Zahlen 25,4824 und 25,3411 beträgt 0,1413! Das Ergebnis ist nur in den Vorkommastellen genau.
c) $12{,}01 + 2{,}11$ und $12{,}01 - 2{,}11$ sind abbrechende Dezimalzahlen, die von $a + b$ bzw. $a - b$ um höchstens 2/100 abweichen, können also als Näherungen dienen. Beim Produkt ist jedoch Vorsicht geboten: Der Wert $12{,}01 \cdot 2{,}11 = 25{,}3411$ erweckt mit seinen 4 Stellen hinter dem Komma den (falschen) Eindruck einer Genauigkeit auf 4 Stellen; wie wir oben gesehen haben, kann aber der Fehler sogar bis zu 0,1413 betragen! Nicht einmal die erste Stelle hinter dem Komma ist genau.

# Übungen (6)

1) Es sei $a$ eine reelle Zahl.
a) Unter welcher Bedingung an $a$ ist $\sqrt{a}$ definiert? Wie lautet unter dieser Voraussetzung die Definition von $\sqrt{a}$ ?
b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^2 = a$ (über der Grundmenge $\mathbb{R}$)?. Geben Sie die Lösungsmenge an. (Beachten Sie alle Fälle.)

2) Zeigen Sie auf der Grundlage der Definition:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, b) $2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$, c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, d) $\frac{12}{\sqrt{24}} = \sqrt{6}$.

3) Berechnen Sie die folgenden Wurzelterme *exakt,* d. h. stellen Sie sie möglichst einfach dar, ohne Wurzelterme im Nenner und mit möglichst kleinen Radikanden.

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} =$ b) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}} =$

c) $\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 3^2} =$ d) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} =$

e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$ f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$

g) $\left(\sqrt{8 + \sqrt{15}} + \sqrt{8 - \sqrt{15}}\right)^2 =$

4) Welche der nachfolgenden Gleichungen sind allgemeingültig (über ihrem Definitionsbereich)? Korrigieren Sie die falschen darunter.
a) $\sqrt{a^2} = a$, b) $(\sqrt{a})^2 = a$, c) $\sqrt{a^3} = a \cdot \sqrt{a}$, d) $\sqrt{a^6} = a^3$,
e) $\sqrt{a^4} = a^2$, f) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$, g) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

5) Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen (über der Grundmenge $\mathbb{R}$):
a) $x^2 + 6x + 7 = 0$, b) $x^2 - 8x + 9 = 0$,
c) $12x^2 - 4x - 1 = 0$, d) $4x^2 - 14x + 9 = 0$,
e) $2x^2 + x + 1 = 0$, f) $x^2 - 5\sqrt{3} \cdot x + 11 = 0$.

6) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:
a) $\frac{4x-3}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{5x}{x+2}$, b) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5$,
c) $\frac{4x-3}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{6x}{x+2}$, d) $\frac{3x+2}{x-2} = \frac{x+2}{3x-2}$.

7) Unter dem *Goldenen Schnitt* versteht man die Unterteilung einer Strecke in zwei Abschnitte, so dass der größere Abschnitt sich zur Gesamtlänge verhält wie der kleinere Abschnitt zum größeren. Bestimmen Sie das Verhältnis des goldenen Schnitts.

8) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte, die die Parabeln auf dem Skizzenblatt **Normalparabeln (2)** zu Übungen (3) miteinander haben.

**Übungen (6) — Lösungen**

1) a) $\sqrt{a}$ ist nur definiert für $a \geq 0$ (weil es für $a < 0$ keine reelle Zahl geben kann, deren Quadrat $a$ ist). Ist $a \geq 0$, so versteht man unter $\sqrt{a}$ die reelle Zahl, die $\geq 0$ ist und quadriert $a$ ergibt.
b) Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 = a$ über $\mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\mathbb{L} = \begin{cases} \{\} & \text{falls } a < 0, \\ \{0\} & \text{falls } a = 0, \\ \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\} & \text{falls } a > 0. \end{cases}}$$

Die Anzahl der Lösungen ist in den genannten Fällen 0 bzw. 1 bzw. 2. Für $a \geq 0$ kann man einheitlich sagen: $\mathbb{L} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, und die folgende, für die Lösung quadratischer Gleichungen fundamentale Äquivalenzumformung festhalten:

$$\text{Für } a \geq 0 \text{ gilt: } \boxed{x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}} \qquad (*)$$

2) a) Wir müssen zeigen, dass die linke Seite der Gleichung $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ gleich $\sqrt{6}$ ist. Nun ist die Zahl $\sqrt{6}$ durch *Eigenschaften* definiert; wir müssen also zeigen, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ die Eigenschaften hat, durch die $\sqrt{6}$ definiert ist. Wir müssen also zeigen, dass die linke Seite eine Zahl ist, die 1. $\geq 0$ ist und 2. quadriert 6 ergibt.
Nun ist nach Definition $\sqrt{2} \geq 0$ und $\sqrt{3} \geq 0$, also (aufgrund unserer Rechengesetze auch) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \geq 0$. Damit ist die erste Eigenschaft erfüllt.
Für 2. müssen wir die linke Seite quadrieren.

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Damit ist auch die 2. Forderung erfüllt: Die linke Seite der behaupteten Gleichung hat die Eigenschaften, durch die wir $\sqrt{6}$ definiert haben, muss also die Zahl $\sqrt{6}$ sein. (Es gibt nur eine Zahl mit diesen Eigenschaften!)
Diese hier sehr ausführlich dargestellte Argumentation ist typisch für den Umgang mit Zahlen, die nicht explizit als Dezimalzahlen angegeben sind, sondern durch Eigenschaften charakterisiert sind. Will man die Übereinstimmung gewisser Zahlen nachweisen, muss man in dieser Situation *die definierenden Eigenschaften* nachweisen! Wir üben dies noch an den nächsten beiden Beispielen:
b) Wieder zeigen wir, dass die linke Seite eine Zahl ist, die die definierende Eigenschaft für die Zahl $\sqrt{8}$ erfüllt, die also 1. $\geq 0$ ist und 2. quadriert 8 ergibt. Wegen $\sqrt{2} \geq 0$ gilt auch $2 \cdot \sqrt{2} \geq 0$. Und ebenso einfach folgt $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$.
c) Wieder ist die linke Seite eine Zahl $\geq 0$ und ihr Quadrat ist

$$(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = (\frac{1}{2})^2(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}\,.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.
d) Die linke Seite ist $\geq 0$ und ihr Quadrat ist $\dfrac{144}{24} = 6$.

