Leistungskurs Mathematik

Übungen 4. Semester

Dr. Norbert Klingen, Köln-Kolleg

1. Februar 2004

Inhaltsverzeichnis

Übung (1)[1)]

1) a) Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen $f_1, \dots, f_6$ gegeben durch

$$f_1(x) = x^2\,, \quad f_2(x) = x^{1/2}\,, \quad f_3(x) = (\frac{1}{3})^x\,,$$
$$f_4(x) = 3^x\,, \quad f_5(x) = \log_3(x) \quad \text{und} \quad f_6(x) = 3^{-x}\,.$$

b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen? Welche sind monoton steigend, welche fallend?

2) a) Definieren Sie $\log_a(x)$, den Logarithmus von x zur Basis a. Unter welchen Bedingungen an a und x ist er definiert?
b) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen haben einen ganzzahligen Logarithmus zur Basis i) 2 ii) 3 iii) 4 iv) 5 und v) 10?
c) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen sind Potenzen von a mit ganzzahligen Exponenten für $a = 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 10$?
d) Welche Werte haben die 10er-Logarithmen von 3-stelligen Zahlen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen 10er-Logarithmen und Stellenzahl?

3) a) Formulieren Sie die Rechengesetze für Logarithmen.
b) Begründen Sie: $\log_a(\frac{1}{b}) = -\log_a(b)$ und $\log_a(\sqrt[n]{b}\,) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$.
c) Berechnen Sie:
i) $\log_2(\sqrt{8})$, ii) $\log_3(\sqrt[8]{9})$
iii) $\log_{10}(\sqrt[3]{10000})$, iv) $\log_2\left((\sqrt{2})^{-2}\right)$.

4) Zeigen Sie für $a, b > 1$: $\log_b\left(a^{\log_a(b)}\right) = 1$ und folgern Sie $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$.

5) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $3^{x-1} = 81$, b) $(\sqrt{2}\,)^{x+1} = (\sqrt[8]{8}\,)^x$, c) $2^{(x^2)} = 4^x$, d) $(\frac{1}{3})^{-x+1} = 3^x$.

6) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
a) $\log_2(x) = 3$, b) $\log_3(x) = \frac{1}{7}$, c) $\log_x(0,25) = -1$, d) $\log_{25}(x) = \frac{1}{4}$.

7) Ein Gramm einer radioaktiven Substanz zerfällt so, daß nach der Zeit t (in Stunden) noch $0,8^t$ Gramm vorhanden sind. Wann sind nur noch 0,5 Gramm vorhanden?

8) Licht verliert beim Durchgang durch eine Glasscheibe 5% seiner Intensität. Wieviele Glasplatten hat es durchlaufen, wenn es nur noch 25% seiner ursprünglichen Helligkeit hat?

9) a) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
$\lg(4 \cdot 10^{12})$, $\lg(0,25 \cdot 10^{-12})$, $\lg(2)$, $\log_2(10)$, $\ln(10)$.
b) Lösen Sie mit Hilfe des Taschenrechners:
$-\lg(c) = 4,2$, $4,2 - \lg(c) = 14$, $\lg(4x) = -5$, $\log_3(x) = 3,5$.

[1)] Kopie von Übung (9) aus dem 2. Semester

Übung (1) — Lösungen

1) b) Die Funktionen f_1 und f_2 sind Umkehrfunktionen voneinander, also sind ihre Graphen spiegelbildlich zueinander bzgl. der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Dasselbe gilt für die Funktionen f_4 und f_5. f_3 und f_6 sind identische Funktionen, denn $f_3(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x} = f_6(x)$. Schließlich sind die Graphen von f_4 und f_6 spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse, denn $f_6(x) = 3^{-x} = f_4(-x)$. Monoton steigend sind die Wurzelfunktion f_2, die Exponentialfunktion f_4 und ihre Umkehrfunktion f_5 (weil deren Basis jeweils 3, also größer als 1 ist); die Exponentialfunktion f_3 ist monoton fallend, weil die Basis kleiner als 1 ist. Die Funktion f_1 ist insgesamt weder monoton fallend noch steigend; betrachtet man jedoch Teilintervalle, so kann man genauer sagen: Über dem Intervall $]-\infty, 0]$ ist f_1 monoton fallend, über $[0, +\infty[$ monoton steigend.

2) a) Der *Logarithmus* $\log_a(x)$ von x zur Basis a ist der *Exponent,* mit dem man a potenzieren muß, um x zu erhalten:

$$\boxed{y = \log_a(x) \iff a^y = x.}$$

Er ist definiert für $a > 0$, $a \neq 1$ und beliebige $x > 0$. Der Definitionsbereich einer Logarithmusfunktion ist das Intervall $]0, +\infty[$ aller positiven Zahlen.
b) 16 , 32 , 64, b) 27 , 81, c) 16 , 64, d) 25 und d) 10.
c) ist dieselbe Frage wie b) nur in anderer Formulierung: 'Logarithmus' ist im Grunde ein anderes Wort für 'Exponent' (siehe a)).
d) Dreistellige Zahlen x liegen zwischen $10^2 = 100$ und $10^3 = 1000$: $10^2 \leq x < 10^3$. Für die Logarithmen zur Basis 10 bedeutet dies (wegen der Monotonie!) $\log_{10}(10^2) \leq \log_{10}(x) < \log_{10}(10^3) \iff 2 \leq \log_{10} < 3$; der Logarithmus hat eine 2 vor dem Komma. Nimmt man also vom 10er-Logarithmus einer natürlichen Zahl den 'ganzen Anteil' (die Zahl vor dem Komma) und erhöht ihn um 1, so erhält man die Stellenzahl.

3) a) Da $\log_a$ die Umkehrung der Exponentialfunktion zur Basis a ist, erhält man aus den bekannten Potenzgesetzen $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und $(a^x)^r = a^{rx}$ die Logarithmenregeln (für $1 \neq a > 0$, $b, c > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\boxed{\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)\,, \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b).}$$

b) Nach dem zweiten in a) formulierten Rechengesetz gilt für $1 \neq a > 0$, $b > 0$:

$$\log_a(\frac{1}{b}) = \log_a(b^{-1}) = -\log_a(b) \quad \text{und} \quad \log_a(\sqrt[n]{b}) = \log_a(b^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)\,.$$

c) i) $\log_2(\sqrt{8}) = \log_2(8^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2(2^3) = \dfrac{1}{2} \cdot 3 = \dfrac{3}{2}$,
ii) $\log_3(\sqrt[8]{9}) = \frac{1}{8} \cdot \log_3(3^2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$,
iii) $\log_{10}(\sqrt[3]{10000}) = \frac{1}{3} \cdot \log_{10}(10^4) = \frac{4}{3}$,
iv) $\log_2\left((\sqrt{2})^{-2}\right) = -2 \cdot \log_2(2^{\frac{1}{2}}) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

4) Es ist nach Definition des Logarithmus $a^{\log_a(b)} = b$, also

$$\log_b(a^{\log_a(b)}) = \log_b(b) = 1\,.$$

Andererseits kann man die linke Seite nach den Rechengesetzen für den Logarithmus berechnen und erhält

$$\log_b(a^{\log_a(b)}) = \log_a(b) \cdot \log_b(a)\,.$$

Beide Formeln zusammen ergeben die zweite der behaupteten Gleichungen.

5) a)

$$\begin{array}{rrcll} & 3^{x-1} & = & 81 = 3^4 & \mid \log_3 \\ \iff & x-1 & = & 4 & \mid +1 \\ \iff & x & = & 5 & \\ \mathbb{L} & & = \{5\} & & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrcll} & 2^{(x^2)} & = & 4^x = 2^{2x} & \mid \log_2 \\ \iff & x^2 & = & 2x & \mid -2x \\ \iff & x^2-2x & = & 0 & \\ \iff & x(x-2) & = & 0 & \\ \iff & x = 0 \vee x = 2 & & & \\ \mathbb{L} & & = \{0,2\} & & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrcll} & (\sqrt{2}\,)^{x+1} & = & (\sqrt[8]{8}\,)^x & \\ \iff & (2^{1/2})^{x+1} & = & (\sqrt[8]{2^3}\,)^x & \\ \iff & 2^{\frac{1}{2}(x+1)} & = & 2^{\frac{3}{8}\cdot x} & \mid \log_2 \\ \iff & \frac{1}{2}(x+1) & = & \frac{3}{8}\cdot x & \mid \cdot 8 \\ \iff & 4x+4 & = & 3x & \mid -3x-4 \\ \iff & x & = & -4 & \\ \mathbb{L} & & = \{-4\} & & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrcll} & (\frac{1}{3})^{-x+1} & = & 3^x & \mid \log_3 \\ \iff & (-x+1)\cdot\log_3(\frac{1}{3}) & = & x & \\ \iff & (-x+1)\cdot(-1) & = & x & \\ \iff & x-1 & = & x & \mid +x \\ \iff & -1 & = & 0 & \\ \mathbb{L} & & = \emptyset = \{\} & & \end{array}$$

6) Man beachte die Definitionsbereiche: In a), b) und d) tritt die gesuchte Größe x jeweils als Argument einer Logarithmusfunktion auf; diese sind nur für positive Zahlen definiert, also gilt für diese drei Fälle $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0;\infty[$:

a) $$\log_2(x) = 3 \iff x = 2^3 = 8 \ : \quad \mathbb{L} = \{8\}\,,$$

b) $$\log_3(x) = \frac{1}{7} \iff x = 3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3} \ : \quad \mathbb{L} = \{\sqrt[7]{3}\}\,,$$

d) $$\log_{25}(x) = \frac{1}{4} \iff x = 25^{1/4} = 5^{1/2} = \sqrt{5} \ : \quad \mathbb{L} = \{\sqrt{5}\}\,.$$

In c) tritt x als Basis einer Logarithmusfunktion auf, also ist hier der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 1\}$:

$$\log_x(0,25) = -1 \iff 0,25 = x^{-1} \iff \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \iff x = 4 \ : \quad \mathbb{L} = \{4\}\,.$$

7) Gesucht ist die Zeit t mit $0,8^t = 0,5$. Auch ohne Taschenrechner kann man eine gute Näherung wie folgt bestimmen: $0,8 = 8 \cdot 10^{-1}$, also $0,8^2 = 8^2 \cdot 10^{-2} = 0,64$,

$0,8^3 = 8^3 \cdot 10^{-3} = 2^9 \cdot 10^{-3} = 512 \cdot 10^{-3} = 0,512$. Nach 3 Stunden ist also noch geringfügig mehr als die Hälfte vorhanden. Die gesuchte Halbwertzeit dürfte also etwas größer als 3 Stunden sein.
Lösung der Gleichung $0,8^t = 0,5$ mit Hilfe des dekadischen Logarithmus $\log_{10} = \lg$:

$$0,8^t = 0,5 \iff \lg(0,8^t) = \lg(0,5) \iff t \cdot \lg(0,8) = \lg(0,5) \iff t = \frac{\lg(0,5)}{\lg(0,8)}$$

Dieser Lösungswert für t ist mit dem Taschenrechner berechenbar:

$$t \approx \frac{-0,3010299995}{-0,096910013} \approx 3,1\,,$$

und bestätigt unsere obige Abschätzung.

8) Bei jedem Durchgang durch eine Glasplatte reduziert sich die Intensität I des Lichtes auf 95%, also wird pro Platte die Intensität mit dem Faktor $c = 0,95$ multipliziert. Die Intensität $I(n)$ nach dem Durchgang durch n Platten beträgt also $I(n) = 0,95^n$. Gesucht ist nun die Zahl n, für die die Intensität 0,25 ist.

$$0,25 = 0,95^x \iff \log(0,25) = \log(0,95^x) = x \cdot \log(0,95) \iff x = \frac{\log(0,25)}{\log(0,95)}$$

und der Taschenrechner liefert (mit $\log = \lg$)

$$x \approx \frac{-0,602059991}{-0,022276394} \approx 27,03$$

Bei 27 Platten ist also die Intensität noch größer als 25% und bei 28 bereits kleiner.

9) a) $\lg(4 \cdot 10^{12}) \approx 12,60206$, $\quad \lg(0,25 \cdot 10^{-12}) \approx -12,60206$.
(Beachten Sie, daß $0,25 \cdot 10^{-12}$ der Kehrwert von $4 \cdot 10^{12}$ ist!)
$\lg(2) \approx 0,30103$, $\log_2(10) = \lg(10)/\lg(2) = 1/\lg(2) \approx 3,32193$, $\ln(10) \approx 2,30259$.
b) $-\lg(c) = 4,2 \iff \lg(c) = -4,2 \iff c = 10^{-4,2} \approx 6,30957 \cdot 10^{-5}$,
$4,2 - \lg(c) = 14 \iff \lg(c) = -9,8 \iff c = 10^{-9,8} \approx 1,58489 \cdot 10^{-10}$,
$\lg(4x) = -5 \iff 4x = 10^{-5} \iff x = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5} = 2,5 \cdot 10^{-6} = 0,0000025$,
$\log_3(x) = 3,5 \iff x = 3^{3,5} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 27\sqrt{3} \approx 46,76537$.

Übungen (2)

Übungen aus dem Lehrbuch:

1) Rechnen mit Logarithmen: S. 86, Aufgaben 13–15
2) Erste Ableitungsübungen: S. 86, Aufgaben 5–6; S. 93, Aufgabe 4
3) Tangenten: S. 86, Aufgaben 7–9; S. 93, Aufgaben 5, 7
4) Ableitungsübungen: S. 94, Aufgaben 1–3,6,7
5) Erste Funktionsuntersuchungen: S. 90, Aufgabe 4 d)–f), a)–c); S. 93, Aufgabe 6
6) Funktionsuntersuchungen: S. 95, Aufgaben 12–15
7) Tangenten: S. 97, Aufgaben 24–27
8) Funktionsscharen: S. 97/98, Aufgaben 28–30, 32–36
9) Extremwertaufgaben: S. 96, Aufgaben 21–23
10) Anwendungen: S. 98/99, Aufgaben 37–41

Hinweis: Die Bearbeitungsreihenfolge ist gegenüber dem ausgeteilten Aufgabenblatt verändert! (Aufgaben 4) und 5) sind ausgetauscht; bei den Funktionsuntersuchungen S. 90, Aufgabe 4) wurde erst d)–f) und dann a)–c) bearbeitet.

Übungen (2) — Lösungen

1) **S. 86, Aufgabe 13:**

a) 2, b) -2, c) $\frac{1}{2}$,

d) $\frac{1}{3}$, e) $2-\ln(k)$, f) $\ln(2)+3$,

g) $\frac{1}{2}\cdot(\ln(3)-1)$, h) $3k$, i) $\frac{1}{n}$

j) 3, k) $\frac{1}{2}$, l) $\sqrt{3}$,

m) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, n) 20.

S. 86, Aufgabe 14:

a) $\ln(\frac{x+1}{x^2})$, b) $\ln(\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}) = \ln(\frac{x^2-1}{x^2})$,

c) $\ln(\frac{x^3}{(x+2)(x-2)}) = \ln(\frac{x^3}{x^2-4})$, d) $-x^3-x^2$.

S. 86, Aufgabe 15:

a) $\mathbb{L}=\{e^3\}$, b) $\mathbb{L}=\{\frac{1}{e}\}$, c) $\mathbb{L}=\{e^2-1\}$,

d) $\mathbb{L}=\{\sqrt{e},-\sqrt{e}\}$, e) $\mathbb{L}=\{2\}$, f) $\mathbb{L}=\{\ln(2)\}$,

g) $\mathbb{L}=\{2\ln(3)\}$, h) $\mathbb{L}=\{\frac{-\ln(2)-1}{2}\}$, i) $\mathbb{L}=\{(\ln(2))^2\}$,

j) $\mathbb{L}=\{\pm\sqrt{\frac{\ln(7)}{3}}\}$.

2) **S. 86, Aufgabe 5:**

a) $f'(x)=2e^{2x}$, b) $f'(t)=7e^{2t+1}$, c) $f'(t)=-e^{-t}$,

d) $f'(x)=-e^{-\frac{x}{2}}$, e) $f'(x)=2e^x+1$, f) $f'(x)=ke^{kx}$,

g) $f'(x)=au\,e^{ux+v}$, h) $h'(x)=-\frac{1}{d}\cdot e^{-\frac{x+1}{d}}$.

S. 86, Aufgabe 6:

a) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot e^{-x}$, b) $f^{(n)}(x)=5^n e^{5x}$,

c) $f^{(n)}(t)=\lambda^n e^{\lambda t+1}$, d) $f^{(n)}(t)=(-k)^n e^{-kt}$.

S. 93, Aufgabe 4:

a) $f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$, b) $f'(x)=\frac{1}{\ln(2)x}+1$, $f''(x)=-\frac{1}{\ln(2)x^2}$,

c) $f'(x) = \frac{1}{\ln(3)x} + \ln(3) \cdot 3^x$, $f''(x) = -\frac{1}{\ln(3)x^2} + \ln(3)^2 \cdot 3^x$,

d) $f'(x) = \frac{2}{x}$, $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$, e) $f'(t) = \frac{k}{1+kt}$, $f''(x) = -\frac{k^2}{(1+kt)^2}$,

f) $h'(t) = \frac{1}{2\cdot(t-b)}$, $h''(t) = -\frac{1}{2\cdot(t-b)^2}$, g) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$,

h) $f'(x) = 2x + 2$, $f''(x) = 2$.

3) Wir wiederholen die allgemeine Tangentengleichung: Ist f an der Stelle a differenzierbar, dann ist die

$$\boxed{\text{Tangentengleichung:} \quad y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).}$$

Hierbei ist a die Berührstelle, $(a, f(a))$ der Berührpunkt der Tangente mit dem Graphen.
S. 86, Aufgabe 7: Ergebnisse:

$f(x)$	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$a=2$
e^x	$y = \frac{1}{e} \cdot (x+2)$	$y = x+1$	$y = ex$	$y = e^2(x-1)$
$e^{\frac{x}{2}}$	$y = \frac{1}{2\sqrt{e}}(x+3)$	$y = \frac{1}{2}(x+2)$	$y = \sqrt{e} \cdot (x+1)$	$y = \frac{e}{2} \cdot x$
$3e^{\frac{x}{10}}$	$y = \frac{3}{10\sqrt[10]{e}} \cdot (x+11)$	$y = \frac{3}{10}(x+10)$	$y = \frac{3\sqrt[10]{e}}{10} \cdot (x+9)$	$y = \frac{e\sqrt[5]{e}}{10} \cdot (x+8)$

Die Tangentengleichungen sind in faktorisierter Form angegeben, so dass man die Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse unmittelbar ablesen kann.
Schnittstellen der Tangenten mit der x-Achse:

$f(x)$	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$a=2$
e^x	-2	-1	0	1
$e^{\frac{x}{2}}$	-3	-2	-1	0
$3e^{\frac{x}{10}}$	-11	-10	-9	-8

Es zeigt sich: Bei $f(x) = e^x$ (1. Zeile) ist die Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse immer gleich $a - 1$ (siehe nachfolgende Aufgabe 9), bei $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ist sie immer gleich $a - 2$ und bei $f(x) = 3e^{\frac{x}{10}}$ liegt die Schnittstelle immer bei $a - 10$. Welche über Aufgabe 9 hinausgehende Vermutung entnehmen Sie daraus? Beweisen Sie sie wie Aufgabe 9.

S. 86, Aufgabe 8: Die Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ an der Stelle $a = 0$ ist gegeben durch die Funktion $t_a(x) = e^a + e^a(x - a) = 1 + x$. Damit ist $f(x) = e^x$ in der Nähe von 0 (in „erster Näherung“) gegeben durch

$$\boxed{e^x \approx 1 + x \text{ für } x \text{ nahe bei } 0.}$$

Insbesondere $\sqrt[500]{e} = e^{0{,}002} \approx 1{,}002$, $e^{-0{,}001} = \frac{1}{\sqrt[1000]{e}} \approx 1 - 0{,}001 = 0{,}999$ und $e^{0{,}1} = \sqrt[10]{e} \approx 1{,}1$.

S. 86, Aufgabe 9: a) Die Tangentenfunktion zu $f(x) = e^x$ ist $t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = e^a + e^a(x-a)$, wobei a die Berührstelle ist. Die Nullstelle von t_a ergibt sich zu:

$$t_a(x) = 0 \iff e^a + e^a(x-a) = \iff e^a(x-a+1) = 0 \iff x = a-1\,.$$

Damit ist die Nullstelle der Tangente gleich $a-1$, wenn a die Berührstelle ist. Dies ist genau die behauptete Aussage.
b) Geometrische Konstruktion der Tangenten an den Graphen der e-Funktion: Man fälle das Lot vom Berührpunkt (a, e^a) auf die x-Achse, gehe auf der x-Achse 1 Einheit nach links und zeichne die Gerade durch diesen Punkt $(a-1, 0)$ und den Berührpunkt $b = (a, f(a))$.
Zusatz: Ist $f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{k}}$, so ist die Nullstelle der Tangentenfunktion t_a gerade $a-k$:

$$\begin{aligned} t_a(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) = c \cdot e^{\frac{a}{k}} + \frac{c}{k} \cdot e^{\frac{a}{k}} \cdot (x-a) = \frac{c}{k} \cdot e^{\frac{a}{k}} \cdot \big(k + x - a\big)\,, \\ t_a(x) &= 0 \iff k + x - a = 0 \iff x = a - k\,. \end{aligned}$$

Dies beweist die sich in Aufgabe 7 aufdrängende Vermutung.