3) a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\sqrt{2}=6\sqrt{2}$,

b) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$,

c) $\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=5\sqrt{7}$,

Für die beiden nächsten Umformungen beachte man die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

d) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$,

e) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3-2}=5-2\sqrt{6}$,

Beachten Sie bei den nächsten Umformungen auch noch die binomische Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

f) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(3+2\sqrt{6}+2)+(3-2\sqrt{6}+2)=10$,

g) $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2=(8+\sqrt{15})+2\cdot\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}+(8-\sqrt{15})=$
$16+2\cdot\sqrt{(8+\sqrt{15})\cdot(8-\sqrt{15})}=16+2\sqrt{64-15}=16+2\sqrt{49}=30.$

4) a) Diese Formel ist falsch. Wir wiederholen die Überlegungen aus dem Unterricht: Wenn die behauptete Gleichung richtig sein soll, muss die rechte Seite ($a$) eine Zahl sein, die 1. $\geq 0$ ist und 2. quadriert $a^2$ (den Radikanden der linken Seite) ergibt. Die 2. Forderung ist ganz offensichtlich erfüllt: Quadriert man $a$, so erhält man natürlich $a^2$. Aber die 1. Forderung $a \geq 0$ braucht nicht erfüllt zu sein.
Damit ist die behauptete Gleichung nicht allgemeingültig; sie ist richtig für $a \geq 0$ und falsch für $a < 0$. Allgemeingültig wird die Gleichung in der Form

$$\sqrt{a^2}=|a| \ .$$

b) ist definitionsgemäß richtig.
c) ist ebenfalls richtig: Da die Gleichung nur für $a \geq 0$ definiert ist, gilt $a\sqrt{a}\geq 0$. Zusammen mit $(a\sqrt{a})^2=a^2(\sqrt{a})^2=a^3$ ist dann c) bewiesen.
d) hingegen ist falsch, denn die Gleichung ist für alle $a$ definiert, aber nur für die nicht-negativen richtig (wie bei a)).
Entsprechend lautet die Korrektur: $\sqrt{a^6}=\left|a^3\right|=|a|^3$.
e) ist richtig, da $a^2$ immer $\geq 0$ ist, so dass die Probleme von a) nicht auftreten.
f) ist richtig gemäß der dritten binomischen Formel.
g) ist **grob falsch!**

5) a) $x^2+6x+7=0 \iff x=-3\pm\sqrt{9-7}=-3\pm\sqrt{2}$, also $\mathbb{L}=\{-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\}$.

b) $x^2-8x+9=0 \iff x=4\pm\sqrt{16-9}=4\pm\sqrt{7}$, also $\mathbb{L}=\{4-\sqrt{7}\,,\,4+\sqrt{7}\}$.

c) $12x^2-4-1=0 \iff x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{12}=0 \iff x=\dfrac{1}{6}\pm\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{12}}=\dfrac{1}{6}\pm\dfrac{1}{3}$,
also ist $\mathbb{L}=\{-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\}$.

d) $4x^2-14x+9=0 \iff x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{9}{4}=0 \iff x=\dfrac{7}{4}\pm\sqrt{\dfrac{49}{16}-\dfrac{9}{4}}=\dfrac{7}{4}\pm\sqrt{\dfrac{13}{16}}$,
also $\mathbb{L}=\{\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{4}\sqrt{13},\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{13}\}$.

e) $2x^2+x+1=0 \iff x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}=0 \iff x=-\dfrac{1}{4}\pm\sqrt{\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}}$.
Da $\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}<0$ ist, gibt es *keine* Lösung.

f) Hier wird einige Standfestigkeit im Umgang mit Wurzeltermen benötigt:
$x^2 - 5\sqrt{3} \cdot x + 11 = 0 \iff x = \frac{5}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{75}{4} - 11} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{31}$,
also $\mathbb{L} = \{\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{31}, \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{31}\}$.

6) a) Der Definitionsbereich der Gleichung besteht aus allen reellen Zahlen verschieden von 1 und $-2$, weil bei deren Einsetzung einer der Nenner 0 würde. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,+1\}$. Über $\mathbb{D}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\frac{4x-3}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{5x}{x+2} \iff (4x-3)(x+2) - 10(x-1) = 5x(x-1)$$
$$\iff 4x^2 + 5x - 6 - 10x + 10 = 5x^2 - 5x \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$$

Wegen $-2 \notin \mathbb{D}$ ist $+2$ die *einzige* Lösung.
b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$. Über $\mathbb{D}$ gilt

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5 \iff (x-2)(x-2) + (x+2)(x+2) = 5(x-2)(x+2)$$
$$\iff x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 5x^2 - 20 \iff 3x^2 = 28$$
$$\iff x = \pm\sqrt{\frac{28}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{21}\,.$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{\,\frac{2}{3}\sqrt{21}\,,\, -\frac{2}{3}\sqrt{21}\,\}$.
c) Über $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,+1\}$ gilt:

$$\frac{4x-3}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{6x}{x+2} \iff (4x-3)(x+2) - 10(x-1) = 6x(x-1)$$
$$\iff 4x^2 + 5x - 6 - 10x + 10 = 6x^2 - 6x \iff 2x^2 - x - 4 = 0$$
$$\iff x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{33}{16}} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{33})\,.$$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{33})$.
d) Über $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\,,\,2\}$ gilt

$$\frac{3x+2}{x-2} = \frac{x+2}{3x-2} \iff (3x+2)(3x-2) = (x+2)(x-2)$$
$$\iff 9x^2 - 4 = x^2 - 4 \iff 8x^2 = 0 \iff x = 0\,.$$

Die Gleichung hat nur die eine Lösung 0.

7) Sei $x$ der gesuchte größere Anteil. Dann ist $1 - x$ der Anteil der kürzeren Strecke an der Gesamtstrecke. Die Forderung des goldenen Schnittes lautet dann

$$x = \frac{1-x}{x}\,.$$

Wir lösen nun diese Bruchgleichung. Sie ist definiert für $x \neq 0$. Dafür gilt dann

$$x = \frac{1-x}{x} \iff x^2 = 1 - x \iff x^2 + x - 1 = 0$$
$$\iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4+1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Da das gesuchte Verhältnis eine positive Zahl sein muss, ist das Verhältnis des goldenen Schnitts $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

8) Zunächst lesen wir aus den Skizzen die Scheitelpunkte ab und erhalten damit für die Parabeln die folgenden Gleichungen in Scheitelpunktsform (siehe die Lösungen zu Übung (3), Aufgabe 1 b)):

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P}_1: & y = x^2 & \mathcal{P}_5: & y = -(x-5)^2 \\ \mathcal{P}_2: & y = -x^2 & \mathcal{P}_6: & y = (x-8)^2 - 3 \\ \mathcal{P}_3: & y = (x-4)^2 - 2 & \mathcal{P}_7: & y = -(x+6)^2 + 2 \\ \mathcal{P}_4: & y = -x^2 + 4 & \mathcal{P}_8: & y = (x+7)^2 + 1 \end{array}$$

Um die Schnitt*stellen* (= $x$-Koordinaten der Schnitt*punkte*) dieser Parabeln miteinander zu bestimmen, muss man $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ Gleichungen lösen. Die Schnittpunkte erhält man, indem man die gefundenen Schnittstellen in eine der beiden Parabelgleichungen einsetzt. Man erhält so die Tabelle auf der folgenden Seite, in der jeweils sämtliche Schnittpunkte eingetragen sind.

## Schnittpunkte der Normalparabeln (2) von Übung (3):

### Exakte Ergebnisse:

| | $\mathcal{P}_2$ | $\mathcal{P}_3$ | $\mathcal{P}_4$ | $\mathcal{P}_5$ | $\mathcal{P}_6$ | $\mathcal{P}_7$ | $\mathcal{P}_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}_1 \cap \ldots$ | $(0,0)$ | $(\frac{7}{4}, \frac{49}{16})$ | $(\pm\sqrt{2}, 2)$ | $--$ | $(\frac{61}{16}, \frac{3721}{256})$ | $--$ | $(-\frac{25}{7}, \frac{625}{49})$ |
| $\mathcal{P}_2 \cap \ldots$ | | $--$ | $--$ | $(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4})$ | $--$ | $(-\frac{17}{6}, -\frac{289}{36})$ | $--$ |
| $\mathcal{P}_3 \cap \ldots$ | | | $--$ | $(\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ | $(\frac{47}{8}, \frac{97}{64})$ | $--$ | $(-\frac{18}{11}, \frac{3602}{121})$ |
| $\mathcal{P}_4 \cap \ldots$ | | | | $(\frac{29}{10}, -\frac{441}{100})$ | $--$ | $(-\frac{19}{6}, -\frac{217}{36})$ | $--$ |
| $\mathcal{P}_5 \cap \ldots$ | | | | | $--$ | $(-\frac{9}{22}, -\frac{14161}{484})$ | $--$ |
| $\mathcal{P}_6 \cap \ldots$ | | | | | | $--$ | $(\frac{11}{30}, \frac{49741}{900})$ |
| $\mathcal{P}_7 \cap \ldots$ | | | | | | | $(-6,2); (-7,1)$ |

**Näherungswerte** (zum Vergleich mit der Skizze):

| | $\mathcal{P}_2$ | $\mathcal{P}_3$ | $\mathcal{P}_4$ | $\mathcal{P}_5$ | $\mathcal{P}_6$ | $\mathcal{P}_7$ | $\mathcal{P}_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}_1 \cap \ldots$ | $(0,0)$ | $(1.75, 3.0625)$ | $(\pm 1.414, 2)$ | $--$ | $(3.8125, 14.535)$ | $--$ | $(-3.57, 12.76)$ |
| $\mathcal{P}_2 \cap \ldots$ | | $--$ | $--$ | $(2.5, -6.25)$ | $--$ | $(-2.83, -8.03)$ | $--$ |
| $\mathcal{P}_3 \cap \ldots$ | | | $--$ | $(5.366, -0.134); (3.634, -1.866)$ | $(5.875, 1.516)$ | $--$ | $(-1.636, 29.77)$ |
| $\mathcal{P}_4 \cap \ldots$ | | | | $(2.9, -4.41)$ | $--$ | $(-3.167, -6.03)$ | $--$ |
| $\mathcal{P}_5 \cap \ldots$ | | | | | $--$ | $(-0.41, -29.26)$ | $--$ |
| $\mathcal{P}_6 \cap \ldots$ | | | | | | $--$ | $(0.367, 55.27)$ |
| $\mathcal{P}_7 \cap \ldots$ | | | | | | | $(-6,2), (-7,1)$ |

## Übungen (7)

1) Für welche Zahlen $c$ hat die quadratische Gleichung $x^2 + (c+1)x + c = 0$ nur eine Lösung? Bestimmen Sie diese dann.

2) Zeigen Sie, dass jeweils die angegebene Zahl Lösung der angegebenen Gleichung ist, und bestimmen Sie (mit möglichst geringem Rechenaufwand) sämtliche Lösungen.
   a) $+1$, $x^2 - 7x + 6 = 0$,
   b) $-4$, $x^2 - 2x - 24 = 0$,
   c) $+\frac{1}{2}$, $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$,
   d) $+1$, $2x^2 - x - 1 = 0$.

3) Zerlegen Sie die folgenden quadratischen Terme in Linearfaktoren:
   a) $x^2 - 5x - 14$, b) $x^2 + 4x + 8$,
   c) $x^2 + 4x + 2$, d) $2x^2 + x - 1$.

4) Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:
   a) $\sqrt{5x-4} = 4x - 3$,
   b) $\sqrt{4x^2+4x} = 2x + 2$,
   c) $\sqrt{4x-3} + 5x = 4$,
   d) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+2} = \sqrt{x+2}$.

5) Lösen Sie die Gleichungen
   a) $x^3 - 4x = 0$,
   b) $x^7 = 7x^5$,
   c) $(x-3)(x^2 - 4x - 5) = 0$,
   d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$.

6) Mit einem Zaun von 150 m Länge soll ein rechteckiges Feld von 1400 $\text{m}^2$ Fläche eingezäunt werden. Wie sind die Maße des Feldes zu wählen?

7) Bei welchen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen übertrifft das Produkt ihre Summe um 55?

8) Vergrößert man die Kanten eines Würfels um 2 cm, so vergrößert sich der Rauminhalt um 152 $\text{cm}^3$. Welche Kantenlänge hatte der gegebene Würfel?

9) Eine zweiziffrige Zahl hat die Quersumme 5. Vertauscht man die Ziffern und multipliziert die neue Zahl mit der ursprünglichen, so ist das Produkt um 560 größer als die ursprüngliche Zahl. Um welche Zahl handelt es sich?
   [Tip zum Ansatz: Ist $x$ die Einerziffer und $y$ die Zehnerziffer, so ist die gesuchte Zahl $10y + x$.]

## Übungen (7) — Lösungen

1) 1. Unter Verwendung der Diskriminante quadratischer Gleichungen schließt man wie folgt: Die Gleichung hat genau dann nur eine Lösung, wenn die Diskriminante $D = 0$ ist. Wir berechnen die Diskriminante

$$D = p^2 - 4q = (c+1)^2 - 4c = c^2 + 2c + 1 - 4c = c^2 - 2c + 1 = (c-1)^2 \,.$$

Also gilt $0 = D = (c-1)^2 \iff c = 1$. Nur für $c = 1$ hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung. Die Gleichung lautet dann $x^2 + 2x + 1 = 0$, also $(x+1)^2 = 0$ und hat die einzige Lösung $x = -1$.
2. Alternativ kann man so vorgehen: Man löse die gegebene Gleichung mit dem *Parameter* $c$ und untersuche dann, wann sich nur eine Lösung ergibt.

$$x^2 + (c+1)x + c = 0 \iff x = -\frac{c+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+1)^2}{4} - c} \,.$$

Es gibt also nur eine Lösung genau dann, wenn der Radikand $= 0$ ist:

$$0 = \frac{(c+1)^2}{4} - c \iff 0 = (c+1)^2 - 4c \,.$$

Man rechnet nun wie oben weiter.

2) Dass die angegebenen Werte tatsächlich jeweils Lösungen sind, überprüft man durch Einsetzen. Die zweite Lösung findet man mit dem Satz von Vieta: Ist $x_1$ eine Lösung von $x^2 + px + q = 0$, so gilt für die zweite $x_1 x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = -p$. Aus jeder dieser Gleichungen kann man $x_2$ bestimmen.
a) Hier ist $x_1 \cdot x_2 = 6$, also bei $x_1 = 1$ folgt $x_2 = 6$: $\mathbb{L} = \{+1, +6\}$.
b) Hier ist $2 = x_1 + x_2 = -4 + x_2$, also wieder $x_2 = 6$.
c) Hier ergibt sich $1 = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + x_2$, also $x_2 = \frac{1}{2}$. In diesem Falle fallen die beiden Lösungen zusammen: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}\}$.
d) Vorsicht! Die Gleichung ist nicht normiert. Nach Normierung (Division durch den führenden Koeffizienten 2) ergibt sich $p = -\frac{1}{2}$, also $\frac{1}{2} = x_1 + x_2 = 1 + x_2$, d. h. $x_2 = -\frac{1}{2}$.
Die Überlegungen zu dieser Aufgabe zeigen, dass bei Kenntnis *einer* Lösung einer quadratischen Gleichung die zweite Lösung leicht mit dem Satz von Vieta zu bestimmen ist!