S. 93, Aufgabe 5: Gesucht sind Tangenten, die parallel zu der gegebenen Geraden verlaufen, d. h. die dieselbe Steigung wie diese Gerade haben. Wir formen die Geradengleichung um:

$$2x - 3y + 7 = 0 \iff 3y = 2x + 7 \iff y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\,.$$

Damit hat die Gerade die Steigung $m = \frac{2}{3}$ und gesucht sind die Stellen x mit $f'(x) = \frac{2}{3}$.
Für $f(x) = \ln x$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{x}$. Also müssen wir die folgende Gleichung lösen:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \iff x = \frac{3}{2}\,.$$

Nur an der Stelle $\frac{3}{2}$ hat der natürliche Logarithmus ln eine Tangente parallel zur gegebenen Geraden. Die Tangentengleichung lautet

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = \ln\frac{3}{2} + \frac{2}{3}(x - \frac{3}{2}) = \frac{2}{3}x - 1 + \ln 3 - \ln 2\,.$$

S. 93, Aufgabe 7: Wir berechnen die Tangentenfunktion zur Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $a = 0$: Nach der Kettenregel ist $f'(x) = \ln'(1+x) \cdot 1 = \frac{1}{1+x}$ und damit die Tangentenfunktion

$$t(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \ln(1) + x = x\,.$$

Damit gilt für x nahe bei 0 (in „erster Näherung“)

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x \text{ für } x \text{ nahe bei } 0.}$$

oder äquivalent:

$$\boxed{\ln(x) \approx x - 1 \text{ für } x \text{ nahe bei } 1.}$$

Also $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$, $\ln 0{,}99 \approx -0{,}01$ und $\ln(1 - \frac{p}{100}) \approx -\frac{p}{100}$.

4) **S. 94, Aufgabe 1):**

a) $f(x) = e^{x-4} + 3e^{-2x} + e^{1-x} - \dfrac{1}{2}e^{1-3x}$,

$f'(x) = e^{x-4} - 6e^{-2x} - e^{1-x} + \dfrac{3}{2}e^{1-3x}$,

$f''(x) = e^{x-4} + 12e^{-2x} + e^{1-x} - \dfrac{9}{2}e^{1-3x}$.

b) $f(x) = 5e^{-0{,}1x} + 0{,}25e^{4x+1} - 2e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$,

$f'(x) = -0{,}5e^{-0{,}1x} + e^{4x+1} + \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$,

$f''(x) = 0{,}05e^{-0{,}1x} + 4e^{4x+1} - \dfrac{1}{8}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}$.

c) $f(x) = (e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2 = 2e^{2x} + 2$, $\quad f'(x) = 4e^{2x}$, $\quad f''(x) = 8e^{2x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + 1)^2 + (e^{-x} - 1)^2 = 2e^{-2x} + 2$,
$f'(x) = -4e^{-2x}$, $\quad f''(x) = -8e^{-2x}$.

e) $f(x) = \left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2x}+2+e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \cdot (e^{2x} + e^{-2x})$,
$f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $\quad f''(x) = 2 \cdot (e^{2x} + e^{-2x}) = 4 \cdot f(x)$.

f) $f(x) = e^{x-4} - 4x$, $\quad f'(x) = e^{x-4} - 4$, $\quad f''(x) = e^{x-4}$.

g) $f(x) = e^{-x} + x - 1$, $\quad f'(x) = -e^{-x} + 1$, $\quad f''(x) = e^{-x}$.

h) $f(x) = e^{-x} - \dfrac{1}{3}x^2 + 0{,}3x$, $\quad f'(x) = -e^{-x} - \dfrac{2}{3}x + 0{,}3$, $\quad f''(x) = e^{-x} - \dfrac{2}{3}$.

i) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 3e^{-x+1} + x^2$,

$f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + 3e^{-x+1} + 2x$, $\quad f''(x) = \dfrac{3}{2}x - 3e^{-x+1} + 2$.

j) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{2x} + e^{-x} + 1}{e^x} = e^{2x} - e^x + e^{-2x} + e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 2e^{-2x} - e^{-x}$, $\quad f'(x) = 4e^{2x} - e^x + 4e^{-2x} + e^{-x}$.

S. 94, Aufgabe 2):

a) $f(x) = -4^x = -(e^{\ln 4})^x = -e^{x \ln 4}$,
$f'(x) = -\ln 4 \cdot e^{x \ln 4} = -\ln 4 \cdot 4^x$, $\quad f''(x) = -(\ln 4)^2 \cdot 4^x$.

b) $f(x) = 0{,}25^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 4^{-x} = e^{-x \ln 4}$,

$f'(x) = -\ln 4 \cdot e^{-x \ln 4} = -\ln 4 \cdot 4^{-x}$, $\quad f''(x) = (\ln 4)^2 \cdot 4^{-x}$.

c) $f(x) = (\sqrt{2})^{2x} = (2^{\frac{1}{2}})^{2x} = 2^x$,
$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$, $\quad f'(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^x$.

d) $f(x) = 2^{x+1} - 3^{2x-1} + \dfrac{1}{2}x^3 - 3$,

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^{x+1} - 2\ln 3 \cdot 3^{2x-1} + \frac{3}{2}x^2,$$
$$f''(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^{x+1} - 4\ln 3 \cdot 3^{2x-1} + 3x.$$

S. 94, Aufgabe 3):

a) $f(x) = x \cdot e^x,$
$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$$
$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2) \cdot e^x.$$

b) $f(x) = x \cdot e^x{-x},$
$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (-x+1)e^{-x},$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (-x+1)(-e^{-x}) = (x-2) \cdot e^{-x}.$$

c) $f(x) = (2-x) \cdot e^x,$
$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x,$$
$$f''(x) = -e^x + (-x+1)e^x = -xe^x.$$

d) $f(x) = (x-3) \cdot e^{-x},$
$$f'(x) = e^{-x} + (x-3) \cdot (-e^{-x}) = (-x+4) \cdot e^{-x},$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (-x+4)(-e^{-x}) = (x-5) \cdot e^{-x}.$$

e) $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot e^{-x},$
$$f'(x) = (2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 3) \cdot (-e^{-x}) = (-x^2 + 4x - 5) \cdot e^{-x},$$
$$f''(x) = (-2x+4)e^{-x} + (-x^2+4x-5)(-e^{-x}) = (x^2-6x+9)e^{-x} = (x-3)^2 e^{-x}.$$

f) $f(x) = (4-x^2)e^x + (x^2-4)e^{-x},$
$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x)e^x + (4-x^2)e^x + 2xe^{-x} + (x^2-4)(-e^{-x}) \\ &= (-x^2 - 2x + 4)e^x + (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x-2)e^x + (-x^2-2x+4)e^x + (-2x+2)e^{-x} + (-x^2+2x+4)(-e^{-x}) \\ &= (-x^2 - 4x + 2)e^x + (x^2 - 4x - 2)e^{-x}. \end{aligned}$$

S. 94, Aufgabe 6):

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x},$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x(x-1) + e^x) \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{(e^x \cdot x) \cdot x - 2e^x(x-1)}{x^3} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}. \end{aligned}$$

Alternativ mit Produkt- statt Quotientenregel:
$$f(x) = x^{-1}e^x,$$
$$f'(x) = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = x^{-2}e^x(-1+x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= +2x^{-3}e^x - x^{-2}e^x - x^{-2}e^x + x^{-1}e^x \\ &= x^{-3}e^x \cdot (2 - 2x + x^2) = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1},$
$$f'(x) = \frac{(-e^{-x})(x+1) - e^{-x} \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(-e^{-x}(-x-2) + e^{-x}\cdot(-1))(x+1)^2 - e^{-x}(-x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{e^{-x}(x+1)\cdot(x+1) - e^{-x}(-2x-4)}{(x+1)^3} = \frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}.$$

c) $f(x) = \frac{1}{e^x+1} = (e^x+1)^{-1},$

$$f'(x) = -(e^x+1)^{-2}\cdot e^x = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2},$$
$$f''(x) = 2(e^x+1)^{-3}e^x\cdot e^x - (e^x+1)^{-2}\cdot e^x$$
$$= e^x(e^x+1)^{-3}\cdot(2e^x - (e^x+1)) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}.$$

d) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1},$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{-2e^x(e^x-1)^2 + 2e^x\cdot 2(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x-1)^4}$$
$$= \frac{-2e^x(e^x-1)+4e^{2x}}{(e^x-1)^3} = \frac{2e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}.$$

e) Erweitert man den gegebenen Funktionsterm mit e^x so erhält man $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{1}{1+e^x}.$
Dieser Aufgabenteil stimmt also mit c) überein.

S. 94, Aufgabe 7):

a) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1), \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$

b) $f(x) = \ln(x^2) + \ln(\frac{1}{x}) - \ln(2x) = 2\ln x - \ln x - (\ln 2 + \ln x) = -\ln 2,$
$f'(x) = 0.$

c) $\ln(\sqrt{x}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln x = \frac{5}{6}\ln x, \quad f'(x) = \frac{5}{6x}.$

d) $f(x) = x^2 - \ln x + 1, \quad f'(x) = 2x - \frac{1}{x}.$

e) $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(2x-1), \quad f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{-4}{(2x+1)(2x-1)}.$

f) $f(x) = x\ln x, \quad f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \ln x.$

g) $f(x) = x^2\ln x, \quad f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x(1+2\ln x).$

h) $f(x) = \frac{\ln x}{x} = x^{-1}\cdot\ln x,$
$$f'(x) = -x^{-2}\cdot\ln x + x^{-1}\cdot\frac{1}{x} = x^{-2}\cdot(-\ln x + 1) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

i) $f(x) = (\ln x)^2 = \ln^2 x, \quad f'(x) = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}.$

j) $f(x) = \frac{x}{\ln x}, \quad f'(x) = \frac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}.$

k) $f(x) = (x^2-4)\ln x, \quad f'(x) = 2x\ln x + (x^2-4)\cdot\frac{1}{x}.$

l) $f(x) = \ln \dfrac{3x}{x-1} = \ln 3x - \ln(x-1), \quad f'(x) = \dfrac{1}{3x} \cdot 3 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}.$

m) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2-4} = -\ln(x^2-4), \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2-4} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{x^2-4}.$

n) $f(x) = \ln(x^2+1), \quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}.$

5) **S. 90, Aufgabe 4 d):** $f(x) = (x^2-1)e^x$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Wegen $e^x > 0$ sind die Nullstellen von f genau die Nullstellen von x^2-1, also ± 1, und es liegt in beiden Fällen ein Vorzeichenwechsel vor.
Grenzwerte: Der Grenzwert für $x \to \infty$ ist offenbar ∞, während zur Bestimmung des Grenzwertes für $x \to -\infty$ die aus der Regel von de l'Hospital gefolgerte Tatsache $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ benötigt wird. Man erhält damit

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2-1)e^x = \lim_{x\to\infty} ((-x)^2-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,.$$

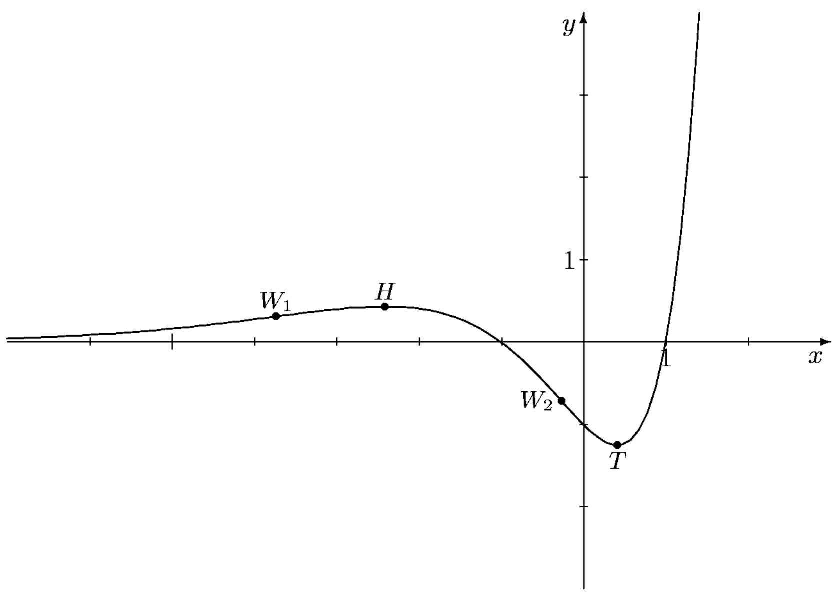
Ableitungen: Mit der Produktregel erhält man

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)\cdot e^x\,,$$
$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-1)e^x = (x^2+4x+1)e^x\,.$$

Extrem- und Wendestellen: Da $e^x > 0$ ist, sind die Nullstellen und Vorzeichenverteilung von f' und f'' durch die beiden quadratischen Terme gegeben:

$$f'(x) = 0 \iff x^2+2x-1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2+4x+1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3}\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor (quadratische Terme mit 2 verschiedenen Nullstellen!), so dass die Funktion f an den Stellen $-1 \pm \sqrt{2}$ Extrem- und an den Stellen $-2 \pm \sqrt{3}$ Wendestellen hat.
Wegen $f'(x) > 0 \iff x^2+2x-1 > 0$ ist f' schließlich monoton steigend, also hat f an der letzten Extremstelle $-1+\sqrt{2} \approx 0{,}41$ ein Minimum und bei $-1-\sqrt{2} \approx -2{,}41$ ein Maximum.



S. 90, Aufgabe 4 e): $f(x) = x^2 e^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Es ist $f(x) = x^2 e^{-x} \geq 0$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$. Damit ist 0 einzige Nullstelle von f, und zwar ohne Vorzeichenwechsel. Zugleich erkennt man, dass 0 Minimumstelle von f ist (s. u.).
Grenzwerte: Es ist

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} x^2 e^x = \infty\,.$$

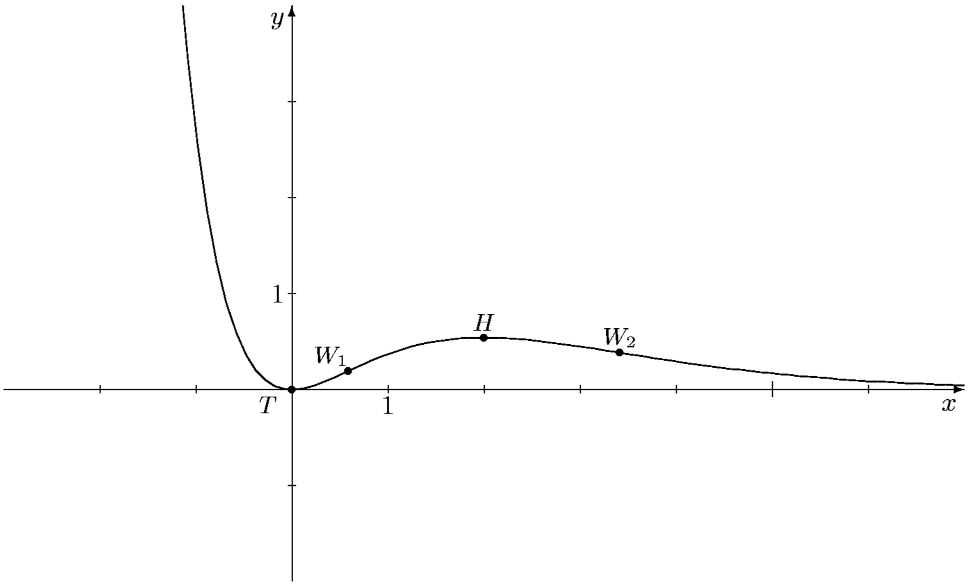
Ableitungen: Mit der Produktregel erhält man

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = -(x^2 - 2x) \cdot e^{-x}\,,$$
$$f''(x) = -(2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}\,.$$

Extrem- und Wendestellen: Wieder sind wegen $e^{-x} > 0$ die Nullstellen und Vorzeichenverteilung von f' und f'' durch die quadratischen Faktoren gegeben:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \;\vee\; x = 2\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor (quadratische Terme mit 2 verschiedenen Nullstellen), so dass 0 und 2 Extrem- und $2 \pm \sqrt{2}$ Wendestellen von f sind. Da 0 Minimumstelle von f ist, ist +2 Maximumstelle.



S. 90, Aufgabe 4 f): $f(x) = x(x-1)e^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist wieder $\mathbb{R}$. Nullstellen sind 0 und 1, beide mit Vorzeichenwechsel. Das Vorzeichen von $f(x)$ ist gleich dem Vorzeichen von $x(x-1)$ (da e^{-x} immer positiv ist), also ist $f(x)$ schließlich positiv.
Die Grenzwerte im Unendlichen sind

$$\lim_{x\to\infty} x(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{e^x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-x)(-x-1)e^x = \lim_{x\to\infty} x(x+1)e^x = \infty\,.$$

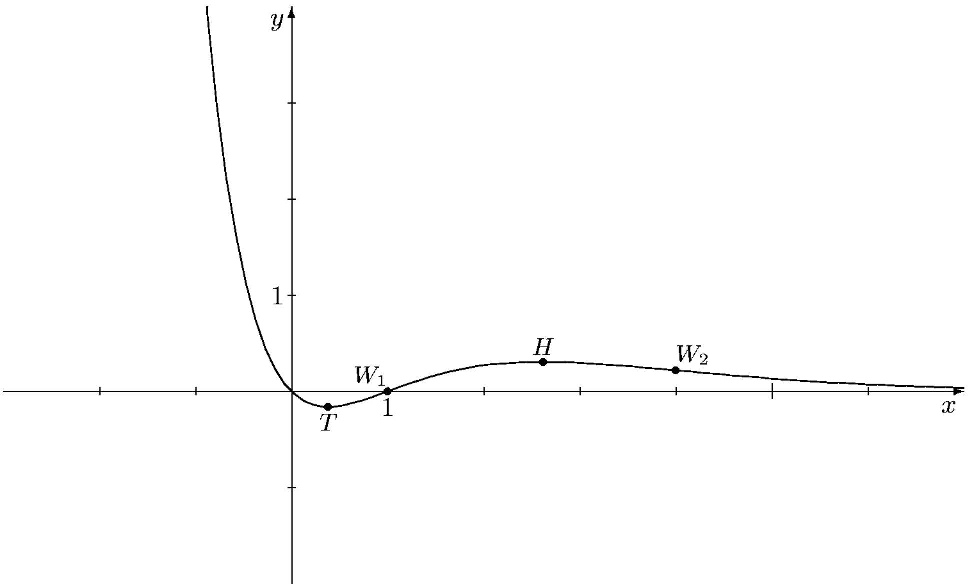
Die Ableitungen von $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)e^{-x} + (x^2-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (-x^2+3x-1)e^{-x}\,, \\ f''(x) &= (-2x+3)e^{-x} + (-x^2+3x-1)e^{-x}\cdot(-1) = (x^2-5x+4)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Nullstellen von f' und f'' braucht man nur die quadratischen Faktoren zu untersuchen:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\,, \\ f''(x) = 0 &\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-4)(x-1) = 0 \iff x = 1 \;\vee\; x = 4\,. \end{aligned}$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor, also sind $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ Extrem- und 1 sowie 4 Wendestellen von f.
Das Vorzeichen von $f'(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$ ist gleich dem Vorzeichen des quadratischen Terms $-x^2 + 3x - 1$, also schließlich negativ. Daher ist die letzte Extremstelle ein Maximum, die andere hingegen ein Minimum.