3) Wir bestimmen die Nullstellen der quadratischen Terme und entnehmen daraus eine Faktorisierung.
a) $x^2 - 5x - 14 = 0 \iff x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25+56}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{9}{2}$, also sind die beiden Nullstellen $+7$ und $-2$. Die Zerlegung folglich

$$x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2) \,.$$

(Man überprüft durch Ausmultiplizieren leicht die Richtigkeit der gefundenen Faktorisierung.)
b) $x^2 + 4x + 8 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{4-8}$. Da der Radikand negativ ist, hat der

quadratische Term keine Nullstellen. Dann besitzt er auch keine Faktorisierung in Linearfaktoren.
c) $x^2+4x+2=0 \iff x=-2\pm\sqrt{4-2}=-2\pm\sqrt{2}$. Mit diesen beiden Nullstellen erhalten wir die Faktorisierung

$$x^2+4x+2=\big(x-(-2+\sqrt{2})\big)\cdot\big(x-(-2-\sqrt{2})\big)=(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})\,.$$

(Mit der dritten binomischen Regel überprüft man leicht die Richtigkeit der gefundenen Faktorisierung.)
d) $2x^2+x-1=0 \iff x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \iff x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}$. Mit den beiden Nullstellen $\frac{1}{2}$ und $-1$ erhält man eine Faktorisierung, zunächst aber nur *für den normierten Term:*

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x-\frac{1}{2})(x+1)\,.$$

Um für den Ausgangsterm eine Faktorisierung zu bekommen, muss nun noch mit 2 multiplizieren:

$$2x^2+x-1=2\cdot(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})=2\cdot(x-\frac{1}{2})(x+1)=(2x-1)(x+1)\,.$$

4) a) Der Definitionsbereich ist bestimmt durch $5x-4\geq 0 \iff 5x\geq 4 \iff x\geq\frac{4}{5}$, also $\mathbb{D}=[\frac{4}{5},\infty[$. Über $\mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sqrt{5x-4}=4x-3 \implies 5x-4=(4x-3)^2=16x^2-24x+9\\
&\iff 16x^2-29x+13=0 \iff x^2-\frac{29}{16}x+\frac{13}{16}=0\\
&\iff x=\frac{29}{32}\pm\sqrt{(\frac{29}{32})^2-\frac{13}{16}}=\frac{29}{32}\pm\sqrt{\frac{9}{32^2}}\\
&\iff x=\frac{29}{32}\pm\frac{3}{32} \iff x=1 \vee x=\frac{13}{16}
\end{aligned}$$

Beide gefundenen Werte gehören zu $\mathbb{D}$, aber da das Quadrieren am Anfang keine Äquivalenzumformung war, sind wir trotzdem nicht sicher, ob die gefundenen Werte Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Wir setzen daher beide Werte ein und stellen fest: Beide sind Lösungen. (Bei diesem Einsetzen zeigt sich dann zugleich, ob die Werte zum Definitionsbereich gehören. Daher kann bei solchen Aufgaben die Bestimmung des Definitionsbereiches am Anfang unterbleiben.)
b) Hier machen wir uns die obigen Überlegungen zunutze und bestimmen den Definitionsbereich nicht. Über dem (nicht bestimmten) Definitionsbereich $\mathbb{D}$ gelten die folgenden logischen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+4x}=2x+2 &\implies 4x^2+4x=(2x+2)^2=4x^2+8x+4\\
&\iff 4x=-4 \iff x=-1\,.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $-1$ die einzig *mögliche* Lösung der Ausgangsgleichung ist. Durch Einsetzen stellen wir fest, dass $-1$ auch *tatsächlich* Lösung der Wurzelgleichung ist.

c) Wir isolieren zunächst den Wurzelterm auf einer Seite und quadrieren dann:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x-3}+5x=4 &\iff \sqrt{4x-3}=4-5x \\ \implies 4x-3=16-40x+25x^2 &\iff 25x^2-44x+19=0\,.\end{aligned}$$

Diese letzte quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $+1$ und $\frac{19}{25}$. Dies sind die einzig möglichen Lösungen der gegebenen Wurzelgleichung. Setzt man nun $+1$ in die linke Seite ein, so erhält man $\sqrt{4\cdot 1-3}+5\cdot 1=1+5=6\neq 4$: $+1$ ist *keine* Lösung. Beim Einsetzen von $\frac{19}{25}$ erhält man

$$\sqrt{4\cdot\frac{19}{25}-3}+5\cdot\frac{19}{25}=\sqrt{\frac{76-75}{25}}+\frac{19}{5}=\frac{1}{5}+\frac{19}{5}=4\,.$$

Also ist $\frac{19}{25}$ die einzige Lösung der gestellten Wurzelgleichung.
d) Hier müssen wir zweimal quadrieren, um die Wurzeln zu 'beseitigen'. Unter Beachtung binomischer Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+2}=\sqrt{x+2}\\ &\implies (3x+4)+2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x+2}+(2x+2)=x+2\\ &\iff 2\sqrt{(3x+4)(2x+2)}=-4x-4\\ &\iff \sqrt{6x^2+14x+8}=-2x-2\\ &\implies 6x^2+14x+8=4x^2+8x+4 \iff 2x^2+6x+4=0\\ &\iff x^2+3x+2=0 \iff (x+2)(x+1)=0 \iff x=-2 \lor x=-1\,.\end{aligned}$$

$-1$ erweist sich als Lösung der gestellten Wurzelgleichung, während man beim Einsetzen von $-2$ erkennt, dass dafür die Wurzelterme auf der linken Seite *nicht definiert* sind: $-2$ ist *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

5) a) Dies ist zwar keine quadratische, sondern eine sog. *kubische* Gleichung, aber dennoch für Sie lösbar, wenn man zuvor *ausklammert*:

$$x^3-4x=0 \iff x(x^2-4)=0\,.$$

Dieses Ausklammern ist immer dann sinnvoll, wenn die rechte Seite der Gleichung 0 ist. (Andernfalls nicht!) Man kann dann nämlich weiterschließen: Ein Produkt ist dann und nur dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist; in diesem Fall also:

$$\begin{aligned}x(x^2-4)=0 &\iff x=0 \lor x^2-4=0\\ \iff x=0 \lor x^2=4 &\iff x=0 \lor x=\pm 2\,.\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}=\{0,+2,-2\}$.
b) Dies ist eine Gleichung vom *Grade* 7. Wieder kann man durch Ausklammern die Gleichung in *zwei,* dafür aber *einfachere* Gleichungen aufspalten.

$$\begin{aligned}x^7=7x^5 \iff x^7-7x^5=0 &\iff x^5(x^2-7)=0\\ \iff x^5=0 \lor x^2-7=0 &\iff x=0 \lor x=\pm\sqrt{7}\,.\end{aligned}$$

Also $\mathbb{L}=\{0,-\sqrt{7},+\sqrt{7}\}$ im Falle b).

c) Hier ist die notwendige Faktorisierung bereits vorgegeben. (Nicht ausmultiplizieren!!)

$$(x-3)(x^2-4x-5)=0 \iff x-3=0 \ \lor \ x^2-4x-5=0$$
$$\iff x=3 \ \lor \ x=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3\,.$$

Also $\mathbb{L}=\{-1,3,5\}$ im Fall c).

d) Auch diese Gleichung können Sie durch Faktorisieren lösen, wenn Sie erkennen, dass $x^4-4x^2+4$ ein vollständiges Binom ist: $x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2$. Damit folgt dann

$$x^4-4x^2+4=0 \iff (x^2-2)^2=0 \iff x^2-2=0 \iff x=\pm\sqrt{2}\,.$$

Also ist $\mathbb{L}=\{-\sqrt{2},+\sqrt{2}\}$.

6) Ist $x$ eine der Seitenlängen des Rechtecks, so hat die andere Kante die Länge $75-x$ (da der Umfang 150 sein soll), und die Fläche ist dann $x(75-x)=1400$. Dies führt zu einer quadratischen Gleichung

$$75x-x^2=1400 \iff x^2-75x+1400=0 \iff x=\frac{75}{2}\pm\sqrt{(\frac{75}{2})^2-1400}$$
$$\iff x=\frac{75}{2}\pm\sqrt{\frac{5625-5600}{4}}=\frac{75}{2}\pm\frac{5}{2} \iff x=40 \ \lor \ x=35\,.$$

Es gibt zwei Lösungen: $x=40$ (mit anderer Seitenlänge $75-40=35$) und $x=35$ (mit der zweiten Seitenlänge $75-35=40$). Die gesuchten Maße des Feldes sind also 35 mal 40 Meter.

7) Die gesuchte Zahl heiße $x$. Dann muss gelten:

$$x(x+1)=x+(x+1)+55\,.$$

Dies führt zur Gleichung

$$x^2+x=2x+56 \iff x^2-x-56=0 \iff x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+56}$$
$$\iff x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{15}{2} \iff x=-7 \ \lor \ x=8\,.$$

Man erhält die beiden Lösungen 8 und $-7$. Damit gibt es für die gesuchten aufeinanderfolgenden Zahlen zwei Möglichkeiten, zum einen 8 und 9 und zum andern $-7$ und $-6$.

8) Sei $x$ die gesuchte Kantenlänge des Würfels. Dann muss gelten

$$(x+2)^3=x^3+152\,.$$

Wir multiplizieren die linke Seite aus und erhalten $(x+2)^3=(x+2)(x^2+4x+4)=x^3+6x^2+12x+8$. Wir lösen nun die obige Gleichung:

$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+152 \iff 6x^2+12x-144=0 \iff x^2+2x-24=0$$
$$\iff x=-1\pm\sqrt{1+24}=-1\pm 5 \iff x=4 \ \lor \ x=-6\,.$$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $-6$ und 4. Da die gesuchte Größe $x$ die Kantenlänge eines Würfels sein soll, kommt nur $x = 4$ als Lösung für das Ausgangsproblem in Frage: Die Kantenlänge des gegebenen Würfels war 4.

9) Sei $x$ die Einerziffer, $y$ die Zehnerziffer der Zahl. Dann ist die Zahl $10y + x$. Es soll gelten $x + y = 5$ und

$$(10y + x)(10x + y) = 10y + x + 560\,.$$

Setzt man $y = 5 - x$ in diese Gleichung ein, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
&(10 \cdot (5 - x) + x)(10x + 5 - x) = 10 \cdot (5 - x) + x + 560 \\
\iff &(50 - 9x)(9x + 5) = 50 - 9x + 560 \\
\iff &-81x^2 + 414x - 360 = 0 \iff x^2 - \frac{46}{9}x + \frac{40}{9} = 0 \\
\iff &x = \frac{23}{9} \pm \sqrt{\frac{529}{81} - \frac{40}{9}} = \frac{23}{9} \pm \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{23}{9} \pm \frac{13}{9}\,.
\end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind also $\frac{10}{9}$ und 4. Da unsere gesuchte Größe $x$ aber eine Ziffer sein soll, kommt als Lösung für das gestellte Problem nur $x = 4$ in Frage. Die zugehörige Zehnerziffer ist dann $y = 5 - x = 5 - 4 = 1$ und die gesuchte Zahl lautet 14.

## Übungen (8)

1) a) Wiederholen Sie Definition und fundamentale Gesetzmäßigkeiten für Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten (Skript 1.c.).
Überprüfen Sie Ihre Kenntnisse an den folgenden Aufgabenteilen.
b) Zeigen Sie:
i) $2^{21} - 2^{20} = 2^{20}$, ii) $4^{21} - 2 \cdot 4^{20} = 2^{41}$, iii) $\dfrac{2^{101} - 2^{100}}{2^{101} + 2^{100}} = \dfrac{1}{3}$.
c) Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig, welche nicht?
i) $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ ii) $(-a^4)^3 = (-a^3)^4$
iii) $\dfrac{a^5}{b^3} = a^2 \cdot (\dfrac{a}{b})^3$ iv) $[(-a)^4]^3 = [(-a)^3]^4$

2) a) Wiederholen Sie Definition und Gesetzmäßigkeiten für Potenzen mit negativen Exponenten (Skript 2.e.).
Überprüfen Sie Ihre Kenntnisse an den folgenden Aufgabenteilen.
b) Berechnen Sie:
i) $(2^{121} - 2^{120}) \cdot (2^{-121} + 2^{-120}) =$ , ii) $(3^{135} - 3^{133}) \cdot (3^{-133} - 3^{-135}) =$ .
c) Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig und welche nicht?
i) $a^3 : b^3 = a^{-3} \cdot b^{-3}$ ii) $(-a^4)^{-3} = -\dfrac{1}{a^{12}}$
iii) $\dfrac{a^3}{b^5} = b^{-2} \cdot (\dfrac{a}{b})^3$, iv) $\dfrac{1}{a^{-2} + b^{-2}} = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

3) a) Welche der beiden Zahlen $y, z$ ist größer? Begründen Sie Ihre Antwort.
i) $y = (9^9)^9$, $z = 9^{(9^9)}$, ii) $y = 4^{(4^4)}$, $z = 2^{(2^9)}$. iii) $y = (\dfrac{1}{5})^{(5^4)}$, $z = 5^{(-4^5)}$
b) Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig und welche nicht?
i) $a^3 < b^2$ für $0 < a < b$, ii) $(\dfrac{1}{a})^4 > (\dfrac{1}{a})^3$ für $0 < a < 1$,
iii) $a^{-4} > a^{-3}$ für $1 < a$, iv) $a^{-3} < \dfrac{1}{b^3}$ für $0 < b < a$.