S. 90, Aufgabe 4 a): $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{1 + e^x}$.
Definitionsbereich: Wegen $e^x > 0$, also $1 + e^x > 1$ wird der Nenner niemals 0, so dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist: $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$.
Nullstellen: Die Nullstellen der Funktion sind die Nullstellen des Zählers, also

$$f(x) = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2\,.$$

$\ln 2$ ist die einzige Nullstelle von f. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da e^x und folglich auch $e^x - 2$ monoton wachsen.
Grenzwerte: Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{1 + e^x} = \frac{0-2}{1+0} = -2\,.$$

Für $x \to \infty$ gilt $e^x \to \infty$. Um das Verhalten des Bruches zu studieren, klammern wir in Zähler und Nenner (den dominierenden Term) e^x aus:

$$f(x) = \frac{e^x(1 - \frac{2}{e^x})}{e^x(\frac{1}{e^x} + 1)} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1-0}{0+1} = 1\,.$$

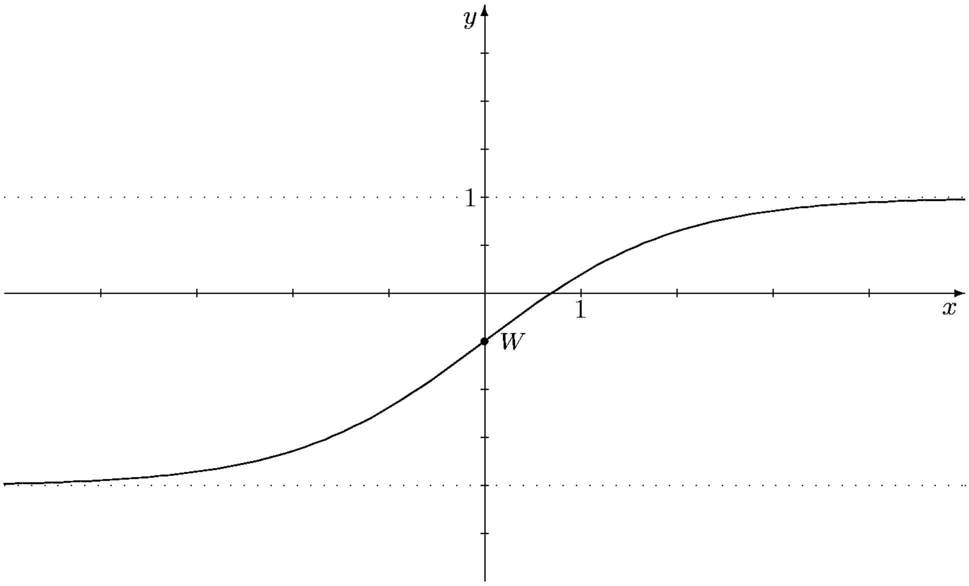
<u>Ableitungen:</u> Mit der Quotientenregel berechnen wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1+e^x) - (e^x-2)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1+e^x)^2} \\ f''(x) &= \frac{3e^x(1+e^x)^2 - 3e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{3e^x(1+e^x) - 6e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{3e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

<u>Extremstellen:</u> Da e^x keine Nullstellen hat, hat auch f' keine Nullstellen, f also keine Extremstellen.
<u>Wendestellen:</u> Wegen $e^x \neq 0$ gilt:

$$f''(x) = 0 \iff 3e^x(1-e^x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0\,.$$

Bei $x = 0$ hat f eine Wendestelle, denn f'' ändert dort sein Vorzeichen: Da $e^x > 0$ ist, ist das Vorzeichen von f'' bestimmt durch $1-e^x$, und $1-e^x$ ist monoton fallend, ändert also an seiner Nullstelle das Vorzeichen (von + zu −). f wechselt an der Stelle 0 also seine Krümmung von links- zu rechtsgekrümmt.



S. 90, Aufgabe 4 b): $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Definitionsbereich: Es ist $e^x + e^{-x} > 0$, also hat der Nenner von f keine Nullstelle: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Symmetrie: Der Graph von f ist punktsymmetrisch, denn

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)\,.$$

Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0\,.$$

Einzige Nullstelle ist $x = 0$.
Grenzwerte: Wegen der Punktsymmetrie brauchen wir nur die Grenzwerte für $x \to \infty$ zu bestimmen. Aus den bekannten Grenzwerten $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} (e^x \pm e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$$

Zähler und Nenner von $f(x)$ konvergieren also gegen ∞. Um den Grenzwert des Quotienten berechnen zu können, klammern wir wieder (den dominierenden Term) e^x aus:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

und erhalten so

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

und wegen der Punktsymmetrie $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
Ableitungen: Mit der Quotientenregel erhalten wir

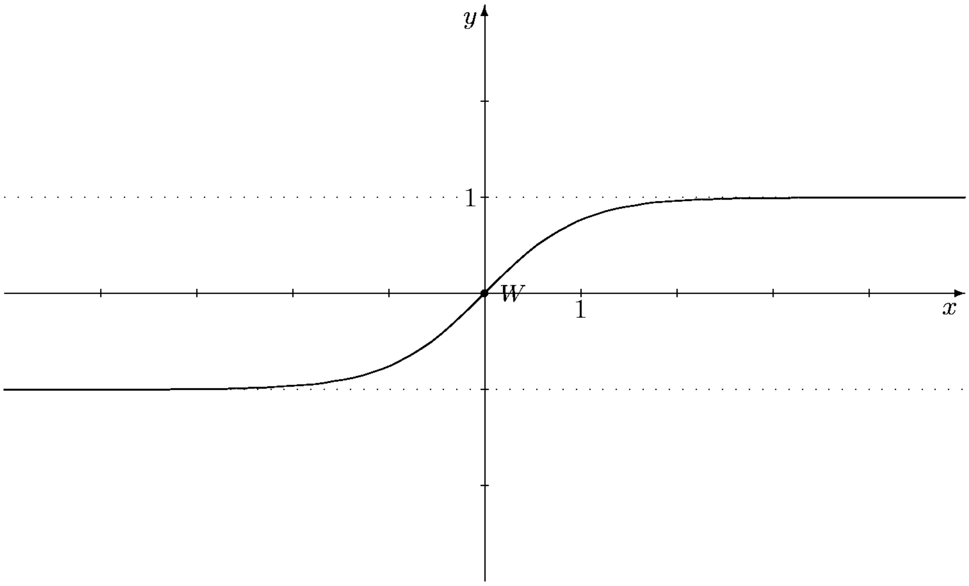
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x}\cdot(-1))(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}\cdot(-1))}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\,, \end{aligned}$$

und ausgehend von $f'(x) = 4\cdot(e^x + e^{-x})^{-2}$ mit der Produkt- und Kettenregel dann

$$f''(x) = -8(e^x + e^{-x})^{-3}\cdot(e^x - e^{-x}) = -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^{-3}}\,.$$

Extremstellen: f' hat keine Nullstellen, f also keine Extremstellen; genauer: f' ist immer positiv, f also monoton steigend. Dies zeigt zugleich, dass f an seiner Nullstelle $x = 0$ das Vorzeichen von $-$ zu $+$ wechselt.

Wendestellen: Da f und f'' bis auf den Faktor -8 denselben Zähler haben, hat auch f'' bei 0 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, 0 ist Wendestelle von f.



S. 90, Aufgabe 4c): $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^x}$.

Definitionsbereich: Wegen $1 + e^x > 0$ hat der Nenner keine Nullstellen, f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Nullstellen: f hat keine Nullstellen, da der Zähler e^{-x} stets positiv ist.

Grenzwerte: Für $x \to \infty$ strebt der Zähler von f gegen 0 und der Nenner gegen ∞, der Bruch also gegen 0: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Für $x \to -\infty$ strebt der Zähler gegen ∞ und der Nenner gegen 1, der Bruch also gegen ∞: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Hinweis: Indem man den Bruchterm für $f(x)$ mit e^x erweitert, erhält man die folgende etwas übersichtlichere Darstellung

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(1+e^x)}\,.$$

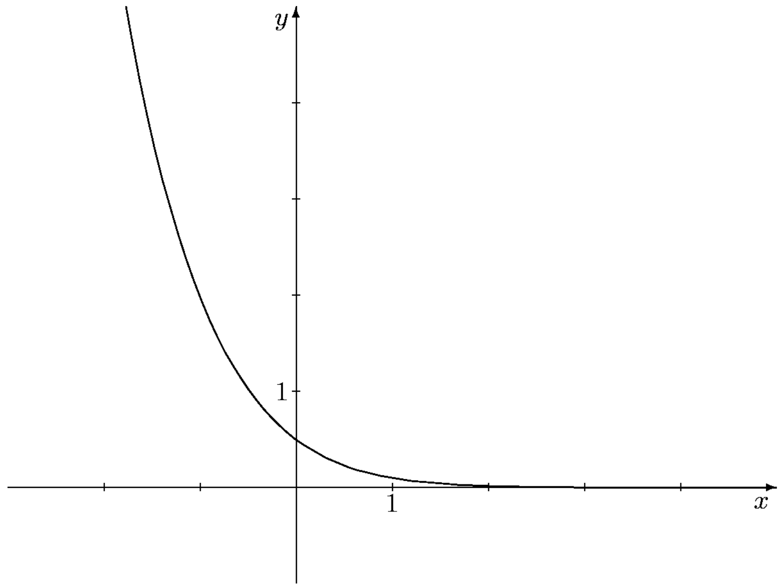
Aus ihr entnimmt man unmittelbar, dass f keine Nullstellen hat und die Grenzwerte von f $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ sind.

Ableitungen: Mit der Quotientenregel berechnen wir (unbedingt kürzen!)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^{-x}e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x}-2}{(1+e^x)^2}\,,\\
f''(x) &= \frac{e^{-x}(1+e^x)^2 + (e^{-x}+2)\cdot 2(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^{-x}(1+e^x) + 2e^x(e^{-x}+2)}{(1+e^x)^3}\\
&= \frac{e^{-x}+3+4e^x}{(1+e^x)^3}\,.
\end{aligned}$$

Extremstellen: Der Term für $f'(x)$ zeigt, dass f' nur negative Werte hat, f also monoton fällt. Insbesondere gibt es keine Extremstellen.

Wendestellen: Genauso erkennt man, dass f'' nur positive Werte hat, f also stets linksgekrümmt ist und insbesondere keine Wendestelle hat.



S. 93, Aufgabe 6:

a) Da Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind, ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 1$.

Nullstellen von f':

$$\frac{1}{x} - x = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1\,.$$

Aber Achtung: Mit f ist auch f' nur auf $]0, \infty[$ definiert, -1 gehört also nicht zum Definitionsbereich von f'. Daher ist nur $+1$ Nullstelle von f'. Wegen $f''(1) = -2 < 0$ liegt ein Maximum vor. Der Wert des Maximums beträgt $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Nullstellen von f'' gibt es nicht, also auch keine Wendestellen.

b) Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) =]-1, \infty[$.

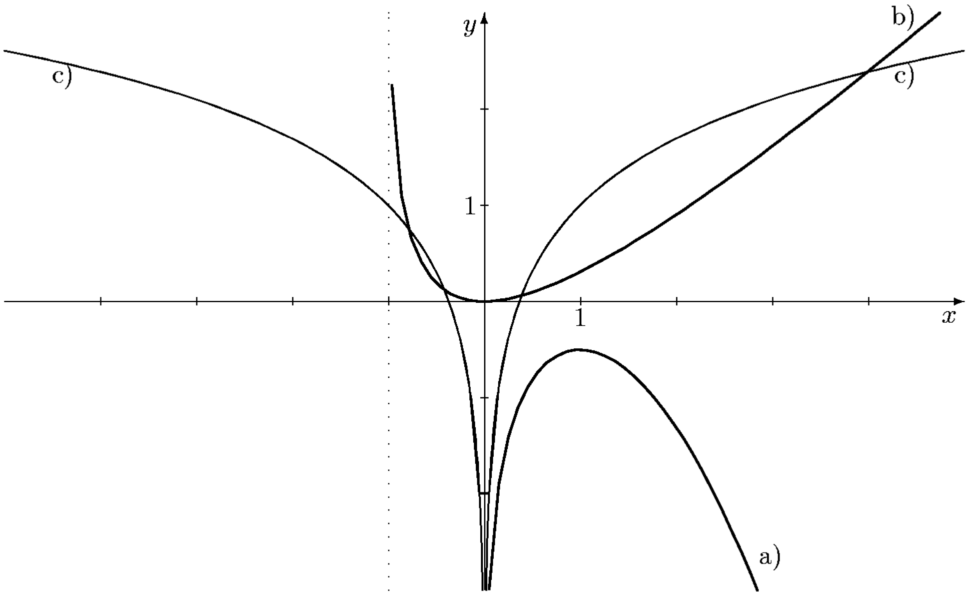
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

f' hat einzige Nullstelle bei $x = 0$. $f''(0) = 1 > 0$, also liegt ein Minimum vor; der Wert des Minimums ist $f(0) = 0$.

f'' hat keine Nullstellen, f also keine Wendestellen.

c) Der Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) = \{x \mid |x| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ zerfällt in zwei Teilintervalle $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$. Man untersucht dann die Funktion auf den beiden Teilstücken getrennt. Wegen des Betrages in der Definitionsformel für $f(x)$ gilt $f(-x) = f(x)$, also ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse. Daher braucht man nur den Verlauf von f über $]0, \infty[$ zu studieren. Dort gilt $f(x) = 1 + \ln(x)$. Der Graph von f entsteht in diesem Bereich durch Verschiebung des bekannten Graphen von $\ln(x)$ um 1 nach oben.

Skizzen:



6) **S. 95, Aufgabe 12 a):** Funktionsuntersuchung $f(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff e^{2x-1} = e^{x+1} \iff 2x - 1 = x + 1 \iff x = 2\,.$$

Um gleichzeitig auch einen evtl. Vorzeichenwechsel erkennen zu können, benutzt man am besten die folgende faktorisierte Form von $f(x)$:

$$f(x) = e^{x+1}(e^{x-2} - 1) = 0 \iff e^{x-2} = 1 \iff x - 2 = 0\,.$$

Da der Faktor e^{x+1} stets positiv ist und $e^{x-2} - 1$ monoton steigt, muss f an seiner Nullstelle das Vorzeichen wechseln, und zwar von $-$ zu $+$. (Diese Faktorisierung wird auch im Folgenden nützlich sein.)
Grenzwerte: Für $x \to \infty$ streben e^{2x-1} und e^{x+1} gegen ∞, es ist dann aber nicht klar, wohin die Differenz $e^{2x-1} - e^{x+1}$ konvergiert. Um das zu erkennen, benutzen wir wieder die obige Faktorisierung und erhalten für $x \to \infty$:

$$f(x) = \underbrace{e^{x+1}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(\underbrace{e^{x-2}}_{\to\infty} - 1)}_{\to\infty} \to \infty\,.$$

Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ergibt sich einfacher:

$$f(x) = \underbrace{e^{2x-1}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x+1}}_{\to 0} \to 0 \quad \text{für } x \to -\infty\,.$$

Ableitungen:
$f'(x) = 2e^{2x-1} - e^{x+1} = e^{x+1} \cdot (2e^{x-2} - 1)$,
$f''(x) = 4e^{2x-1} - e^{x+1} = e^{x+1} \cdot (4e^{x-2} - 1)$.

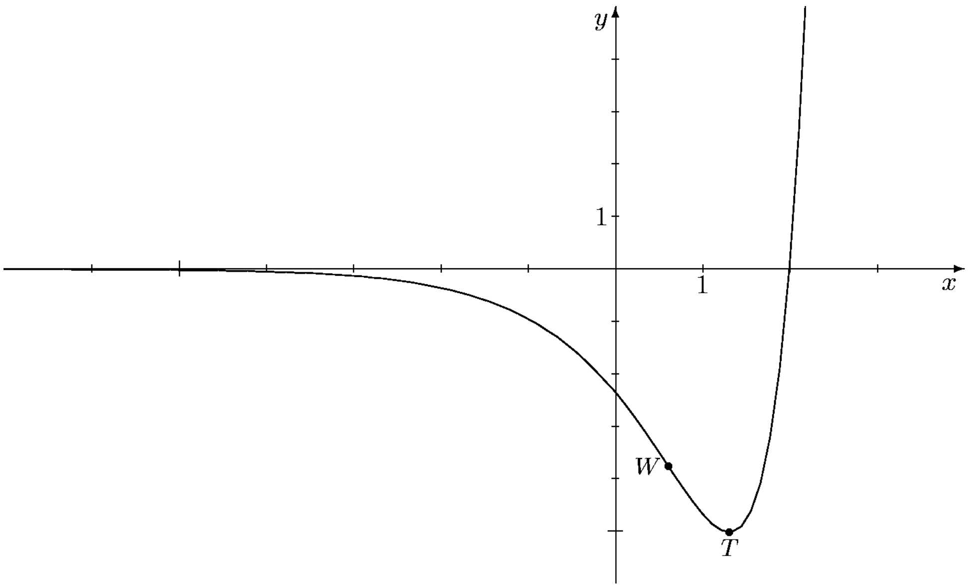
Als Nullstellen der Ableitungen findet man

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2e^{x-2} = 1 \iff e^{x-2} = \frac{1}{2} \\ &\iff x - 2 = -\ln 2 \iff x = 2 - \ln 2 \approx 1{,}31\,, \\ f''(x) = 0 &\iff 4e^{2x-1} = 1 \iff x - 2 = -\ln 4 \iff x = 2 - \ln 4 \approx 0{,}61 \end{aligned}$$

In beiden Fällen liegt ein Vorzeichenwechsel vor, denn der Faktor $2e^{2x-1} - 1$ bzw. $4e^{2x-1} - 1$ ist monoton wachsend; es findet also jeweils ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ statt. Die Extremstelle $2 - \ln 2$ ist somit eine Minimumstelle. Der Berechnung der y-Koordinaten von Tief- und Wendepunkt sind gute Übungen zum Rechnen mit Logarithmen und Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f(2 - \ln 2) &= e^{3-2\ln 2} - e^{3-\ln 2} = \frac{e^3}{(e^{\ln 2})^2} - \frac{e^3}{e^{\ln 2}} = e^3 \cdot (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}) = -\frac{e^3}{4}\,, \\ f(2 - \ln 4) &= e^{3-2\ln 4} - e^{3-\ln 4} = \frac{e^3}{(e^{\ln 4})^2} - \frac{e^3}{e^{\ln 4}} = e^3 \cdot (\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4}) = -\frac{3e^3}{16}\,, \end{aligned}$$

Damit ist $T = (2 - \ln 2\,,\ -\frac{e^3}{4}) \approx (1{,}31\,;\ -5{,}02)$ der Tief- und $W = (2 - \ln 4\,,\ -\frac{3e^3}{16}) \approx (0{,}61\,;\ -3{,}77)$ der Wendepunkt von f.



S. 95, Aufgabe 12 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = e^x - x - 1$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Bei der Aufstellung einer Wertetafel oder genauem Hinsehen erkennt man, dass $x = 0$ eine Nullstelle von f ist: $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Die weitere Funktionsuntersuchung wird zeigen, dass 0 die einzige Nullstelle ist und dort kein Vorzeichenwechsel vorliegt. [Eine algebraische Lösung der Nullstellengleichung $e^x = x + 1$ etwa durch Logarithmieren ist nicht möglich, da die Unbekannte nicht nur im Exponenten, sondern auch als Basis auftritt. Solche Gleichungen sind nur bei Vorliegen zusätzlicher Besonderheiten exakt lösbar, ansonsten müssen Näherungsverfahren wie etwa das Newton-Verfahren angewandt werden.]

Grenzwerte:

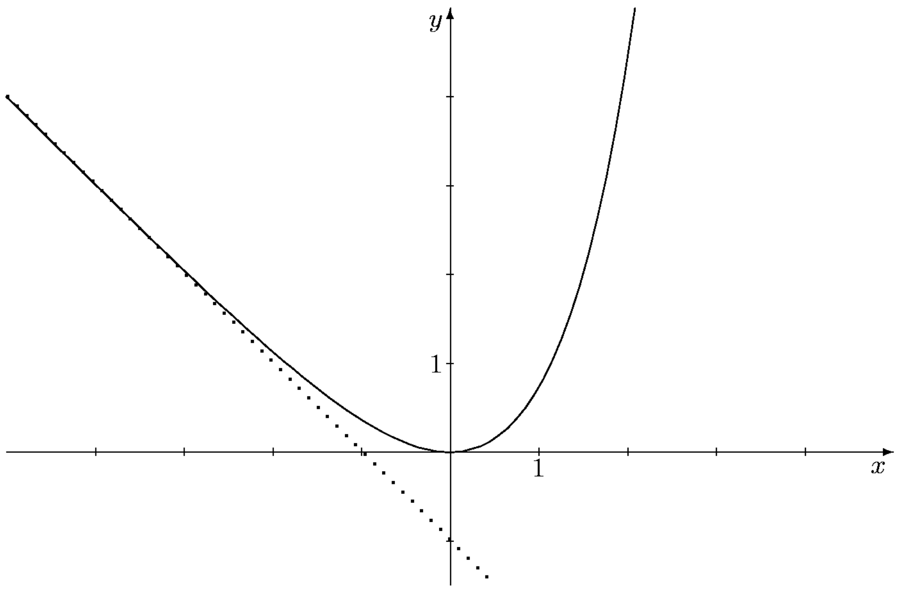
$$\lim_{x\to\infty}(e^x - x - 1) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty}\cdot(1 - \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}) = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0} - x - 1) = +\infty\,.$$

Die letzte Berechnung zeigt zugleich, dass sich $f(x)$ beim Grenzübergang $x \to -\infty$ immer weniger von $a(x) = -x - 1$ unterscheidet:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - a(x)) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

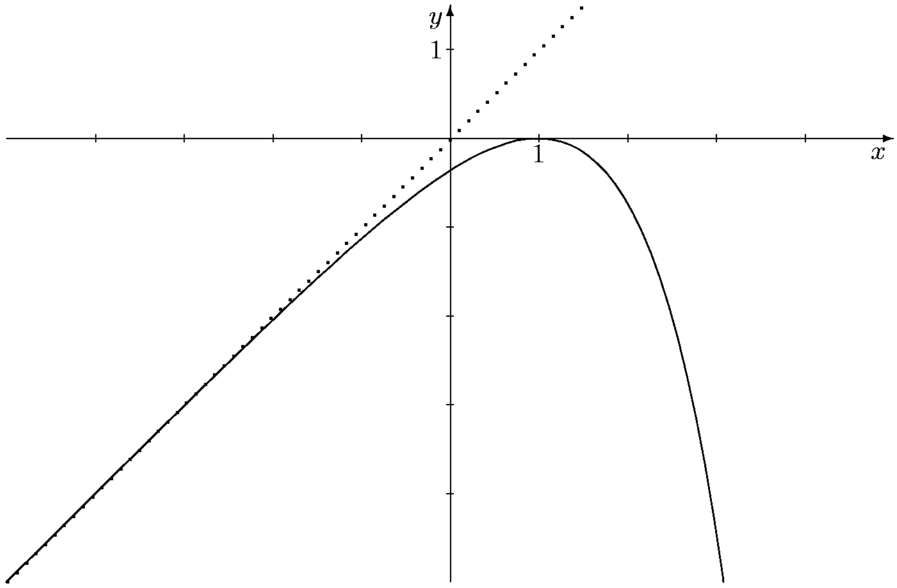
Der Graph von a ist eine Asymptote für f beim Grenzübergang $x \to -\infty$.
Ableitungen: $f'(x) = e^x - 1$, $\quad f''(x) = e^x$. Damit ist f'' stets positiv, der Graph von f also linksgekrümmt. Die einzige Nullstelle von f' ist $x = 0$: $f(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$. Wegen der Linkskrümmung hat f bei 0 ein Minimum. Dies zeigt zugleich die obigen Behauptungen über die Nullstellen von f.