4) Berechnen Sie:
a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{49^2}{16}}$ d) $\sqrt[5]{8 \cdot (-4)}$ e) $\sqrt[5]{-(-4)^3 + (-2)^5}$
f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ g) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{64}$

5) Lösen Sie:
a) $\dfrac{8}{x-1} = (x-1)^2$ b) $\dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{4}$ c) $\sqrt[3]{x^2} = 2$ d) $-x^3 - 2 = x^3 + 14$

6) Berechnen Sie:
a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$, b) $49^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{7}$, c) $\dfrac{25^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}}$, d) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.
e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ , f) $(\sqrt[3n]{x^2})^n$, g) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}}$.

## Übungen (8) — Lösungen

1) a) Für natürliche Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und beliebige reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ definiert man die $k$-te Potenz $a^k$ als Produkt aus $k$ gleichen Faktoren $a$:

$$a^k = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{k-\text{mal}} .$$

Daraus ergaben sich die fundamentalen Regeln (für $a \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{a^k \cdot a^l = a^{k+l}\,, \quad a^k \cdot b^k = (ab)^k\,, \quad (a^k)^l = a^{kl}\,.}$$

b) i) $2^{21} - 2^{20} = 2^{1+20} - 2^{20} = 2 \cdot 2^{20} - 2^{20} = (2-1) \cdot 2^{20} = 2^{20}$.
ii) $4^{21} - 2 \cdot 4^{20} = 4 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{20} = (4-2) \cdot 4^{20} = 2 \cdot (2^2)^{20} = 2 \cdot 2^{40} = 2^{41}$.
iii) $\dfrac{2^{101} - 2^{100}}{2^{101} + 2^{100}} = \dfrac{2^{100} \cdot (2-1)}{2^{100} \cdot (2+1)} = \dfrac{1}{3}$.
c) i) ist falsch, denn $(1+1)^5 = 2^5 \neq 1^5 + 1^5 = 2$.
ii) falsch, denn: $(-a^4)^3 = (-1)^3 \cdot a^{4 \cdot 3} = -a^{12}$ und $(-a^3)^4 = (-1)^4 \cdot a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.
iii) ist allgemeingültig, denn: $\dfrac{a^5}{b^3} = \dfrac{a^2 \cdot a^3}{b^3} = a^2 \cdot (\dfrac{a}{b})^3$.
iv) ist allgemeingültig, denn $[(-a)^4]^3 = [a^4]^3 = a^{12}$ und $[(-a)^3]^4 = [-a^3]^4 = a^{12}$.

2) a) Man definiert für $a \in \mathbb{R}$ $\boxed{a^0 = 1 \quad \text{und für } a \neq 0\text{:} \quad a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}.}$

Dieser Ansatz ergibt sich aus der obigen Formel $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$. Setzt man darin $k = 0$, so kommt man zur genannten Definition von $a^0$, während sich für $l = -k$ die Definition für $a^{-k}$ ergibt. Der entscheidende Sachverhalt ist, daß bei diesen erweiterten Definitionen die oben genannten fundamentalen Gesetzmäßigkeiten für Potenzen für Basen $a \neq 0$ und *beliebige* Exponenten $k \in \mathbb{Z}$ gültig bleiben!

Es gilt dann insbesondere: $\boxed{\text{Für } a \neq 0\text{:} \quad \dfrac{a^k}{a^l} = a^{k-l}.}$

b) i) $(2^{121} - 2^{120}) \cdot (2^{-121} + 2^{-120}) = 2^0 - 2^{-1} + 2^1 - 2^0 = \dfrac{3}{2}$.
ii) $(3^{135} - 3^{133}) \cdot (3^{-133} - 3^{-135}) = 3^2 - 1 - 1 + 3^{-2} = \dfrac{64}{9}$.
c) i) ist nicht allgemeingültig, denn $2^3 : 1^3 = 8 \neq 2^{-3} \cdot 1^{-3} = \frac{1}{8}$.
ii) ist allgemeingültig, denn $(-a^4)^{-3} = \dfrac{1}{(-a^4)^3} = \dfrac{1}{-a^{12}} = -\dfrac{1}{a^{12}}$.
iii) ist allgemeingültig, denn $b^{-2} \cdot (\dfrac{a}{b})^3 = \dfrac{1}{b^2} \cdot \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a^3}{b^5}$.
iv) ist ebenfalls allgemeingültig, denn $\dfrac{1}{a^{-2} + b^{-2}} = \dfrac{a^2b^2}{(a^{-2} + b^{-2}) \cdot a^2b^2} = \dfrac{a^2b^2}{b^2 + a^2}$.

3) a i) $z > y$, denn wegen $81 = 9^2 < 9^9$ ist $y = (9^9)^9 = 9^{81} < 9^{(9^9)} = z$.
ii) $y = z$, denn $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$, also $y = 4^{(4^4)} = 4^{(2^8)} = 2^{2 \cdot 2^8} = 2^{(2^9)} = z$.
iii) $z > y$, denn aus $4^5 = 1024 > 5^4 = 625$ folgt $5^{(4^5)} > 5^{(5^4)}$ und damit $z = 5^{(-4^5)} = \dfrac{1}{5^{(4^5)}} < \dfrac{1}{5^{(5^4)}} = (\dfrac{1}{5})^{(5^4)} = y$.

b) i) ist falsch für $a = 3$ und $b = 4$.

ii) ist allgemeingültig, denn $0 < a < 1 \implies \frac{1}{a} > 1 \implies (\frac{1}{a})^4 > (\frac{1}{a})^3$.

iii) ist falsch für $a = 2$, denn $2^{-4} = \frac{1}{16}$ und $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

iv) ist allgemeingültig, denn $0 < b < a \implies \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \implies a^{-3} = (\frac{1}{a})^3 < (\frac{1}{b})^3$.

4) a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = 2 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 = 10$. b) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{3}{2}$.

c) $\sqrt[4]{\frac{49^2}{16}} = \sqrt[4]{\frac{7^4}{2^4}} = \frac{7}{2}$. d) $\sqrt[5]{8 \cdot (-4)} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$.

e) $\sqrt[5]{-(-4)^3 + (-2)^5} = \sqrt[5]{64 - 32} = \sqrt[5]{32} = 2$. f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

g) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 2^6} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$.

5) Bei dieser Aufgabe benutzen wir mehrfach, daß bei *ungeradem* Exponenten die Potenzierung und das Radizieren (Wurzelziehen) uneingeschränkt Äquivalenzumformungen sind.

a) Es ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{+1\}$ und $\mathbb{L} = \{3\}$, denn über $\mathbb{D}$ gilt

$$\frac{8}{x-1} = (x-1)^2 \iff 8 = (x-1)^3 \iff 2 = x - 1 \iff x = 3\,.$$

b) Hier ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $\mathbb{L} = \{-3, +1\}$, denn

$$\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4} \iff 16 = (x+1)^4 \iff x + 1 = \pm 2 \iff x = 1 \ \vee\ x = -3\,.$$

d) Es ist $\mathbb{L} = \{-\sqrt{8}, +\sqrt{8}\}$, denn

$$\sqrt[3]{x^2} = 2 \iff x^2 = 2^3 = 8 \iff x = \pm\sqrt{8}\,.$$

d) Hier ist $\mathbb{L} = \{-2\}$, denn

$$-x^3 - 2 = x^3 + 14 \iff -16 = 2x^3 \iff x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2\,.$$

6) a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = \sqrt{3}$. b) $49^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7$.

c) $\frac{25^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{2}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$. d) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{13}{15}} = (\sqrt[15]{2})^{13}$.

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{(\sqrt[3]{a})^2} = \left|\sqrt[3]{a}\right| = \sqrt[3]{|a|}$. f) $(\sqrt[3n]{x^2})^n = (x^2)^{\frac{1}{3n}\cdot n} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$.

g) Dieser Term ist nur definiert für $a > 0$. Dafür gilt dann:

$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}} = \left(a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$.

## Übungen (9)

1) a) Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ gegeben durch

$$f_1(x) = x^2\,, \quad f_2(x) = x^{1/2}\,, \quad f_3(x) = (\frac{1}{3})^x\,,$$
$$f_4(x) = 3^x\,, \quad f_5(x) = \log_3(x) \quad \text{und} \quad f_6(x) = 3^{-x}\,.$$

b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen? Welche sind monoton steigend, welche fallend?

2) a) Definieren Sie $\log_a(x)$, den Logarithmus von $x$ zur Basis $a$. Unter welchen Bedingungen an $a$ und $x$ ist er definiert?
b) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen haben einen ganzzahligen Logarithmus zur Basis i) 2 ii) 3 iii) 4 iv) 5 und v) 10?
c) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen sind Potenzen von $a$ mit ganzzahligen Exponenten für $a = 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 10$?
d) Welche Werte haben die 10er-Logarithmen von 3-stelligen Zahlen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen 10er-Logarithmen und Stellenzahl?

3) a) Formulieren Sie die Rechengesetze für Logarithmen.
b) Begründen Sie: $\log_a(\frac{1}{b}) = -\log_a(b)$ und $\log_a(\sqrt[n]{b}\,) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$.
c) Berechnen Sie:
i) $\log_2(\sqrt{8})$, ii) $\log_3(\sqrt[8]{9})$
iii) $\log_{10}(\sqrt[3]{10000})$, iv) $\log_2\big((\sqrt{2})^{-2}\big)$.

4) Zeigen Sie für $a, b > 1$: $\log_b\big(a^{\log_a(b)}\big) = 1$ und folgern Sie $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$.

5) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $3^{x-1} = 81$, b) $(\sqrt{2}\,)^{x+1} = (\sqrt[8]{8}\,)^x$, c) $2^{(x^2)} = 4^x$, d) $(\frac{1}{3})^{-x+1} = 3^x$.

6) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $\log_2(x) = 3$, b) $\log_3(x) = \frac{1}{7}$, c) $\log_x(0,25) = -1$, d) $\log_{25}(x) = \frac{1}{4}$.

7) Ein Gramm einer radioaktiven Substanz zerfällt so, daß nach der Zeit $t$ (in Stunden) noch $0,8^t$ Gramm vorhanden sind. Wann sind nur noch 0,5 Gramm vorhanden?

8) Licht verliert beim Durchgang durch eine Glasscheibe 5% seiner Intensität. Wieviele Glasplatten hat es durchlaufen, wenn es nur noch 25% seiner ursprünglichen Helligkeit hat?

9) a) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
$\lg(4 \cdot 10^{12})$, $\lg(0,25 \cdot 10^{-12})$, $\lg(2)$, $\log_2(10)$, $\ln(10)$.
b) Lösen Sie mit Hilfe des Taschenrechners:
$-\lg(c) = 4,2$, $4,2 - \lg(c) = 14$, $\lg(4x) = -5$, $\log_3(x) = 3,5$.

**Übungen (9) — Lösungen**

1) b) Die Funktionen $f_1$ und $f_2$ sind Umkehrfunktionen voneinander, also sind ihre Graphen spiegelbildlich zueinander bzgl. der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Dasselbe gilt für die Funktionen $f_4$ und $f_5$. $f_3$ und $f_6$ sind identische Funktionen, denn $f_3(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x} = f_6(x)$. Schließlich sind die Graphen von $f_4$ und $f_6$ spiegelbildlich zueinander bzgl. der $y$-Achse, denn $f_6(x) = 3^{-x} = f_4(-x)$. Monoton steigend sind die Wurzelfunktion $f_2$, die Exponentialfunktion $f_4$ und ihre Umkehrfunktion $f_5$ (weil deren Basis jeweils 3, also größer als 1 ist); die Exponentialfunktion $f_3$ ist monoton fallend, weil die Basis kleiner als 1 ist. Die Funktion $f_1$ ist insgesamt weder monoton fallend noch steigend; betrachtet man jedoch Teilintervalle, so kann man genauer sagen: Über dem Intervall $]-\infty, 0]$ ist $f_1$ monoton fallend, über $[0, +\infty[$ monoton steigend.

2) a) Der *Logarithmus* $\log_a(x)$ von $x$ zur Basis $a$ ist der *Exponent,* mit dem man $a$ potenzieren muß, um $x$ zu erhalten:

$$\boxed{y = \log_a(x) \iff a^y = x.}$$

Er ist definiert für $a > 0$, $a \neq 1$ und beliebige $x > 0$. Der Definitionsbereich einer Logarithmusfunktion ist das Intervall $]0, +\infty[$ aller positiven Zahlen.
b) 16 , 32 , 64, b) 27 , 81, c) 16 , 64, d) 25 und d) 10.
c) ist dieselbe Frage wie b) nur in anderer Formulierung: 'Logarithmus' ist im Grunde ein anderes Wort für 'Exponent' (siehe a)).
d) Dreistellige Zahlen $x$ liegen zwischen $10^2 = 100$ und $10^3 = 1000$: $10^2 \leq x < 10^3$. Für die Logarithmen zur Basis 10 bedeutet dies (wegen der Monotonie!) $\log_{10}(10^2) \leq \log_{10}(x) < \log_{10}(10^3) \iff 2 \leq \log_{10} < 3$; der Logarithmus hat eine 2 vor dem Komma. Nimmt man also vom 10er-Logarithmus einer natürlichen Zahl den 'ganzen Anteil' (die Zahl vor dem Komma) und erhöht ihn um 1, so erhält man die Stellenzahl.