S. 95, Aufgabe 12 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = x - e^{x-1}$.

Diese Aufgabe lässt sich auf Teil b) zurückführen, denn ersetzt man in der hier gegebenen Funktion x durch $x + 1$, so erhält man $f(x+1) = x + 1 - e^{x+1-1} = -(e^x - x - 1)$, und dies ist genau das Negative der in b) gegebenen Funktion. Dies bedeutet, dass der hier gesuchte Graph von f aus dem in b) bestimmten Graphen durch Verschiebung um 1 nach rechts und Spiegelung an der x-Achse entsteht. Alle Ergebnisse von b) lassen sich dann unmittelbar hierauf übertragen.

Skizze:



Hier nun eine Funktionsuntersuchung nach üblichem Muster, z. B. weil man diesen Zusammenhang nicht gesehen hat oder weil man nicht zuvor b) behandelt hat oder auch nur zur Übung:
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Eine Nullstelle von f ist bei $x = 1$ zu finden. Ob es weitere gibt, entscheiden wir aufgrund der nachfolgenden Funktionsuntersuchung, insbesondere der Monotonie.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{x}_{\to-\infty} - \underbrace{e^{x-1}}_{\to 0}) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}(x - e^{x-1}) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{e^{x-1}}_{\to\infty}\cdot(\underbrace{\underbrace{\frac{x}{e^{x-1}}}_{\to 0} - 1}_{\to -1}) = -\infty\,.$$

Die erste Grenzwertberechnung zeigt, das durch $a(x) = x$ eine Asymptote von f für $x \to -\infty$ gegeben ist: $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - a(x)) = \lim_{x\to-\infty}(-e^{x-1}) = 0$. Der Graph von f schmiegt sich für $x \to -\infty$ dem Graphen von a an.
Ableitungen:
$f(x) = x - e^{x-1}$, $f'(x) = 1 - e^{x-1}$, $f''(x) = -e^{x-1}$.
Man erkennt, dass f'' nur negative Werte hat, f also rechtsgekrümmt ist. f' hat nur eine Nullstelle:

$$f'(x) = 0 \iff e^{x-1} = 1 \iff x - 1 = \ln 1 = 0 \iff x = 1\,.$$

Da f rechtsgekrümmt ist, hat f bei 1 ein Maximum. Dies ist zugleich die Nullstelle von f. Also kann f keine weiteren Nullstellen haben; alle anderen Werte von f sind negativ. (Skizze siehe oben.)
S. 95, Aufgabe 12 d): Funktionsuntersuchung $f(x) = 2 + 3x - 2^{x+1}$.
Definitionsbereich ist wieder ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Die Nullstellengleichung $2 + 3x = 2^{x+1}$ ist algebraisch nicht angreifbar,

da die Unbekannte x zugleich im Exponenten und in der Basis auftritt. Man findet in einer einfachen Wertetabelle aber, dass $x = 0$ und $x = 2$ Nullstellen von f sind. Dass es keine weiteren Nullstellen geben kann, zeigt die nachfolgende Funktionsuntersuchung.

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{2+3x}_{\to-\infty}-\underbrace{2^{x+1}}_{\to 0}) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\underbrace{2^{x+1}}_{\to\infty}\cdot(\underbrace{\frac{2+3x}{2^{x+1}}}_{\to 0}-1) = -\infty\,.$$

Die Berechnung des ersten Grenzwertes zeigt zugleich, dass durch $a(x) = 2 + 3x$ eine Asymptote von f für $x \to -\infty$ gegeben ist.

Ableitungen: Wir stellen f durch die e-Funktion dar:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2+3x-2^{x+1} = 2+3x-(e^{\ln 2})^{x+1} = 2+3x-e^{\ln 2\cdot(x+1)}\,,\\ f'(x) &= 3-e^{\ln 2\cdot(x+1)}\cdot\ln 2 = 3-2^{x+1}\cdot\ln 2\,,\\ f''(x) &= -2^{x+1}\cdot\ln^2 2\,. \end{aligned}$$

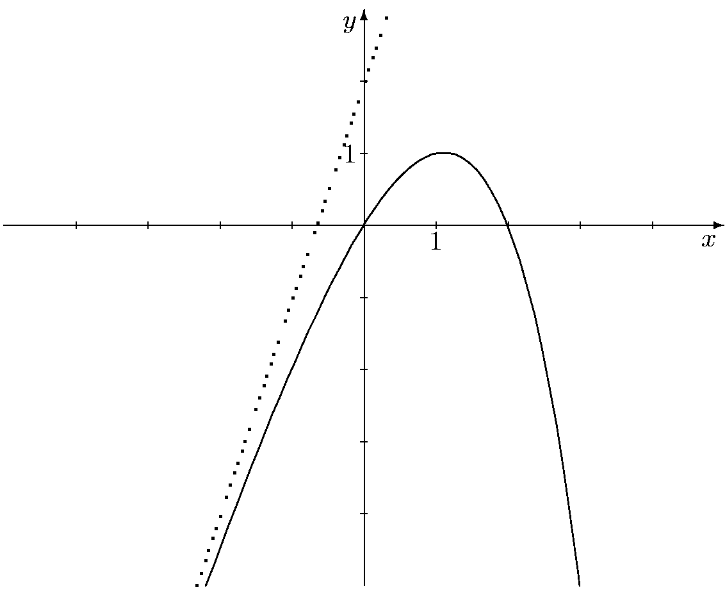
f'' hat nur negative Werte, also ist f stets rechtsgekrümmt. Wir bestimmen die Nullstellen von f':

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \iff \frac{3}{\ln 2} &= e^{\ln 2\cdot(x+1)} \iff \ln 3-\ln(\ln 2) = \ln 2\cdot(x+1)\\ \iff x &= \frac{\ln 3-\ln(\ln 2)}{\ln 2}-1 \approx 1{,}11\,. \end{aligned}$$

Wegen der Rechtskrümmung hat f an dieser Stelle ein Maximum. Da dieses Maximum das einzige Extremum von f ist, ist f vor dem Maximum monoton wachsend und dahinter monoton fallend, kann also nur 2 Nullstellen besitzen: Außer den beiden bereits angegebenen Nullstellen gibt es somit keine weiteren. Zur Kontrolle: Der maximale Funktionswert von f ist positiv:

$$f(\frac{\ln 3-\ln(\ln 2)}{\ln 2}-1) \approx 1{,}01\,.$$

Skizze:



S. 95, Aufgabe 12 e): Funktionsuntersuchung $f(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{10e^x}$.

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$, da der Nenner nie 0 wird.

Nullstellen: $f(x) = 0 \iff e^{3x} = 1 \iff x = 0$. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da e^{3x} und also auch $e^{3x} - 1$ monoton wächst.

Grenzwerte: $f(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (e^{2x} - e^{-x})$. Also

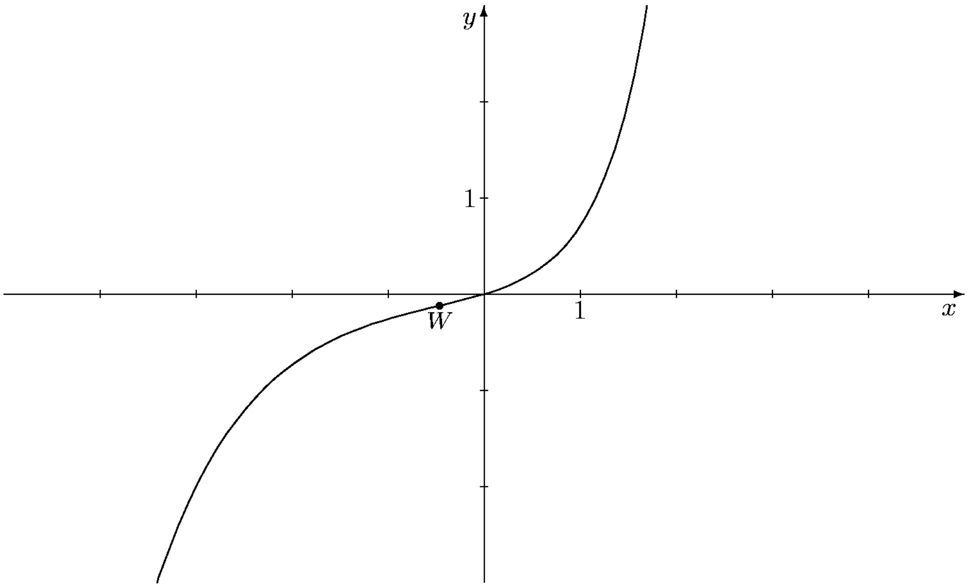
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{10} \cdot (\underbrace{e^{2x}}_{\to\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{10} \cdot (\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{-x}}_{\to\infty}) = -\infty\,.$$

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (2e^{2x} + e^{-x})$, $f''(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (4e^{2x} - e^{-x})$. Offenbar nimmt f' nur positive Werte an: f ist monoton steigend.

$$f''(x) = 0 \iff \frac{1}{10e^x} \cdot (4e^{3x} - 1) = 0 \iff e^{3x} = \frac{1}{4} \iff 3x = -\ln 4$$
$$\iff x = -\frac{1}{3} \cdot \ln 4 = -\frac{2}{3} \cdot \ln 2 \approx -0{,}46\,.$$

Damit hat f'' nur eine Nullstelle; es liegt ein Vorzeichenwechsel vor, da $4e^{3x}$ monoton wächst. Also hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt.

Skizze:



S. 95, Aufgabe 12 f): Funktionsuntersuchung $f(x) = 2^x - 0{,}5x^2 - 2$.

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

Nullstellen: Eine algebraische Lösung der Nullstellengleichung ist nicht möglich, aber man findet $x = 2$ als eine erste Nullstelle. Ob es weitere gibt, entscheiden wir nach der Funktionsuntersuchung.

Grenzwerte: Es ist $f(x) = 2^x \cdot (1 - \dfrac{x^2}{2 \cdot 2^x} - \dfrac{2}{2^x}) = 2^x \cdot (1 - \dfrac{x^2}{2^{x+1}} - \dfrac{1}{2^{x-1}})$, also:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{2^x}_{\to\infty} \cdot (1 - \underbrace{\frac{x^2}{2^{x+1}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{2^{x-1}}}_{\to 0}) = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{2^x}_{\to 0} - \underbrace{0{,}5 \cdot x^2}_{\to\infty} - 2) = -\infty\,.$$

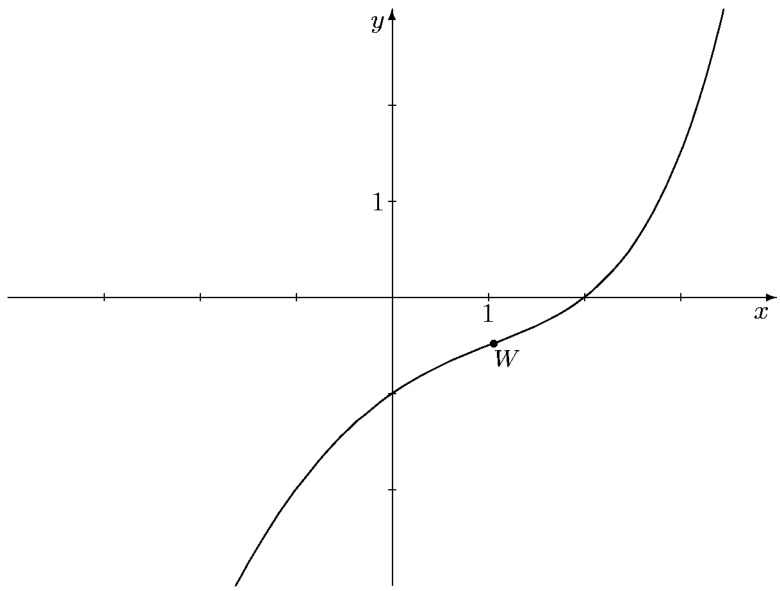
Ableitungen: $f(x) = 2^x - \frac{x^2}{2} - 2 = e^{x\ln 2} - \frac{x^2}{2} - 2$, $f'(x) = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2 - x = 2^x \cdot \ln 2 - x$, $f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 - 1$. Wir untersuchen auf Nullstellen:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \iff 2^x = \frac{1}{\ln^2 2} &\iff x\ln 2 = -\ln(\ln^2 2) = -2\ln(\ln 2)) \\ &\iff x = -\frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 1{,}06\,. \end{aligned}$$

f'' wechselt an dieser Stelle sein Vorzeichen von $-$ zu $+$ ($2^x \cdot \ln^2 2$ wächst monoton), also liegt hier eine Wendestelle von f. Diese ist zugleich eine Extremstelle von f' (!), und zwar eine Minimalstelle (da f' vorher fällt und hinterher steigt). Also sind alle Werte von f' größer oder gleich dem Wert von f' an dieser Minimalstelle

$$\begin{aligned} f'(-\frac{2\ln(\ln(2)}{\ln 2}) = \ln 2 \cdot e^{-2\ln(\ln 2)} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} &= \frac{\ln 2}{\ln^2 2} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0{,}39 > 0\,. \end{aligned}$$

Alle Werte von f' sind folglich positiv und f ist monoton wachsend. Damit kann f nur die bereits oben gefundene Nullstelle $x = 2$ haben.
Skizze:



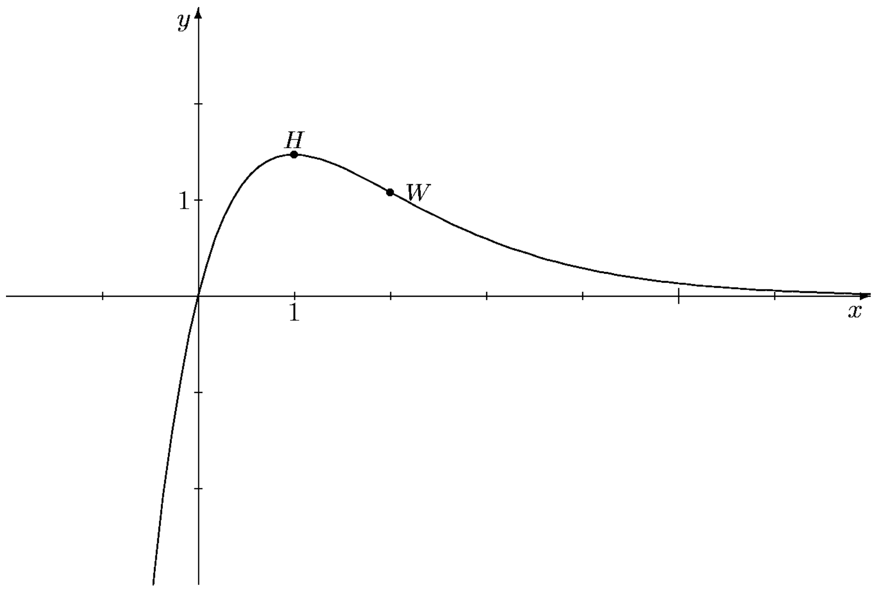
S. 95, Aufgabe 13 a): Funktionsuntersuchung $f(x) = 4xe^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Die einzige Nullstelle ist 0, mit Vorzeichenwechsel.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{e^x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} 4xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-\underbrace{4x}_{\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty}) = -\infty\,.$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cdot e^{-x} + 4x\cdot(-e^{-x}) = 4(1-x)e^{-x}\,, \\ f''(x) &= 4\cdot\big((-1)\cdot e^{-x} + (1-x)\cdot(-e^{-x})\big) = 4(x-2)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind unmittelbar ablesbar: f' hat nur die Nullstelle 1, mit Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, also ist 1 eine Maximalstelle von f. f'' hat nur die Nullstelle 2, mit Vorzeichenwechsel, also eine Wendestelle von f. Der Hochpunkt ist $H = (1, f(1)) = (1, \frac{4}{e}) \approx (1; 1{,}47)$, der Wendepunkt ist $W = (2, f(2)) = (2, \frac{8}{e^2}) \approx (2; 1{,}08)$.



S. 95, Aufgabe 13 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = x^2 e^x$.
Siehe S. 90, Aufgabe 4 e): Dort wurde die Funktion $x^2 e^{-x}$ untersucht. Die Graphen sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.

S. 95, Aufgabe 13 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.
Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen sind -1 und -2, denn $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ (Vieta!). An beiden Stellen wechselt f sein Vorzeichen.
Grenzwerte:

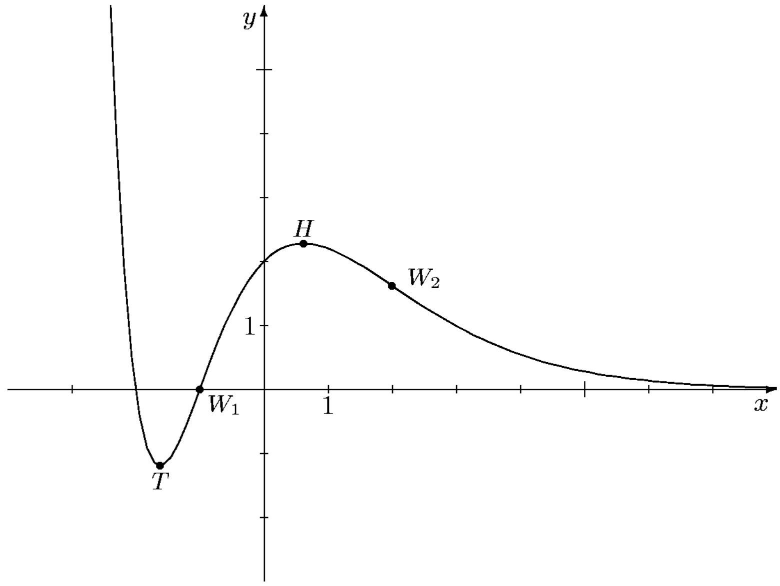
$$\lim_{x\to\infty}(x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0 \text{ (l'Hospital)}, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2 + 3x + 2)e^{-x} = \infty\,.$$

Ableitungen und deren Nullstellen:

$$f'(x) = (2x+3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}\,,$$
$$f''(x) = (-2x-1)e^{-x} + (-x^2 - x + 1)(-e^{-x}) = (x^2 - x - 2)e^{-x}\,,$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2) = 0 \iff x = -1 \;\vee\; x = 2\,.$$

An allen Nullstellen liegt ein Vorzeichenwechsel der jeweiligen Funktion vor, also sind -1 und 2 Wendestellen von f und $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ Extremstellen von f. Das Vorzeichen von f' ist das Vorzeichen von $-x^2 - x + 1$ ($e^{-x} > 0$!), also ist f' schließlich negativ, f schließlich fallend und die größte Extremstelle eine Maximalstelle, die andere eine Minimalstelle. Damit liegt ein Hochpunkt bei $H \approx (0{,}62; 2{,}28)$ und ein Tiefpunkt bei $T = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, f(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})) \approx (-1{,}62; -1{,}19)$. Schließlich sind die Wendepunkte $W_1 = (-1; 0)$ und $W_2 = (2, \frac{12}{e^2}) \approx (2; 1{,}62)$.



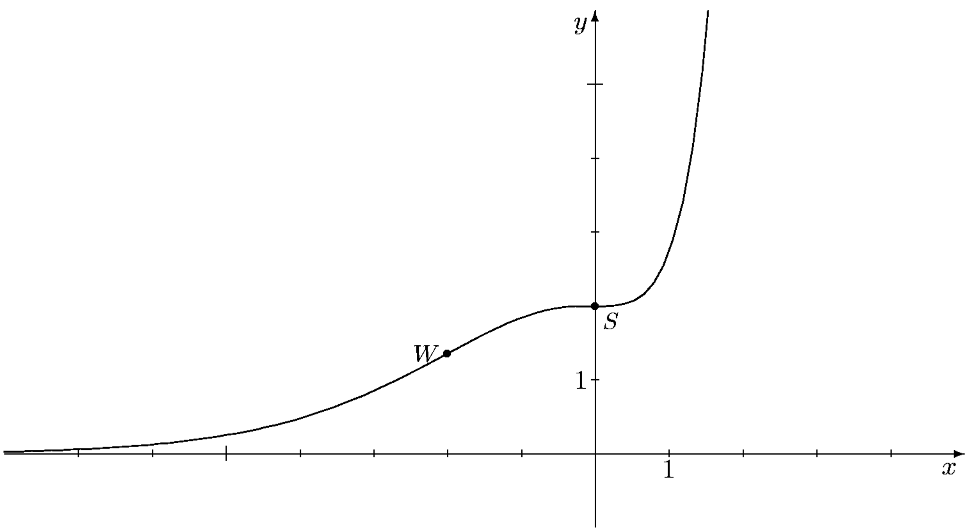
S. 95, Aufgabe 13 d): Funktionsuntersuchung $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen existieren nicht, da die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$ keine Lösungen hat.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 2)e^x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2 - 2x + 2)e^x = 0 \text{ (l'Hospital)}\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2e^x\,,$$
$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x\,.$$

f' hat nur eine Nullstelle, bei 0, ohne Vorzeichenwechsel; f hat also keine Extremstellen, aber eine Sattelstelle bei 0.
f'' hat die beiden Nullstellen 0 und -2, beide mit Vorzeichenwechsel, also neben der Sattelstelle 0 eine weitere Wendestelle bei -2.



S. 95, Aufgabe 13 e): Funktionsuntersuchung $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$.
Siehe S. 90, Aufgabe 4 d): Dort wurde die Funktion $(x^2-1)e^x$ untersucht. Die Graphen sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.

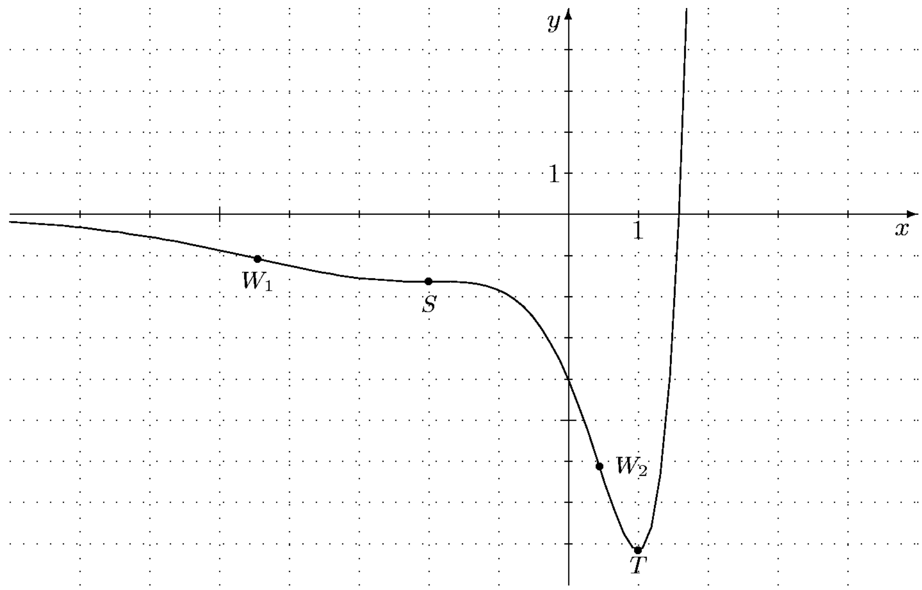
S. 95, Aufgabe 13 f): Funktionsuntersuchung $f(x) = (x^3-4)e^x$.
Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: f hat nur eine Nullstelle: $\sqrt[3]{4}$, mit Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-4)e^x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^3-4)e^x = 0 \quad \text{(l'Hospital)}.$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2e^x + (x^3-4)e^x = (x^3+3x^2-4)e^x\,,\\ f''(x) &= (3x^2+6x)e^x + (x^3+3x^2-4)e^x = (x^3+6x^2+6x-4)e^x\,. \end{aligned}$$

Zur Nullstellenberechnung von f' und f'' muss man kubische Gleichungen lösen.
Nullstellen von f': $+1$ ist Lösung von $x^3+3x^2-4=0$. Polynomdivision ergibt: $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$. Damit hat f' die Nullstellen $+1$ mit Vorzeichenwechsel, und -2 ohne Vorzeichenwechsel. Damit ist $+1$ eine Extrem- und -2 eine Sattelstelle von f.
Nullstellen von f'': Als Sattelstelle ist -2 auch Wendestelle, also Nullstelle von f'', d. h. von x^3+6x^2+6x-4. Polynomdivision durch $x+2$ ergibt: $x^3+6x^2+6x-4 = (x+2)(x^2+4x-2)$. Nullstellen von x^2+4x-2 sind $x=-2\pm\sqrt{6}$. Damit hat f'' neben -2 noch zwei weitere Nullstellen $-2\pm\sqrt{6}$, beide mit Vorzeichenwechsel, also Wendestellen von f.
Wir erhalten den Tiefpunkt $T=(1,f(1))=(1,-3e)\approx(1;-8{,}15)$, den Sattelpunkt $S=(-2,f(-2))=(-2,-\frac{12}{e^2})\approx(-2;-1{,}62)$ und die beiden weiteren Wendepunkte $W_1=(-2-\sqrt{6},f(-2-\sqrt{6}))\approx(-4{,}45;\,-1{,}08)$, $W_2=(-2+\sqrt{6},f(-2+\sqrt{6}))\approx(0{,}45;\,-6{,}13)$.



S. 95, Aufgabe 14 a): Funktionsuntersuchung $f(x) = \ln x - x$.
Definitionsbereich ist der Bereich der positiven reellen Zahlen: $I\!D(f) =]0, \infty[$, da ln nur für positive Zahlen definiert ist.
Nullstellen sind algebraisch nicht bestimmbar, da die Unbekannte x sowohl unter dem Logarithmus wie außerhalb auftritt. Wir untersuchen zunächst den Verlauf des Graphen und kommen dann auf die Nullstellen zurück.
Grenzwerte:

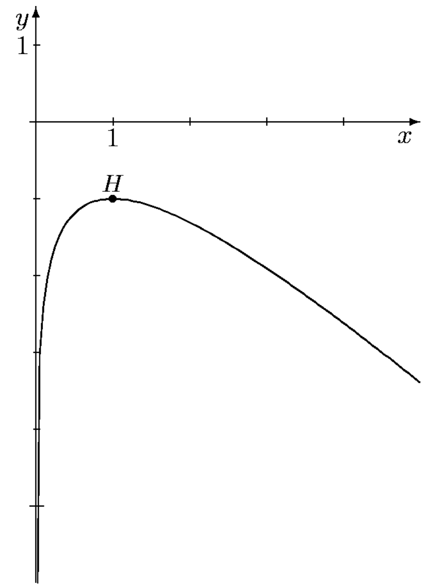
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - 1) = -\infty \quad \text{(l'Hospital)},$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} (\underbrace{\ln x}_{\to -\infty} - x) = -\infty\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Damit hat f'' nur negative Werte, f ist also stets rechtsgekrümmt.
Einzige Nullstelle von f' ist 1. Wegen der Rechtskrümmung von f ist 1 eine Maximalstelle von f: $T = (1, f(1)) = (1, -1)$. Da dies die einzige Extremstelle von f ist, ist -1 der größte Wert, den f annimmt: f hat nur negative Werte, insbesondere keine Nullstellen!



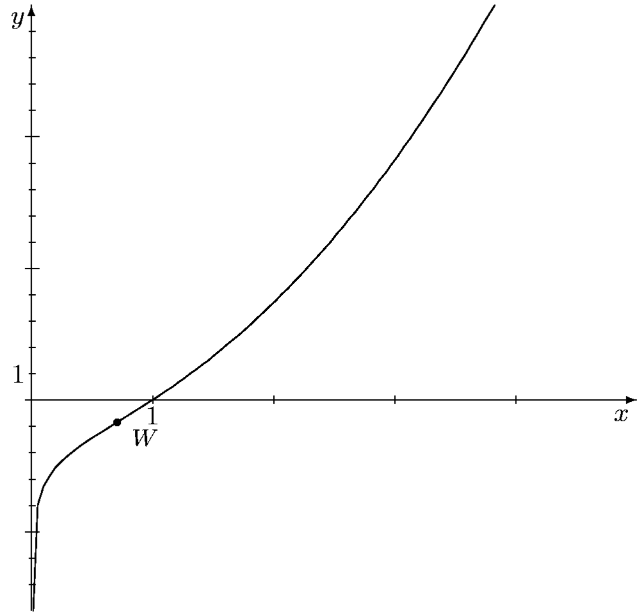
S. 95, Aufgabe 14 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = \ln x + x^2 - 1$.
Definitionsbereich ist $]0, \infty[$.
Nullstellen sind wieder nicht algebraisch bestimmbar. Man kann aber $x = 1$ als Nullstelle erkennen. Ob es weitere Nullstellen gibt, untersuchen wir später.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} + 1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to 0} (\ln x + x^2 - 1) = -\infty\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\,.$$

$f'(x)$ ist über dem Definitionsbereich $]0,\infty[$ immer positiv, also ist f monoton wachsend, hat insbesondere keine Extremstellen.
$f''(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ hat die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, beide mit Vorzeichenwechsel. Aber nur $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt im Definitionsbereich, ist also Wendestelle von f. Der Wendepunkt ist $W = (\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}})) \approx (0{,}71;\ -0{,}85)$.



S. 95, Aufgabe 14 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = \ln\big(\dfrac{x-1}{7-x}\big)$.
Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ definiert } &\iff \frac{x-1}{7-x} > 0 \\ &\iff (x-1>0 \ \wedge\ 7-x>0) \ \ \vee\ \ (x-1<0 \ \wedge\ 7-x<0) \\ &\iff (x>1 \ \wedge\ 7>x) \ \vee\ \underbrace{(x<1 \ \wedge\ 7<x)}_{\text{Widerspruch}} \iff 1<x<7\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Definitionsbereich des offene Intervall $]1,7[$.
Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff \frac{x-1}{7-x} = 1 \iff x-1 = 7-x \iff x = \ .$$

Grenzwerte: Wir bestimmen zunächst die Grenzwerte der inneren Funktion $\frac{x-1}{7-x}$ an den Rändern 1 und 7 des Definitionsbereiches:

$$\lim_{x\nearrow 7} \frac{x-1}{7-x} = \infty\,, \qquad \lim_{x\searrow 1} \frac{x-1}{7-x} = 0\,.$$

Daher folgt

$$\lim_{x \nearrow 7} \ln(\frac{x-1}{7-x}) = \lim_{z \to \infty} \ln z = \infty\,, \qquad \lim_{x \searrow 7} \ln(\frac{x-1}{7-x}) = \lim_{z \searrow 0} \ln z = -\infty\,.$$

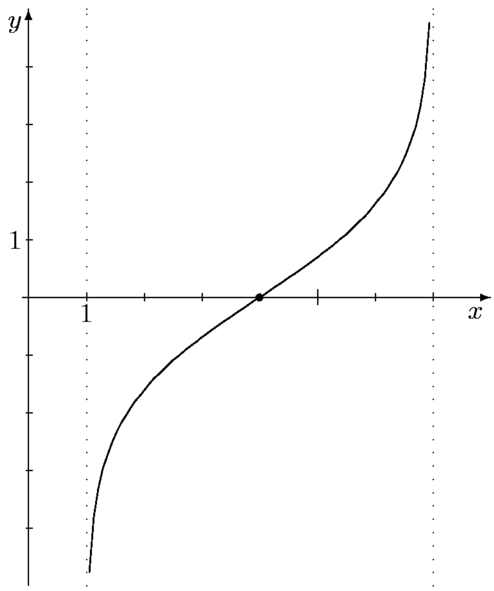
Ableitungen: Es ist $f(x) = \ln(x-1) - \ln(7-x)$, also

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{7-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{7-x}\,, \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(7-x)^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(7-x)^2}\,. \end{aligned}$$

Im Definitionsbereich $]1,7[$ von f sind $x-1$ und $7-x$ positiv, also hat auch f' nur positive Werte: f ist monoton wachsend und hat keine Extremstellen.

$$f''(x) = 0 \iff 0 = \frac{(x-1)^2 - (7-x)^2}{(x-1)^2(7-x)^2} = \frac{12x-48}{(x-1)^2(7-x)^2} \iff x = 4\,.$$

Damit hat f'' bei 4 eine Nullstelle. Wegen des linearen Zählers $12x-48$ liegt offenbar ein Vorzeichenwechsel vor: 4 ist Wendestelle von f.



S. 95, Aufgabe 15 a): Funktionsuntersuchung $f(x) = x^2(\ln x - 2)$.
Definitionsbereich ist $]0, \infty[$.
Nullstellen: Über dem angegebenen Definitionsbereich hat x^2 *keine* Nullstellen. Der Faktor $\ln x - 2$ hat nur eine Nullstelle:

$$\ln x - 2 = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2\,.$$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da $\ln x$ monoton wächst.
Grenzwerte: Ein Grenzwert ist klar:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot (\ln x - 2) = \infty\,.$$

Für den Grenzwert bei 0 wollen wir die Regel von de l'Hospital anwenden und formen zunächst folgendermaßen um:

$$\lim_{x\to 0} x^2(\ln x - 2) = \lim_{x\to 0}(x^2 \ln x - \underbrace{2x^2}_{\to 0}) == \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} .$$

Bei dem letzten Limes ist die Voraussetzung der zweiten l'Hospitalschen Regel erfüllt: Der Nenner konvergiert gegen ∞. Also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}(-\frac{x^2}{2}) = 0 .$$

Anmerkung: Auf diese Weise kann man generell zeigen:

$$\lim_{x\to 0}(x^k \ln x) = 0 \text{ für } k \geq 1 .$$

Auch an der Stelle 0 wird der Logarithmus von beliebigen Potenzen dominiert.
Ableitungen:

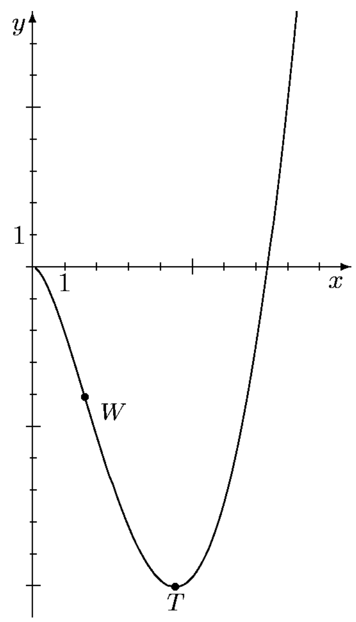
$$f'(x) = 2x(\ln x - 2) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2\ln x - 3) ,$$
$$f''(x) = (2\ln x - 3) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x - 1 .$$

Einzige Nullstelle von f' (im Definitionsbereich von f) ist $x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \approx 4{,}48$. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da $\ln x$ monoton wächst: Also hat f hier ein Minimum. Der Tiefpunkt ist

$$T = (e^{\frac{3}{2}}, f(e^{\frac{3}{2}})) = (e^{\frac{3}{2}}, e^3 \cdot (\frac{3}{2} - 2)) = (\sqrt{e^3}, -\frac{e^3}{2}) \approx (4{,}48;\ -10{,}04) .$$

Einzige Nullstelle von $f''(x) = 2\ln x - 1$ ist $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; es liegt ein Vorzeichenwechsel vor, da $2\ln x$ monoton ist, also hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt:

$$W = (e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}})) = (e^{\frac{1}{2}}, e \cdot (\frac{1}{2} - 2)) = (\sqrt{e}, -\frac{3e}{2}) \approx (1{,}65;\ -4{,}08) .$$



S. 95, Aufgabe 15 b): Funktionsuntersuchung $f(x) = 3x - 2x \ln x$.
Definitionsbereich ist wieder $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.
Nullstellen: Über diesem Definitionsbereich gilt $x > 0$ und daher

$$f'(x) = 0 \iff x(3 - 2\ln x) = 0 \iff 3 = 2\ln x \iff x = e^{\frac{3}{2}}\,.$$

Da $3 - 2\ln x$ monoton fällt (und der Faktor x über $\mathbb{D}(f)$ immer positiv ist), liegt ein Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ vor.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(3x - 2x\ln x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (3 - \underbrace{2\ln x}_{\to\infty}) = -\infty \quad \text{(l'Hospital)}\,,$$

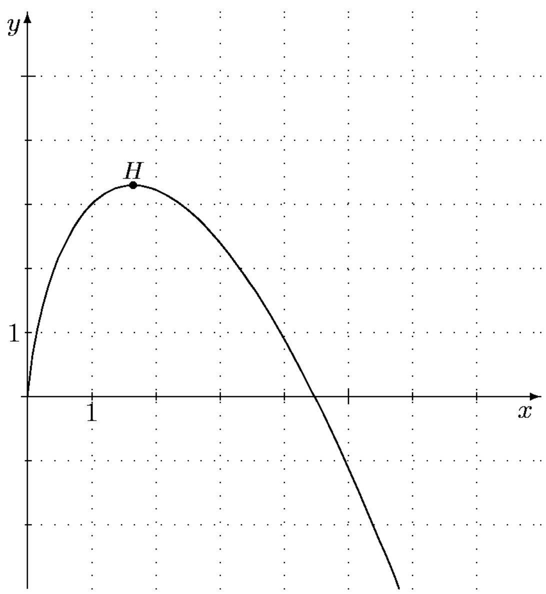
$$\lim_{x\to 0}(3x - \underbrace{2x\ln x}_{\to 0}) = 0 \quad \text{(l'Hospital)}\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3 - (2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}) = 1 - 2\ln x\,, \quad f''(x) = -\frac{2}{x}\,.$$

Damit hat f'' nur negative Werte (im Definitionsbereich von f) und f ist rechtsgekrümmt; Wendestellen existieren nicht.
Einzige Nullstelle von f' ist $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Wegen der Rechtskrümmung hat f hier einen Hochpunkt:

$$H = (e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}})) = (e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{2}}(3 - 2\ln e^{\frac{1}{2}})) = (\sqrt{e}, 2\sqrt{e}) \approx (1{,}65; 3{,}3)\,.$$



S. 95, Aufgabe 15 c): Funktionsuntersuchung $f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2}$.

Definitionsbereich ist $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.

Nullstellen: Man wird auf die algebraisch nicht angreifbare Gleichung $\ln x = \frac{x}{2}$ geführt. Wir kommen auf die Nullstellen später zurück.

Grenzwerte:

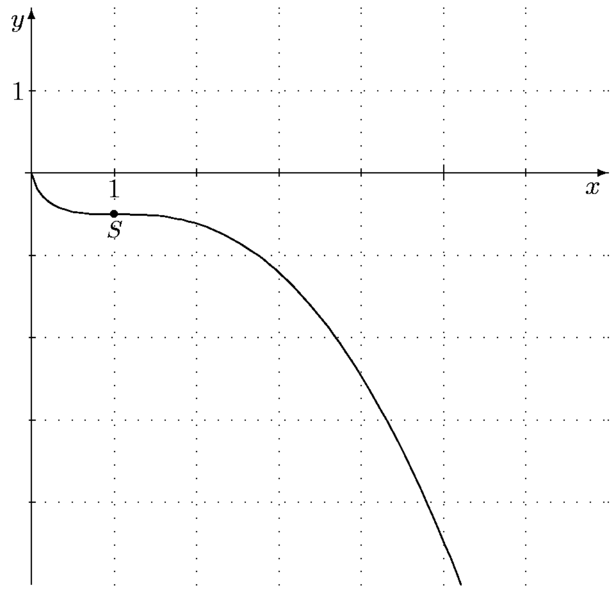
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - \frac{1}{2}) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x \ln x}_{\to 0} - \frac{x^2}{2}) = 0\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - x = \ln x - x + 1\,, \quad f''(x) = \frac{1}{x} - 1\,.$$

f'' hat nur eine einzige Nullstelle, und zwar bei 1; es liegt ein Vorzeichenwechsel von + zu − vor, da $\frac{1}{x}$ monoton fällt. Also hat f' (!) an dieser Stelle ein Maximum und f eine Wendestelle.