3) a) Da $\log_a$ die Umkehrung der Exponentialfunktion zur Basis $a$ ist, erhält man aus den bekannten Potenzgesetzen $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und $(a^x)^r = a^{rx}$ die Logarithmenregeln (für $1 \neq a > 0$, $b, c > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\boxed{\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)\,, \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b).}$$

b) Nach dem zweiten in a) formulierten Rechengesetz gilt für $1 \neq a > 0$, $b > 0$:

$$\log_a(\frac{1}{b}) = \log_a(b^{-1}) = -\log_a(b) \quad \text{und} \quad \log_a(\sqrt[n]{b}\,) = \log_a(b^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)\,.$$

c) i) $\log_2(\sqrt{8}) = \log_2(8^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2(2^3) = \dfrac{1}{2} \cdot 3 = \dfrac{3}{2}$,
ii) $\log_3(\sqrt[8]{9}) = \frac{1}{8} \cdot \log_3(3^2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$,
iii) $\log_{10}(\sqrt[3]{10000}) = \frac{1}{3} \cdot \log_{10}(10^4) = \frac{4}{3}$,
iv) $\log_2\left((\sqrt{2})^{-2}\right) = -2 \cdot \log_2(2^{\frac{1}{2}}) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

4) Es ist nach Definition des Logarithmus $a^{\log_a(b)} = b$, also

$$\log_b(a^{\log_a(b)}) = \log_b(b) = 1\,.$$

Andererseits kann man die linke Seite nach den Rechengesetzen für den Logarithmus berechnen und erhält

$$\log_b(a^{\log_a(b)}) = \log_a(b) \cdot \log_b(a)\,.$$

Beide Formeln zusammen ergeben die zweite der behaupteten Gleichungen.

5) a)

$$\begin{array}{rrcll} & 3^{x-1} & = & 81 = 3^4 & \mid \log_3 \\ \Longleftrightarrow & x-1 & = & 4 & \mid +1 \\ \Longleftrightarrow & x & = & 5 & \\ \mathbb{L} & & = & \{5\} & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrcll} & 2^{(x^2)} & = & 4^x = 2^{2x} & \mid \log_2 \\ \Longleftrightarrow & x^2 & = & 2x & \mid -2x \\ \Longleftrightarrow & x^2-2x & = & 0 & \\ \Longleftrightarrow & x(x-2) & = & 0 & \\ \Longleftrightarrow & & & x = 0 \vee x = 2 & \\ \mathbb{L} & & = & \{0,2\} & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrcll} & (\sqrt{2}\,)^{x+1} & = & (\sqrt[8]{8}\,)^x & \\ \Longleftrightarrow & (2^{1/2})^{x+1} & = & (\sqrt[8]{2^3}\,)^x & \\ \Longleftrightarrow & 2^{\frac{1}{2}(x+1)} & = & 2^{\frac{3}{8}\cdot x} & \mid \log_2 \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{2}(x+1) & = & \frac{3}{8}\cdot x & \mid \cdot 8 \\ \Longleftrightarrow & 4x+4 & = & 3x & \mid -3x-4 \\ \Longleftrightarrow & x & = & -4 & \\ \mathbb{L} & & = & \{-4\} & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrcll} & (\frac{1}{3})^{-x+1} & = & 3^x & \mid \log_3 \\ \Longleftrightarrow & (-x+1)\cdot\log_3(\frac{1}{3}) & = & x & \\ \Longleftrightarrow & (-x+1)\cdot(-1) & = & x & \\ \Longleftrightarrow & x-1 & = & x & \mid +x \\ \Longleftrightarrow & -1 & = & 0 & \\ \mathbb{L} & & = & \emptyset = \{\} & \end{array}$$

6) Man beachte die Definitionsbereiche: In a), b) und d) tritt die gesuchte Größe $x$ jeweils als Argument einer Logarithmusfunktion auf; diese sind nur für positive Zahlen definiert, also gilt für diese drei Fälle $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = ]0;\infty[$:

a) $$\log_2(x) = 3 \iff x = 2^3 = 8 \;:\quad \mathbb{L} = \{8\}\,,$$

b) $$\log_3(x) = \frac{1}{7} \iff x = 3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3} \;:\quad \mathbb{L} = \{\sqrt[7]{3}\}\,,$$

d) $$\log_{25}(x) = \frac{1}{4} \iff x = 25^{1/4} = 5^{1/2} = \sqrt{5} \;:\quad \mathbb{L} = \{\sqrt{5}\}\,.$$

In c) tritt $x$ als Basis einer Logarithmusfunktion auf, also ist hier der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 1\}$:

$$\log_x(0,25) = -1 \iff 0,25 = x^{-1} \iff \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \iff x = 4 \;:\quad \mathbb{L} = \{4\}\,.$$

7) Gesucht ist die Zeit $t$ mit $0,8^t = 0,5$. Auch ohne Taschenrechner kann man eine gute Näherung wie folgt bestimmen: $0,8 = 8\cdot 10^{-1}$, also $0,8^2 = 8^2 \cdot 10^{-2} = 0,64$,

$0,8^3 = 8^3 \cdot 10^{-3} = 2^9 \cdot 10^{-3} = 512 \cdot 10^{-3} = 0,512$. Nach 3 Stunden ist also noch geringfügig mehr als die Hälfte vorhanden. Die gesuchte Halbwertzeit dürfte also etwas größer als 3 Stunden sein.
Lösung der Gleichung $0,8^t = 0,5$ mit Hilfe des dekadischen Logarithmus $\log_{10} = \lg$:

$$0,8^t = 0,5 \iff \lg(0,8^t) = \lg(0,5) \iff t \cdot \lg(0,8) = \lg(0,5) \iff t = \frac{\lg(0,5)}{\lg(0,8)}$$

Dieser Lösungswert für $t$ ist mit dem Taschenrechner berechenbar:

$$t \approx \frac{-0,3010299995}{-0,096910013} \approx 3,1\,,$$

und bestätigt unsere obige Abschätzung.

8) Bei jedem Durchgang durch eine Glasplatte reduziert sich die Intensität $I$ des Lichtes auf 95%, also wird pro Platte die Intensität mit dem Faktor $c = 0,95$ multipliziert. Die Intensität $I(n)$ nach dem Durchgang durch $n$ Platten beträgt also $I(n) = 0,95^n$. Gesucht ist nun die Zahl $n$, für die die Intensität 0,25 ist.

$$0,25 = 0,95^x \iff \log(0,25) = \log(0,95^x) = x \cdot \log(0,95) \iff x = \frac{\log(0,25)}{\log(0,95)}$$

und der Taschenrechner liefert (mit $\log = \lg$)

$$x \approx \frac{-0,602059991}{-0,022276394} \approx 27,03$$

Bei 27 Platten ist also die Intensität noch größer als 25% und bei 28 bereits kleiner.

9) a) $\lg(4 \cdot 10^{12}) \approx 12,60206$, $\quad \lg(0,25 \cdot 10^{-12}) \approx -12,60206$.
(Beachten Sie, daß $0,25 \cdot 10^{-12}$ der Kehrwert von $4 \cdot 10^{12}$ ist!)
$\lg(2) \approx 0,30103$, $\log_2(10) = \lg(10)/\lg(2) = 1/\lg(2) \approx 3,32193$, $\ln(10) \approx 2,30259$.
b) $-\lg(c) = 4,2 \iff \lg(c) = -4,2 \iff c = 10^{-4,2} \approx 6,30957 \cdot 10^{-5}$,
$4,2 - \lg(c) = 14 \iff \lg(c) = -9,8 \iff c = 10^{-9,8} \approx 1,58489 \cdot 10^{-10}$,
$\lg(4x) = -5 \iff 4x = 10^{-5} \iff x = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5} = 2,5 \cdot 10^{-6} = 0,0000025$,
$\log_3(x) = 3,5 \iff x = 3^{3,5} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 27\sqrt{3} \approx 46,76537$.