Da diese Maximalstelle die einzige Extremstelle von f' (!) ist, nimmt f' hier seinen größten Wert an; dieser ist $f'(1) = 0$. Daher kann f' keine weiteren Nullstellen und f keine Extremstellen besitzen. Die Wendestelle 1 ist wegen $f'(1) = 0$ eine Sattelstelle. Der Sattelpunkt ist $S = (1, f(1)) = (1, -\frac{1}{2})$.



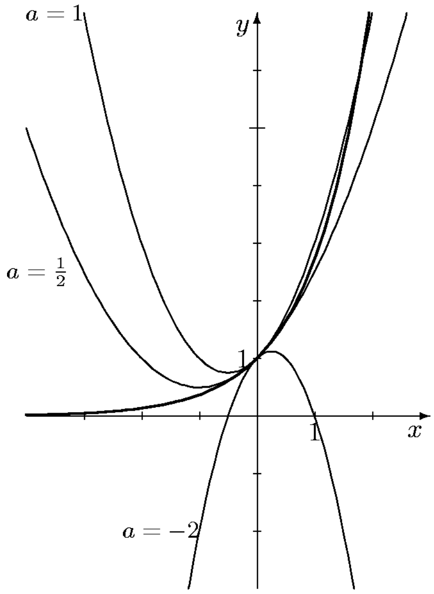
7) **S. 97, Aufgabe 24:**

Da g ganzrational vom Grade 2 sein soll, hat der Funktionsterm von g die Form $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Zwei Graphen berühren sich an einer Stelle, wenn sie dort im Funktions- und Ableitungswert übereinstimmen. Gesucht ist also g mit den Eigenschaften $g(0) = f(0)$ und $g'(0) = f'(0)$. Wegen $f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$ gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$.

Die gesuchten Funktionen g müssen also die Bedingungen $g(0) = 1$ und $g'(0) = 1$ erfüllen. Wegen $g(x) = ax^2 + bx + c$ ist $g(0) = c$ und $g'(x) = 2ax + b$, $g'(0) = b$. Also sind die gesuchten Funktionen gegeben durch

$$g(x) = ax^2 + x + 1 \ (a \neq 0)\,.$$

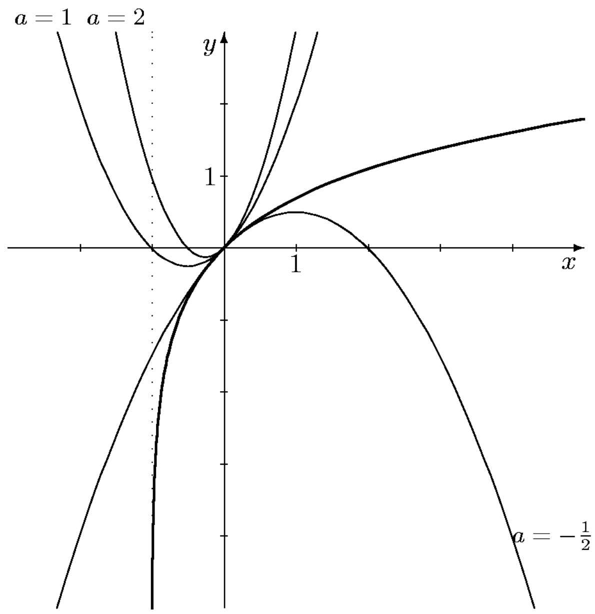
Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f'(x) = -e^{-x}$ und daher $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$. Die gleiche Rechnung ergibt nun als Lösungen $g(x) = ax^2 - x + 1$ $(a \neq 0)$.



S. 97, Aufgabe 25: Wie in der vorangehenden Aufgabe setzen wir an: $g(x) = ax^2 + bx + c$. Es ist $f(x) = \ln(x+1)$ und $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Die Bedingungen an g lauten daher $g(0) = f(0) = \ln 1 = 0$ und $g'(0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1$. Dies führt zu folgenden Bedingungen für die unbekannten Koeffizienten a, b, c:

$$0 = g(0) = c\,, \qquad 1 = g'(0) = b\,.$$

Also sind die gesuchten Funktionen gegeben durch $g(x) = ax^2 + x$,
Für $f(x) = \ln(\frac{1}{x+1}) = -\ln(x+1)$ erhält man $g(x) = ax^2 - x$.



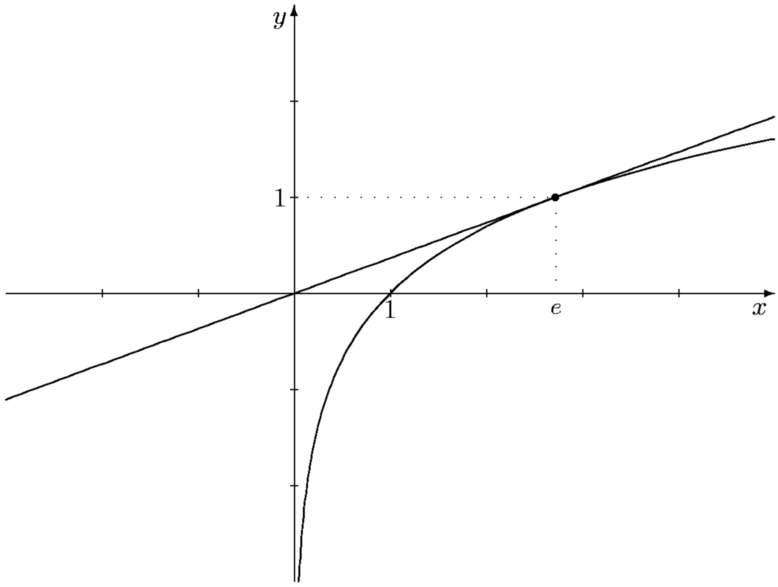
S. 97, Aufgabe 26:

a) Die allgemeine Tangentengleichung (für eine Funktion f und die Berührstelle a) lautet $y = f(a)+f'(a)(x-a) = f'(a)\cdot x+f(a)-f'(a)\cdot a$. Dies verläuft durch den Ursprung, wenn der y-Achsenabschnitt $f(a) - f'(a)\cdot a = 0$ ist. Gesucht sind also die Berührstellen a mit

$$f(a) = f'(a)\cdot a \iff \ln a = \frac{1}{a}\cdot a = 1 \iff a = e\,.$$

Damit verläuft nur die Tangente mit Berührpunkt $a = e$ durch den Ursprung; sie hat die Gleichung

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) \iff y = 1 + \frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e}\,.$$



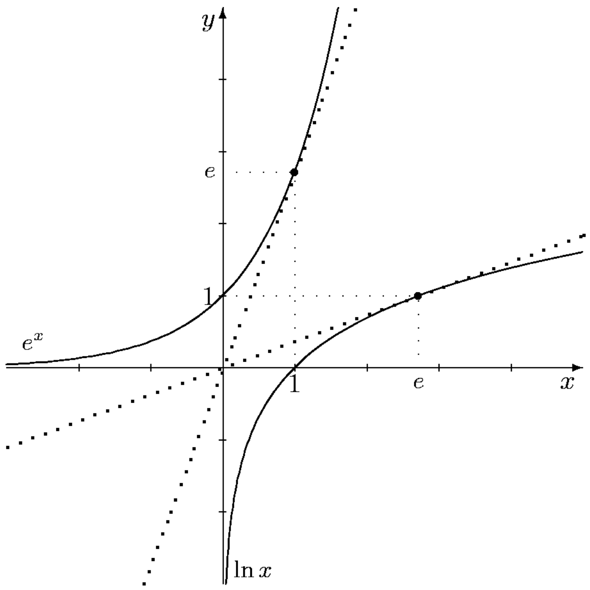
b) Hier ist $f(a) = \ln(a+1)$ und $f'(a) = \frac{1}{a+1}$. Also suchen wir solche a mit

$$\ln(a+1) = \frac{1}{a+1}\cdot a = \frac{a}{a+1} \iff (a+1)\ln(a+1) - a = 0\,.$$

Diese Gleichung enthält die Unbekannte a im Logarithmus und außerhalb, ist daher nicht einfach rein algebraisch auflösbar. Aber $a = 0$ ist als Lösung erkennbar (dies ergibt sich auch daraus, dass $f(0) = 0$ ist und der Graph von f selbst durch den Ursprung verläuft). Ob es aber weitere Lösungen dieser Gleichung gibt, erkennen wir erst nach einer geeigneten Monotonieüberlegung: An der Stelle $a = 0$ hat die Funktion $(a+1)\ln(a+1) - a$ eine Nullstelle, die zugleich einziges Extremum dieser Funktion ist. Es gibt also keine weiteren Nullstellen und damit keine weiteren Lösungen des gestellten Problems: Die einzige Tangente an den Graphen von f, die durch den Ursprung verläuft ist, die Tangente im Ursprung: $y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$.

S. 97, Aufgabe 27:

a) Diese Aufgabe lässt sich auf 26 a) zurückführen, da $f(x) = e^x$ die Umkehrfunktion zu der in Aufgabe 26 a) behandelten Funktion ln ist. Die Graphen sind also spiegelbildlich zueinander bzgl. der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Spiegelt man die in 26 a) gefundene Tangente $y = \frac{x}{e}$ an der Winkelhalbierenden, so erhält man $x = \frac{y}{e} \iff y = ex$ und der in 26 a) gefundene Berührpunkt $(e, 1)$ liefert durch Spiegelung den Berührpunkt $(1, e)$ in dieser Aufgabe.



Rechnerische Lösung: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. Gesucht ist also die Berührstelle a mit (siehe 26 a))

$$f(a) = f'(a)a \iff e^a = e^a a \iff a = 1\,.$$

Die gesuchte Tangente ist $y = e^a + e^a(x - a) = e + e(x - 1) = ex$.

b) $f(x) = e^{x-k}$, $f'(x) = e^{x-k}$. Also

$$f(a) = f'(a)a \iff e^{a-k} = e^{a-k}a \iff a = 1\,.$$

Die Berührstelle ist ebenfalls immer $a = 1$, der Berührpunkt $(1, e^{1-k})$ und die Tangentegleichugn $y = e^{1-k} \cdot x$.
Für $f(x) = e^{kx}$, $f'(x) = ke^{kx}$ ergibt sich:

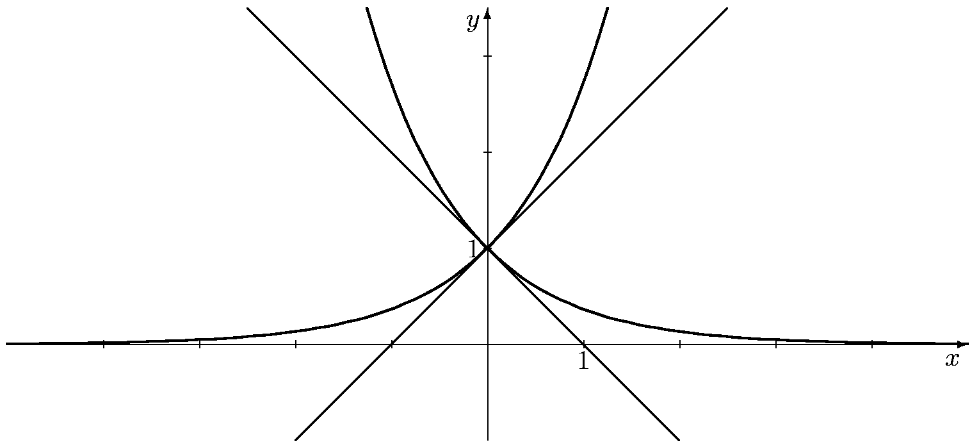
$$e^{ka} = ke^{ka} \cdot a \iff a = \frac{1}{k}\,.$$

Die Berührstelle ist $\frac{1}{k}$, der Berührpunkt $(\frac{1}{k}, e)$ und die Tangentengleichung $y = ex$.

8) **S. 97, Aufgabe 28:** Da die Graphen von f_k und g_k spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse sind und der Berührpunkt $P = (0, 1)$ auf der y-Achse liegt, bilden die beiden Tangenten ebenfalls ein zu y-Achse symmetrisches Dreieck, das deshalb insbesondere gleichschenklig ist.

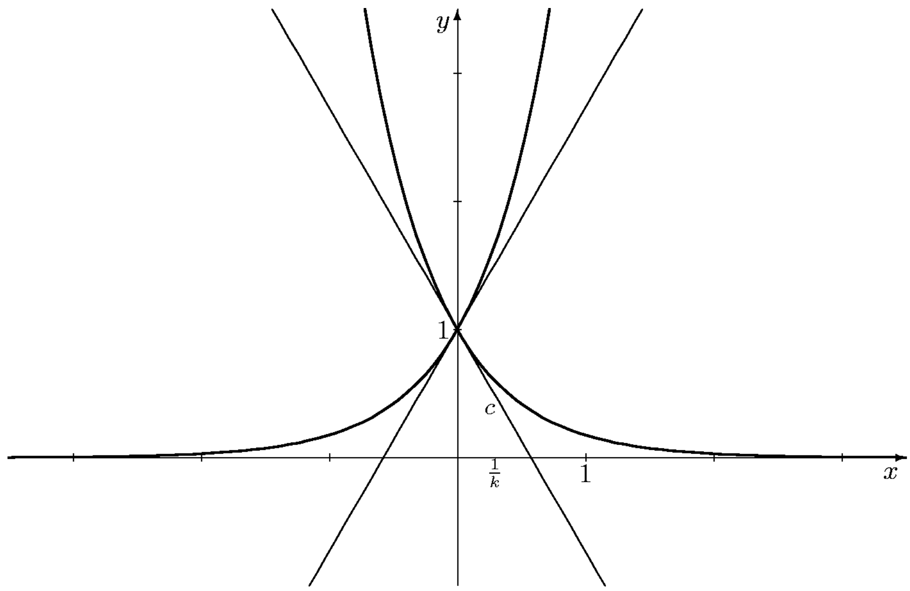
a) Hier muss man also nur die Rechtwinkligkeit überprüfen. Diese ist gegeben, wenn der Winkel zwischen Tangente und x-Achse 45^0 beträgt (siehe Skizze).

Dies bedeutet, dass der Tangentenanstieg $+1$ oder -1 sein muss. Da der Anstieg $f_k'(0) = k$ ist, bedeutet dies $k = \pm 1$.



b) Das Dreieck wird durch die Nullstellen der Tangentenfunktionen und den Punkt $(0,1)$ bestimmt. Die Tangentengleichungen lauten $kx+1$ oder $-kx+1$. Die auf der x-Achse liegende Seite hat die Länge $\frac{2}{|k|}$. Die Länge c der anderen Dreiecksseiten berechnet man nach dem Satz des Pythagoras: $c^2 = 1^2 + (\frac{1}{k})^2$. Also liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor, wenn

$$(\frac{2}{k})^2 = c^2 = 1 + (\frac{1}{k})^2 \iff 4 = k^2 + 1 \iff k^2 = 3 \iff k = \pm\sqrt{3}\,.$$



S. 97, Aufgabe 29:

a) Es ist $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$, $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Damit ist -2 die einzige Wendestelle von f und die Wendetangente von f hat die Gleichung

$$y = f(-2) + f'(-2)(x+2) = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x+2) = -\frac{1}{e^2} \cdot (x+4)\,.$$

Wegen $g(x) = -f(-x)$ ist der Graph von g punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs zum Graphen von f, folglich auch Wendepunkt und Wendetangente. Damit ist die Gleichung der Wendetangente von g

$$-y = -\frac{1}{e^2}(-x+4) \iff y = -\frac{1}{e^2}(x-4)\,.$$

Rechnerisch: $g'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (-x+1)e^{-x}$, $g''(x) = -e^{-x} + (-x+1)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$, Wendestelle $+2$, Wendetangente $y = g(2) + g'(2)(x-2) = 2e^{-2} - e^{-2}(x-2) = -e^{-2}(x-4)$.

b) Wir berechnen sukzessive:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= e^{kx} + x\cdot ke^{kx} = (kx+1)e^{kx}\,,\\ f_k''(x) &= ke^{kx} + (kx+1)\cdot ke^{kx} = (k^2x+2k)e^{kx}\,,\\ \text{Wendestelle:}\quad x &= -\frac{2}{k}\,,\\ \text{Wendetangente:}\quad y &= -\frac{2}{k}e^{-2} - e^{-2}(x+\frac{2}{k}) = -\frac{1}{e^2}\cdot x - \frac{4}{ke^2}\,. \end{aligned}$$

Die Wendetangenten von f_k haben alle denselben Anstieg $-\frac{1}{e^2}$.
Die Funktionen g_k sind nichts anderes als die Funktionen f_{-k}; die Ergebnisse sind in den vorangehenden also voll enthalten (ersetze jeweils k durch $-k$).

c) Die Wendepunkte von f_k sind

$$W_k = (-\frac{2}{k}, f_k(-\frac{2}{k})) = (-\frac{2}{k}, -\frac{2}{k}\cdot e^{-2})\,.$$

Für die Koordinaten der Wendepunkte gilt also $x = -\frac{2}{k}$, $y = -\frac{2}{k}e^{-2} = x\cdot e^{-2}$.
Also liegen alle Wendepunkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = e^{-2}x$.
Wegen $g_k = f_{-k}$ gilt dies auch für die Wendepunkte der g_k.
Die Extremstellen von f_k sind $-\frac{1}{k}$, die Extrempunkte demzufolge

$$E_k = (-\frac{1}{k}\,, f(-\frac{1}{k})) = (-\frac{1}{k}\,, -\frac{1}{k}e^{-1})\,.$$

Die Extrempunkte liegen alle auf der Geraden mit der Gleichung $y = e^{-1}x$.

S. 97, Aufgabe 30:

a) f_k hat genau dann eine Nullstelle, wenn die quadratische Gleichung x^2+4x+k eine Nullstelle hat, also genau dann, wenn der Radikand in der p,q-Formel $4-k \geq 0$, also $k \leq 4$ ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f_k'(x) = (2x+4)e^{-x} + (x^2+4x+k)(-e^{-x}) &= \\ (-x^2-2x+(4-k))e^{-x} &= -(x^2+2x+k-4)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

f_k hat eine Extremstelle genau dann, wenn der quadratische Faktor in f_k' Nullstellen mit Vorzeichenwechsel hat, wenn er also zwei verschiedene Nullstellen hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Radikand $1-(k-4) > 0$, also $k < 5$ ist. Da diese Bedingung für $k \leq 4$ selbstverständlich erfüllt ist, ist die Behauptung gezeigt.

b) Zunächst gilt generell: Ist eine Funktion zwischen zwei Nullstellen lückenlos definiert und stetig, so muss sie dazwischen auch eine Extremstelle haben. Es ist also hier nur etwas zu zeigen, wenn f_k nur eine Nullstelle hat. Aber auch dann muss es eine Extremstelle geben, weil nach l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+4x+k)e^{-x}=0$$

ist: 'Rechts' von der Nullstelle muss noch eine Extremstelle liegen. [Im Unendlichen liegt sozusagen noch eine weitere Nullstelle.]

S. 98, Aufgabe 32:

a) Definitionsbereich ist $I\!D(f)=\mathbb{R}$.

Ableitungen:

$$f_k'(x)=1-ke^x\,,\qquad f_k''(x)=-ke^x\,.$$

f_k'' hat nur negative Werte, f ist also überall rechtsgekrümmt und hat keine Wendestellen. Einzige Nullstelle von f_k' ist $x=-\ln k$ ($k>0!$); wegen der Rechtskrümmung hat f_k hier ein Maximum. Der Hochpunkt ist

$$H_k=(-\ln k, f(-\ln k))=(-\ln k,-\ln k+1-ke^{-\ln k})=(-\ln k\,,-\ln k)\,.$$

b) Die beiden Koordinaten der Hochpunkte stimmen jeweils überein; die Hochpunkte liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y=x$.

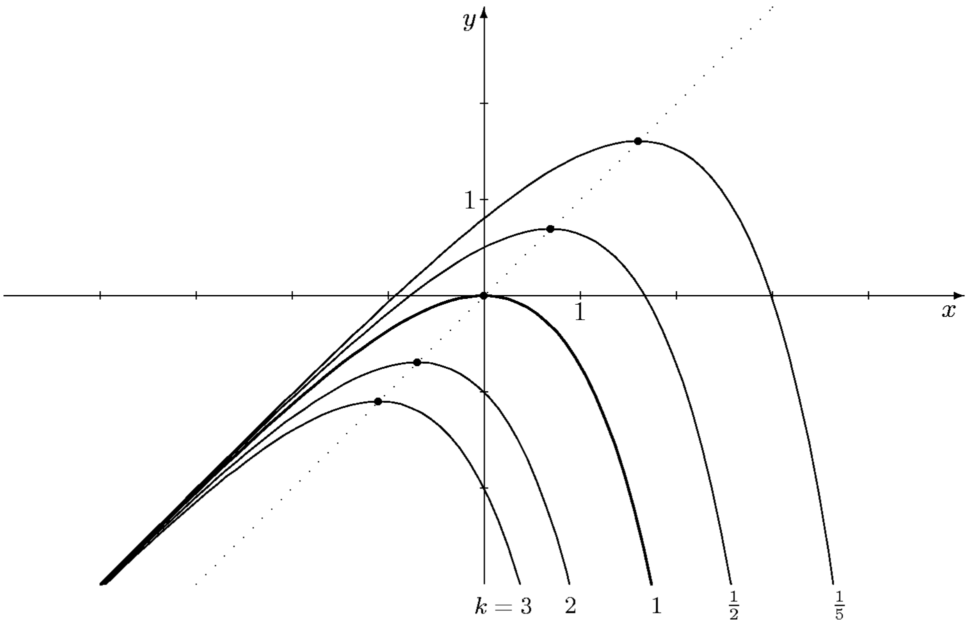
Für die Zeichnung des Graphen von f_1 benötigen wir weitere Informationen:

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty}\cdot(\underbrace{\frac{x+1}{e^x}}_{\to 0}-1)=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x+1}_{\to-\infty}-\underbrace{e^x}_{\to 0}=-\infty\,.$$

Nullstellen: f_1 hat bei 0 eine Nullstelle. Diese ist zugleich die einzige Extremstelle, so das f_1 keine weiteren Nullstellen besitzen kann. [Die nachfolgende Skizze enthält neben dem geforderten Graphen von f_1 in dickerer Strichstärke zur Veranschaulichung auch einige weitere Graphen f_k. Die Gerade, auf der die Hochpunkte liegen, ist gepunktet eingezeichnet.]



S. 98, Aufgabe 33: a) Es ist $f_k'(x) = -e^x + (k-x)e^x = (k-1-x)e^x = 0$. Da die lineare Funktion $k-1-x$ bei $x = k-1$ ihre einzige Nullstelle, und zwar mit Vorzeichenwechsel hat, hat f_k genau einen Extrempunkt $E_k = (k-1, f_k(k-1)) = (k-1, e^{k-1})$.
b) Für die Koordinaten von E_k gilt: $x = k-1$ und $y = e^{k-1} = e^x$, also liegen alle Extrempunkte der f_k auf dem Graphen von $y = e^x$.

S. 98, Aufgabe 34: Wir untersuchen zunächst die Randgrenzwerte und das Monotonieverhalten der Funktion $f_k(x) = e^x - x + k$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(e^x - x + k) = \lim_{x\to\infty} e^x(1 - \frac{x-k}{e^x}) = \infty\,,\\
&\lim_{x\to-\infty}(e^x - x + k) = \lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0} - x + k) = \infty\,,\\
&f_k'(x) = e^x - 1\,.
\end{aligned}$$

Also hat f_k nur eine Extremstelle, und zwar bei 0. Wegen der Randgrenzwerte muss es ein Minimum sein; der Tiefpunkt ist $T_k = (0, f_k(0)) = (0, 1+k)$. Die Anzahl der Nullstellen hängt nun davon ab, ob der Tiefpunkt über, auf oder unter der x-Achse liegt. Damit gilt:

$$\text{Anzahl der Lösungen von } e^x - k + k = 0 \text{ ist } \begin{cases} 0 & \text{falls } k+1 > 0, \text{ d. h. } k > -1,\\ 1 & \text{falls } k+1 = 0, \text{ d. h. } k = 1,\\ 2 & \text{falls } k+1 < 0, \text{ d. h. } k < -1. \end{cases}$$

S. 98, Aufgabe 35: Wir berechnen die beiden Ableitungen

$$f'(x) = ae^x - be^{-x}\,, \qquad f''(x) = ae^x + be^{-x} = f(x)\,.$$

Nullstellenberechnung:

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff ae^x = be^{-x} \iff e^{2x} = \frac{b}{a}\,,\\
f''(x) = 0 &\iff ae^x = -be^{-x} \iff e^{2x} = -\frac{b}{a}\,.
\end{aligned}$$

1. Fall: $\underline{\frac{b}{a} > 0}$: Dann hat die erste Gleichung genau eine Lösung $\ln(\frac{a}{b})$, während die zweite Gleichung unlösbar ist, da e^{2x} immer positiv ist. Also hat f keine Wendestelle, während die Nullstelle von f' eine Extremstelle sein muss, da $f''(x) \neq 0$ für alle x.
2. Fall: $\underline{\frac{b}{a} < 0}$: Dann erhält man genau umgekehrt: Die erste Gleichung ist unlösbar, während f'' genau eine Nullstelle $\ln(-\frac{b}{a})$ hat, die eine Wendestelle von f ist, da $f''' = f'$ nie 0 wird.

S. 98, Aufgabe 36:
a) Die allgemeine Tangentengleichung lautet $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Also bei $f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot \ln x$ und $f_k'(x) = \frac{1}{kx}$:

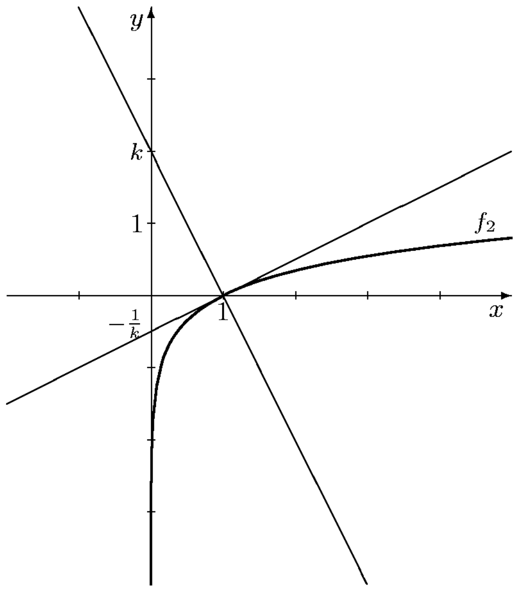
$$t_k(x) = \frac{1}{k}\ln 1 + \frac{1}{k}(x-1) = \frac{1}{k}(x-1)\,.$$

Der Tangentenanstieg ist $\frac{1}{k}$, der Normalenanstieg also $-k$ (2 Geraden sind senkrecht zueinander, wenn die Anstiege im Produkt -1 ergeben). Damit lautet die Normalengleichung

$$n_k(x) = -kx + b\,.$$

Da die Normale durch $(1, 0)$ verlaufen soll, muss gelten $0 = -k + b \iff b = k$, und die Normalengleichung lautet vollständig

$$n_k(x) = -kx + k\,.$$



b) Wir betrachten die y-Achse als 'Grundseite' des Dreiecks. Da $P = (1, 0)$ die Spitze des Dreiecks ist, beträgt die Höhe 1. Die Länge der Grundseite ergibt sich aus den y-Achsenabschnitten von Tangente und Normale; sie beträgt $k + \frac{1}{k}$. Damit ist die Dreiecksfläche

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot (k + \frac{1}{k}) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot (k + \frac{1}{k})\,.$$

Gesucht ist der Wert von k, für den $A(k)$ maximal ist. Wir untersuchen also die Funktion A auf Monotonie:

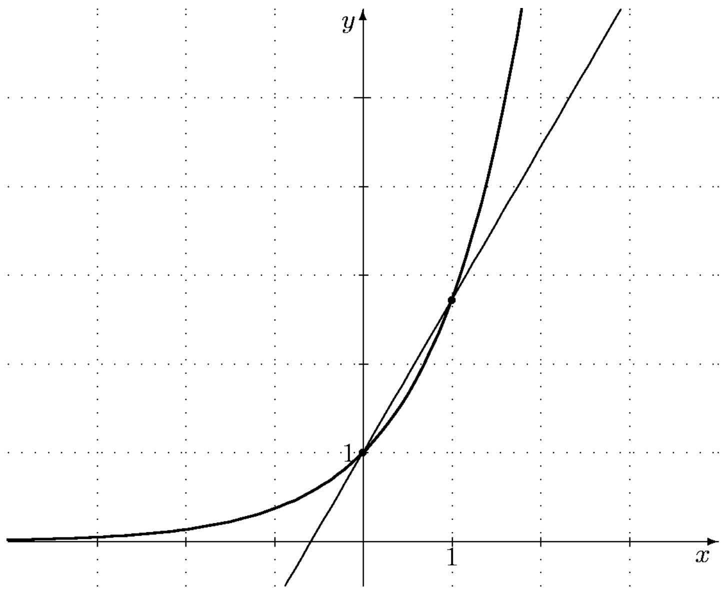
$$A'(k) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{k^2 - 1}{2k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{2k^2} = 0 \iff k = \pm 1\,.$$

Da $k > 0$ ist, ist nur $k = 1$ eine Nullstelle von A'; A hat hier ein Minimum, da A' das Vorzeichen von $-$ zu $+$ ändert. Der minimale Flächeninhalt ist $A(1) = 1$.

9) **S. 96, Aufgabe 21:**

a) Gesucht ist die lineare Funktion $g(x) = mx + n$, auf deren Graph die beiden Punkte liegen. $P_1 = (0, 1)$ gibt den y-Achsenabschnitt $n = 1$. Der Anstieg ist $m = \frac{e-1}{1-0} = e - 1$ und die Funktionsgleichung also $g(x) = (e-1)x + 1$.

Skizze:



b) Wir untersuchen die Differenzfunktion $d(x) = g(x) - f(x) = (e-1)x + 1 - e^x$ auf Extremwerte im Intervall $[0, 1]$. Da 0 und 1 die Schnittstellen beider Graphen sind, hat d dort den Wert 0: $d(0) = d(1) = 0$.

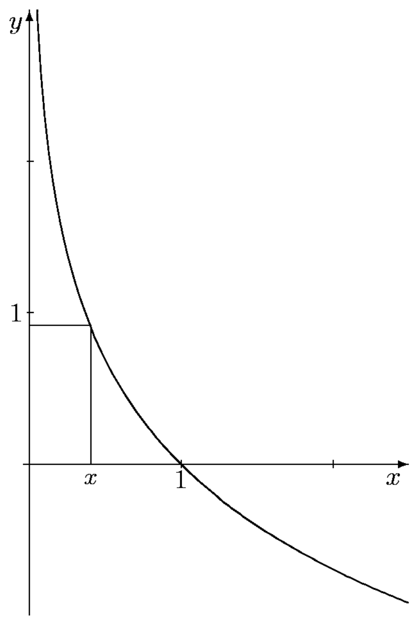
$$d'(x) = e - 1 - e^x = 0 \iff e^x = e - 1 \iff x = \ln(e-1)\,.$$

$d'(x)$ ändert an dieser Nullstelle das Vorzeichen von + zu −, da $-e^x$ monoton fällt. Also hat d hier ein Maximum; der Maximalwert ist

$$d(\ln(e-1)) = (e-1)\ln(e-1) + 1 - e^{\ln(e-1)} = (e-1)\ln(e-1) - e + 2 \approx 0{,}21\,.$$

S. 96, Aufgabe 22:

a) $f(x) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$. Der Graph von f ensteht also aus dem bekannten Graphen von ln durch Spiegelung an der x-Achse:



In die Skizze ist bereits ein solches achsenparalleles Rechteck eingezeichnet. Sein Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von der eingezeichneten Größe x):

$$A(x) = x \cdot f(x) = -x \cdot \ln x \text{ für } 0 < x \leq 1\,.$$

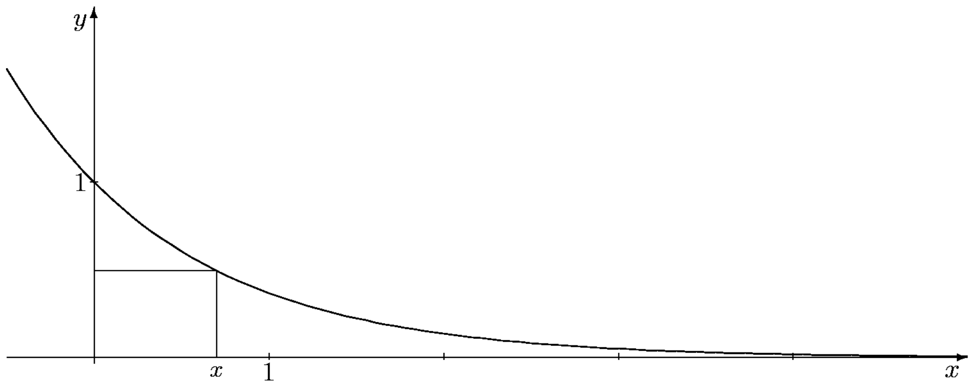
Die Randwerte von A sind $\lim_{x\to 0} A(x) = -\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ und $A(1) = 0$.

$$A'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -(\ln x + 1)\,.$$

Einzige Nullstelle von A' ist $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Hier hat A' einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, da $-\ln x$ monoton fällt; A hat hier also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt

$$A(e^{-1}) = -e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1}\,.$$

b) $f(x) = e^{-x}$. Diese Funktion ist die Umkehrfunktion der in a) gegebenen Funktion, denn $y = e^{-x} \iff \ln y = -x \iff -\ln y = x$. Die beiden Graphen von a) und b) sind also spiegelbildlich zueinander bzgl. der Geraden mit der Gleichung $y = x$. Aufgrund der Symmetrie erhält man hier denselben maximalen Flächeninhalt.
Zur Übung hier die entsprechenden Überlegungen und Rechnungen für $f(x) = e^{-x}$.



Wieder ist in die Skizze ein solches achsenparalleles Rechteck eingezeichnet. Sein Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von der eingezeichneten Größe x):

$$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-x} \text{ für } 0 \leq x\,.$$

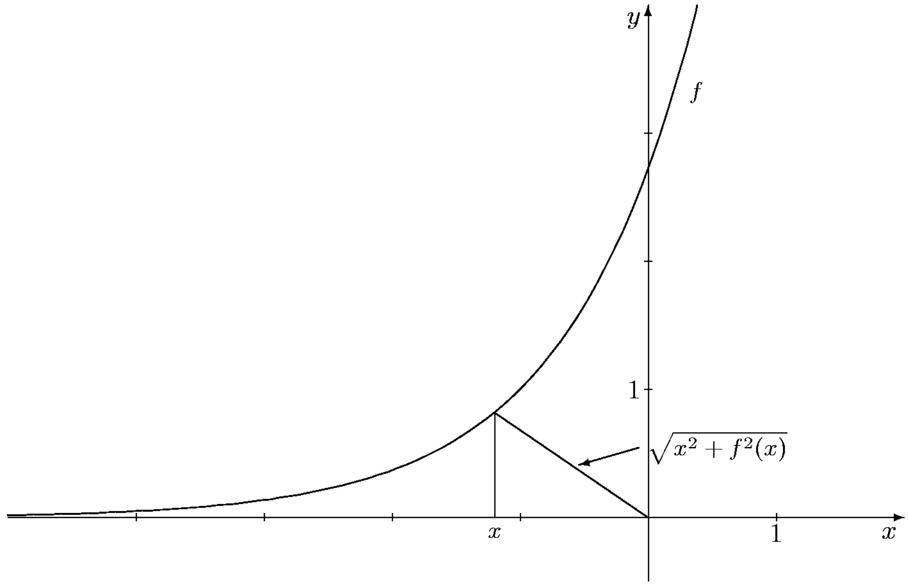
Die Randwerte von A sind $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$ (l'Hospital) und $A(0) = 0$.

$$A'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)\,.$$

Einzige Nullstelle von A' ist also 1, und zwar mit Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ ($1 - x$ fällt monoton). A hat hier also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt

$$A(1) = e^{-1}\,.$$

S. 96, Aufgabe 23: Ein beliebiger Punkt des Graphen von f ist von der Form $(x, f(x))$. Sein Abstand vom Koordinatenursprung $(0,0)$ ist nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{x^2 + f^2(x)}$. Wir untersuchen (entsprechend dem gegebenen Tipp)



das Abstandsquadrat

$$h(x) = x^2 + f^2(x)\,.$$

a) In diesem Falle ist $f(x) = e^{x+1}$ und damit $h(x) = x^2 + e^{2x+2}$. Die Randgrenzwerte von h sind $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$. Es muss also ein Minimum existieren (was auch anschaulich klar ist). Nullstellen von $h'(x) = 2x + 2e^{2x+2}$ sind nicht einfach rein algebraisch bestimmbar. Man findet jedoch durch Einsetzen $x = -1$ als eine Nullstelle von h'. Dass dies die einzige ist, erkennt man an der zweiten Ableitung, $h''(x) = 2 + 4e^{2x+2}$, die nur positive Werte annimmt. Also ist h' monoton wachsend und kann daher nur die eine Nullstelle -1 haben. An dieser hat h ein Minimum, da wegen $h''(x) > 0$ die Funktion h linksgekrümmt ist. Der Punkt des Graphen von f mit dem geringsten Abstand vom Koordinatenursprung ist $P = (-1, f(-1)) = (-1, 1)$. Der minimale Abstand ist daher

$$\sqrt{h(-1)} = \sqrt{1 + f^2(-1)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,.$$

b) Hier ist $f(x) = \ln\frac{x}{e} = \ln x - 1$. Dies ist wieder die Umkehrfunktion von a), denn $y = \ln x - 1 \iff y + 1 = \ln x \iff e^{y+1} = x$. Damit ist der Graph von f spiegelbildich zum Graphen aus a) bezüglich der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Dadurch ändert sich das geometrische Problem nicht: Der geringste Abstand zu $(0,0)$ ist $\sqrt{2}$, er wird im gespiegelten Punkt $(1,-1) = (1, f(1))$ des Graphen von f angenommen.
Wieder zur Übung hier die entsprechenden Überlegungen und Rechnungen für $f(x) = \ln\frac{x}{e}$. Die zu untersuchende Funktion ist hier

$$h(x) = x^2 + f^2(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2 \text{ für } x > 0\,.$$

Die Randwerte sind wieder $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = \infty$.

$$h'(x) = 2x + 2(\ln x - 1)\cdot\frac{1}{x} = 2x + \frac{2}{x}(\ln x - 1)$$

Wieder kann man die Gleichung $h'(x)$ nicht einfach algebraisch lösen. Bei der Erstellung einer Wertetabelle kann man zwar auf die Nullstelle $x = 1$ stoßen: $h'(1) = 0$, aber der Nachweis, dass dies die einzige ist, bleibt schwierig. Der Weg über h'' führt auch nicht unmittelbar zum Ziel. Wieder ist eine geeignete Faktorisierung der Terms hilfreich:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \cdot \left(x^2 + \ln x - 1\right).$$

Wir untersuchen nun nur noch $x^2 - 1 + \ln x$. Diese Funktion hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Sie ist für $x > 0$ monoton wachsend (Ableitung $2x + \frac{1}{x}$), kann also keine weiteren Nullstellen besitzen. [Beachten Sie: Durch das Abspalten des nullstellenfreien (sogar positiven) Faktors $\frac{2}{x}$ wird die Ableitung des verbleibenden Faktors viel einfacher; seine Monotonie reicht aber für die hier anstehende Frage aus!]

Übungen (3)

Bestimmung von Stammfunktionen

1) Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen: S. 45, Aufgaben 3–4
2) Notwendige Umformungen von $f(x)$: S. 45, Aufgabe 5–6
3) Vermischte Stammfunktionen: S. 45, Aufgabe 7
4) Stammfunktionen mit vorgeschriebenen Werten: S. 49, Aufgabe 13–14

Integralberechnungen

5) Erste Integrale: S. 49, Aufgabe 7
6) Symmetrische Integrale: S. 49, Aufgabe 8

Lineare Substitution

7) Stammfunktionen: S. 50, Aufgabe 1; S. 51, Aufgabe 3 a)–e)
8) Integrale: S. 51, Aufgabe 4, a)–g), i)–l)

Exponentialfunktionen

9) Stammfunktionen: S. 86, Aufgabe 10; S. 94, Aufgabe 4
10) Integrale: S. 94, Aufgabe 5; S. 86, Aufgabe 12

Der Logarithmus in der Integralrechnung

11) Stammfunktionen: S. 95, Aufgabe 8
12) Integrale: S. 93, Aufgaben 10–11

Übungen (3) — Lösungen

1) **S. 45, Aufgabe 3:** Angegeben ist jeweils ein Stammfunktionsterm $F(x)$. Weitere sind gegeben durch $F(x) + c$ mit beliebiger Konstante $c \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{1}{5}x^5$ b) $\frac{1}{6}x^6$ c) $\frac{1}{7}x^7$

d) $\frac{1}{11}x^{11}$ e) $\frac{1}{2}x^8$ f) $-x^9$

g) $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$ h) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7$ i) $\frac{1}{3}x^3 + 6x$

j) $5x$ k) 0 l) $-x$

S. 45, Aufgabe 4:

a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ b) $\frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x$

c) $-\frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \sqrt{3} \cdot x$ d) $3 \cdot (2x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{9}x^6)$

e) $\frac{1}{5} \cdot (-0{,}1x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{4}{5}x)$ f) $\frac{k}{5}x^5 - \frac{k}{9}x^3 + kx^2 + k^2x$

g) $\frac{1}{3} \cdot (5x - \frac{6}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6)$ h) $\frac{2}{k+1}x^{k+1} - \frac{1}{2k}x^k + 3x$

2) **S. 45, Aufgabe 5:** Man muss zunächst den gegebenen Funktionsterm so umformen, dass man eine Summe von Vielfachen von Potenzfunktionen (mit möglicher weise negativen oder gebrochenen Exponenten) erhält. Erst dann kann man aufgrund der Potenzregel Stammfunktionen finden. Angegeben ist jeweils ein möglicher Stammfunktionsterm $F(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 + x^2 = x^{-2} + 1 + x^2$,

$F(x) = \frac{1}{-1}x^{-1} + x + \frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{x} + x + \frac{1}{3}x^3$,

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4 = x^{-\frac{1}{2}} - 4$,

$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 4x = 2\sqrt{x} - 4x$,

c) $f(x) = \frac{x^7 + 1}{x^2} = x^5 + x^{-2}$,

$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{-1}x^{-1} = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{x} = \frac{x^7 - 6}{6x}$,

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - x^{-\frac{1}{2}}$,

$F(x) = x - \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = x - 2\sqrt{x}$.

S. 45, Aufgabe 6: Hier sind (bis auf h),i)) nur ganzrationale Funktionen gegeben, aber sie sind nicht in der Polynomdarstellung (Summen von Vielfachen von Potenzfunktionen); man muss sie durch Ausmultiplizieren erst in diese Standardform bringen. (In Sonderfällen sind andere Wege möglich, siehe später.) Wieder gibt $F(x)$ jeweils einen möglichen Stammfunktionsterm an.

a) $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x,$

b) $f(x) = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9, \quad F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x,$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^4 = \frac{1}{16}x^8, \quad F(x) = \frac{1}{144}x^9,$

d) $f(x) = x^3(x-1)^2 = x^3(x^2-2x+1) = x^5 - 2x^4 + x^3, \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4,$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x+2)^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2+4x+4) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2,$

$F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3,$

f) $f(x) = 8(x+2)(x-9) = 8(x^2 - 7x - 18), \quad F(x) = 8(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 18x),$

g) $f(x) = \frac{1}{k}x(x^2 - 2kx + k^2) = \frac{1}{k}x^3 - 2x^2 + kx, \quad F(x) = \frac{1}{4k}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2,$

h) $f(x) = \dfrac{2 - x^3 - 3x^4 + x^5}{x^2} = 2x^{-2} - x - 3x^2 + x^3,$

$F(x) = \frac{2}{-1}x^{-1} - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 = -\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4,$

i) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^5} - 3}{\sqrt{x}} = (2x^{\frac{5}{2}} - 3) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}},$

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x}.$

3) **S. 45, Aufgabe 7:** Angegeben ist jeweils ein möglicher (wenn auch nicht der naheliegendste) Stammfunktionsterm $F(x)$. Ein zweiter ist etwa gegeben durch $F(x) + 1$.

a) $f(x) = -3x^4 + \frac{1}{x} \cdot x^3 - 1 = -3x^4 + x^2 - 1, \quad F(x) = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x + 133,$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^7 + 4x^2, \quad F(x) = \frac{1}{16}x^8 + \frac{4}{3}x^3 - 17,$

c) $f(x) = 5 - 6x^9, \quad F(x) = 5x - \frac{3}{5}x^{10} + 200,$

d) $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 4x^5}{x^2} = -2x + 4x^3, \quad F(x) = -x^2 + x^4 - 7,$

e) $f(x) = (x^4 - 1)^2 = x^8 - 2x^4 + 1, \quad F(x) = \frac{1}{9}x^9 - \frac{2}{5}x^5 + x + 1,$

f) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{x^2} = 4 - 5x^{-2}, \quad F(x) = 4x - \frac{5}{-1}x^{-1} + 1024 = 4x + \frac{5}{x} + 1024,$

g) $f(x) = \dfrac{2x - x^5}{x^3} = 2x^{-2} - x^2, \quad F(x) = \frac{2}{-1}x^{-1} - \frac{1}{3}x^3 + 13 = -\frac{2}{x} - \frac{1}{3}x^3 + 13,$

h) $f(x) = 4 - \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} = 4 - 5x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$,

$F(x) = 4x - \dfrac{5}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{-1}x^{-1} - 266 = 4x - 10\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - 266$,

i) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{x^2} = 4x^{-\frac{1}{2}} + 7x^{-2}$, $\quad F(x) = 8x^{\frac{1}{2}} - 7x^{-1} + \dfrac{49}{17} = 8\sqrt{x} - \dfrac{7}{x} + \dfrac{49}{17}$.

4) **S. 49, Aufgabe 13:** Man bestimmt zunächst *irgendeine* Stammfunktion $F(x)$. Dann ist (über einem Intervall) *jede* Stammfunktion von der Form $F(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Man muss nun das c so bestimmen, dass $F_2(x) = F(x) + c$ bei a eine Nullstelle hat: $F_2(a) = F(a) + c = 0$. Man erkennt: $c = -F(a)$, $F_2(x) = F(x) - F(a)$. Dies bedeutet:

> Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so ist $F(x) - F(a)$ die Stammfunktion von f mit einer Nullstelle bei a.

Die nachfolgende Tabelle enthält in der letzten Spalte die gesuchten Stammfunktionen mit Nullstelle bei a:

	$f(x)$	a	$F(x)$	$F(a)$	Ergebnis
a)	$3x+4$	-3	$\frac{3}{2}x^2 + 4x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{3}{2}$
b)	$7x^2 + 2x + 3$	-1	$\frac{7}{3}x^3 + x^2 + 3x$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{7}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{13}{3}$
c)	$x^2 + 2x + 1$	0	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$	0	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$
d)	$5x^3 + 2x^2 + 7x + 2$	1	$\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x$	$\frac{89}{12}$	$\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x - \frac{89}{12}$
e)	$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	1	$-x^{-1} = -\frac{1}{x}$	-1	$-\frac{1}{x} + 1$
f)	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	1	$2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$	2	$2\sqrt{x} - 2$

S. 49, Aufgabe 14: Hier ist nun nicht eine Nullstelle, sondern eine c-Stelle (das ist eine Stelle mit Funktionswert c) vorgeschrieben. Man geht jedoch genauso wie in der vorangehenden Aufgabe vor: Ist F *irgendeine* Stammfunktion von f, so ist zunächst $F(x) - F(a)$ eine Stammfunktion, die bei a den Wert 0 hat; addiert man nun c, so erhält man das Gewünschte:

> Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so ist $F(x) - F(a) + c$ die Stammfunktion von f, die bei a den Wert c hat.

Die nachfolgende Tabelle enthält in der letzten Spalte die gesuchten Stammfunktionen mit Funktionswert c an der Stelle a:

	$f(x)$	a	c	$F(x)$	$F(a)$	$F(x) - F(a) + c$
a)	$7x+5$	-4	3	$\frac{7}{2}x^2 + 5x$	36	$\frac{7}{2}x^2 + 5x - 33$
b)	$x^2 - x + 5$	-2	5	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x$	$-\frac{44}{3}$	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{59}{3}$
c)	$3x^3 + 5x$	1	4	$\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2$	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{4}$
d)	$3(x-4)^2$	4	-3	$(x-4)^3$	0	$(x-4)^3 - 3$

5) **S. 49, Aufgabe 7:**

a) $\displaystyle\int_0^2 (3x^5 - 2x^4 + 1)\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + x\Big]_0^2$

$\displaystyle = \big(\frac{1}{2}\cdot 2^6 - \frac{2}{5}\cdot 2^5 + 2\big) - \big(0\big) = \frac{106}{5},$

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1-5x^4}{4}\,dx = \Big[\frac{1}{4}\cdot(x - x^5)\Big]_1^3 = \frac{1}{4}(3-3^5) - \frac{1}{4}(1-1^5) = \frac{-240}{4} = -60,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^6 + 3x^5 - 2x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{5}x^5\Big]_{-1}^1$

$\displaystyle = \big(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\big) - \big(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\big) = \frac{2}{7} - \frac{4}{5} = -\frac{18}{35}.$

Bei den nachfolgenden Aufgabenteilen sind die Integranden nicht überall definiert, aber es liegen keine Definitionslücken im Integrationsintervall, so dass die Integrale wohldefiniert sind.

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{3 - 2x^2 + 4x^3 - 3x^4}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} (3x^{-2} - 2 + 4x - 3x^2)\,dx$

$\displaystyle = \Big[-\frac{3}{x} - 2x + 2x^2 - x^3\Big]_{-2}^{-1} = \big(3 + 2 + 2 + 1\big) - \big(\frac{3}{2} + 4 + 8 + 8\big) = -\frac{27}{2},$

e) $\displaystyle\int_1^2 \big(\frac{2}{x^2} - 7 + 5x^4\big)\,dx = \int_1^2 (2x^{-2} - 7 + 5x^4)\,dx$

$\displaystyle = \Big[-2x^{-1} - 7x + x^5\Big]_1^2 = (-1 - 14 + 32) - (-2 - 7 + 1) = 25,$

f) $\displaystyle\int_1^4 \big(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^4\big)\,dx = \int_1^4 (3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^4)\,dx$

$\displaystyle = \Big[6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}x^5\Big]_1^4 = (12 - \frac{1024}{10}) - (6 - \frac{1}{10}) = -\frac{963}{10},$

g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x^3 - 5\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_1^4 (2x^2 - 5x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$\displaystyle = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 10x^{\frac{1}{2}}\Big]1^4 = (\frac{128}{3} - 20) - (\frac{2}{3} - 10) = 32,$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^6 + 8x\sqrt{x} - 1}{2x^2}\,dx = \int_1^2 (3x^4 + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-2})\,dx$

$\displaystyle = \Big[\frac{3}{5}x^5 + 8x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1}\Big]1^2 = (\frac{96}{5} + 8\sqrt{2} + \frac{1}{4}) - (\frac{3}{5} + 8 + \frac{1}{2}) = \frac{207}{20} + 8\sqrt{2},$

i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2 - 7\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_1^2 (2x - 7x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$\displaystyle = \Big[x^2 - 14x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^2 = (4 - 14\sqrt{2}) - (1 - 14) = 17 - 14\sqrt{2},$

6) **S. 49, Aufgabe 8:** Diese Integrale kann man genauso wie in der vorangehenden Aufgabe mit Hilfe der Integralformel berechnen. Es fällt jedoch auf, dass in allen Fällen die Integralgrenzen symmetrisch zu 0 liegen. In solchen Fällen kann man Symmetrien der Integranden ausnutzen (siehe gesondertes Übungsblatt).

a) $\int_{-1}^{1} (4x^3 + 2x)\, dx = \Big[x^4 + x^2\Big]_{-1}^{1} = 2 - 2 = 0,$

b) $\int_{-2}^{2} (2x^2 - 4)\, dx = \Big[\frac{2}{3}x^3 - 4x\Big]_{-2}^{2} = (\frac{16}{3} - 8) - (-\frac{16}{3} + 8) = \frac{32}{3} - 16 = -\frac{16}{3}.$

c) $\int_{-1}^{1} (x^5 - 3x^3)\, dx = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4\Big]_{-1}^{1} = (\frac{1}{6} - \frac{3}{4}) - (\frac{1}{6} - \frac{3}{4}) = 0,$

d) $\int_{-3}^{3} (3x^2 + 5x^4)\, dx = \Big[x^3 + x^5\Big]_{-3}^{3} = (3^3 + 3^5) - (-3^3 - 3^5)$

$= 2 \cdot (3^3 + 3^5) = 2 \cdot 3^3 \cdot (1 + 3^2) = 540,$

e) $\int_{-2}^{2} (4x^5 - 3)\, dx = \Big[\frac{2}{3}x^6 - 3x\Big]_{-2}^{2} = (\frac{128}{3} - 6) - (\frac{128}{3} + 6) = -12,$

f) $\int_{-4}^{4} (x^3 - x^2)\, dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-4}^{4} = (4^3 - \frac{1}{3} \cdot 4^3) - (4^3 + \frac{1}{3} \cdot 4^3) = -\frac{128}{3},$

7) **S. 50, Aufgabe 1:**

a) $f(x) = (3x - 4)^4, \quad F(x) = \frac{1}{5}(3x - 4)^5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}(3x - 4)^5,$

b) $f(x) = \frac{1}{3}(2 - 5x)^3, \quad F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}(2 - 5x)^4 \cdot \frac{1}{-5} = -\frac{1}{60}(2 - 5x)^4,$

c) $f(x) = \frac{-2}{(5x + 1)^2} = -2(5x + 1)^{-2}, \quad F(x) = -2 \cdot \frac{1}{-1} \cdot (5x + 1)^{-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5(5x + 1)},$

d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x - 1}} = 4(3x - 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 4 \cdot 2 \cdot (3x - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3x - 1},$

S. 51, Aufgabe 3 a)–e):

a) $F(x) = \frac{1}{5}(x - 5)^5;$

$F(x) = \frac{1}{3}(2x + 3)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(2x + 3)^3;$

$F(x) = \frac{1}{5}(\frac{1}{2}x - 4)^5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}(\frac{1}{2}x - 4)^5;$

$F(x) = \frac{1}{5}(2 - 3x)^5 \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{15}(2 - 3x)^5;$

b) $F(x) = \frac{5}{4}(3x + 7)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}(3x + 7)^4,$

$F(x) = \frac{1}{8}(2 - x)^4 \cdot \frac{1}{-1} = -\frac{1}{8}(2 - x)^4,$

$F(x) = \frac{1}{15}(2x + 2)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30}(2x + 2)^5,$

c) $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(4x - 1)^4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(1 - 4x)^3 \cdot \frac{1}{-4} = \frac{1}{64} \cdot (4x - 1)^4 + \frac{1}{24}(1 - 4x)^3,$

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(3 - 0{,}5x)^5 \cdot \frac{1}{-0{,}5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}(2x + 0{,}3)^4 \cdot \frac{1}{2} =$

$$= -\frac{2}{15} \cdot (3-0{,}5x)^5 - \frac{1}{40} \cdot (2x+0{,}3)^4,$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2} = (x-4)^{-2}, \quad F(x) = \dfrac{1}{-1} \cdot (x-4)^{-1} = -\dfrac{1}{x-4},$

$f(x) = \dfrac{3}{(2x+7)^2} = 3(2x+7)^{-2}, \quad F(x) = -3 \cdot (2x+7)^{-1} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2(2x+7)},$

$f(x) = \dfrac{0{,}5}{(3-0{,}5x)^2} = 0{,}5 \cdot (3-0{,}5x)^{-2},$

$$F(x) = -0{,}5 \cdot (3-0{,}5x)^{-1} \cdot \frac{1}{-0{,}5} = \frac{1}{3-0{,}5x},$$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{(\sqrt{2}\cdot x+4)^2} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{2}\cdot x+4)^{-2},$

$$F(x) = -\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2}\cdot x+4)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\cdot x+4},$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = (x+4)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 2 \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x+4},$

$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5+x}} = 2 \cdot (5+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 2 \cdot 2(5+x)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{5+x},$

$f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{4} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = \dfrac{1}{4} \cdot 2(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{-1} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x},$

$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x}} = 3 \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = 3 \cdot 2(2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = 3\sqrt{2x}.$

8) **S. 51, Aufgabe 4:**

a) $\displaystyle\int_1^2 (4x+1)^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}(4x+1)^3 \cdot \frac{1}{4}\Big]_1^2 = \frac{9^3}{12} - \frac{5^3}{12} = \frac{151}{3},$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\frac{1}{3}x-4)^3\,dx = \Big[\frac{1}{4}(\frac{1}{3}x-4)^4 \cdot 3\Big]_{-1}^1$

$\displaystyle= \frac{3}{4} \cdot \big((\frac{1}{3}-4)^4 - (-\frac{1}{3}-4)^4\big) = -\frac{1160}{9},$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{-4} (-3x+2)^4\,dx = \Big[\frac{1}{5}(-3x+2)^5 \cdot \frac{1}{3}\Big]_{-1}^{-4} = \frac{1}{15}(14^5 - 5^5) = \frac{178233}{5},$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(3x+4)^2}\,dx = \int_1^2 (3x+4)^{-2}\,dx$

$\displaystyle= \Big[-(3x+4)^{-1} \cdot \frac{1}{3}\Big]_1^2 = -\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{10} - \frac{1}{7}) = \frac{1}{70},$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{-4} \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx = \int_{-1}^{-4} (2x-1)^{-2}\,dx$

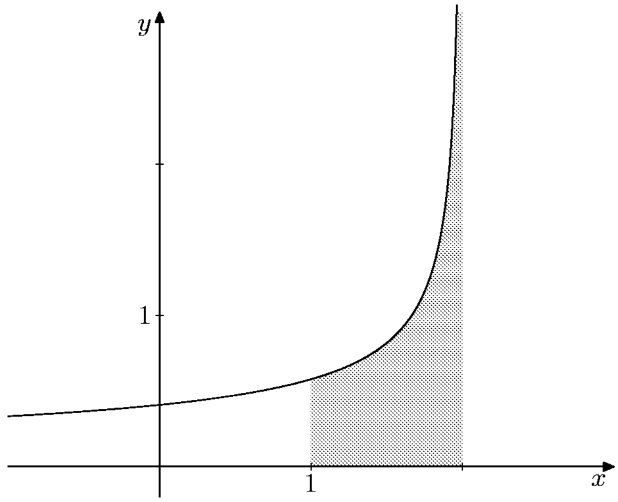
$\displaystyle= \Big[-(2x-1)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\Big]_{-1}^{-4} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{9} - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{9},$

f) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_0^4 (2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \Big[2 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\Big]_0^4 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2,$

g) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{5}{(3-2x)^2}\,dx = \int_{-1}^0 5(3-2x)^{-2}\,dx = \Big[5 \cdot (-(3-2x)^{-1}) \cdot \frac{1}{-2}\Big]_{-1}^0$

$$= \frac{5}{2} \cdot \Big[(3-2x)^{-1}\Big]_{-1}^{0} = \frac{5}{2} \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{3},$$

h) Der Definitionsbereich des Integranden $f(x) = \big(\sqrt{6-3x}\big)^{-1}$ ist $]-\infty, 2[$, insbesondere ist er bei 2 nicht definiert, das Integral $\int_1^2 f(x)\,dx$ daher nicht definiert. Nachfolgend eine Skizze des Graphen und des Integrationsbereiches.



i) $$\int_0^2 \big((2x+1)^2 + (2x+1)^3\big)\,dx = \Big[\frac{1}{3}(2x+1)^3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2x+1)^4 \cdot \frac{1}{2}\Big]_0^2$$
$$= (\frac{5^3}{6} + \frac{5^4}{8}) - (\frac{1}{6} + \frac{1}{8}) = 5^3 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{5}{8}) - \frac{7}{24} = \frac{296}{3},$$

j) $$\int_0^1 \big(3(4x-3)^2 + 2(4x-3)^4\big)\,dx = \Big[(4x-3)^3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5}(4x-3)^5 \cdot \frac{1}{4}\Big]_0^1$$
$$= (\frac{1}{4} + \frac{1}{10}) - (-\frac{3^3}{4} - \frac{3^5}{10}) = \frac{157}{5},$$

k) $$\int_0^1 (\frac{1}{(3x+2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3x+2}})\,dx = \int_0^1 \big((3x+2)^{-2} + (3x+2)^{-\frac{1}{2}}\big)\,dx$$
$$= \Big[-\frac{1}{3}(3x+2)^{-1} + \frac{2}{3}(3x+2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1 = (-\frac{1}{15} + \frac{2}{3}\sqrt{5}) - (-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{2})$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \approx 0{,}65,$$

l) $$\int_1^2 (\frac{4}{\sqrt{2x}} - (2x)^4)\,dx = \int_1^2 \big(4(2x)^{-\frac{1}{2}} - 16x^4\big)\,dx = \Big[8(2x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} - \frac{16}{5}x^5\Big]_1^2$$
$$= (8 - \frac{16 \cdot 32}{5}) - (4\sqrt{2} - \frac{16}{5}) = -\frac{456}{5} - 4\sqrt{2} \approx -96{,}86.$$

9) **S. 86, Aufgabe 10:**

a) $F(x) = e^x$, b) $F(x) = e^{x+1}$, c) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$,

d) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-3}$, e) $F(x) = -e^{-x}$, f) $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x+2}$.

S. 94, Aufgabe 4:

a) $F(x) = 3e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot e^{2x+1}$, b) $F(x) = 2e^{-x+1} \cdot \frac{1}{-1} = -2e^{-x+1}$,

c) $F(x) = -0{,}5e^{2-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} = e^{2-\frac{1}{2}x}$, d) $F(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

e) $f(x) = (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$,

f) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

10) **S. 94, Aufgabe 5:**

a) $\int_1^3 2e^{3x}\,dx = \Big[\frac{2}{3}e^{3x}\Big]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot (e^9 - e^3) = \frac{2}{3}e^3 \cdot (e^6 - 1) \approx 5388{,}67$,

b) $\int_{-1}^1 3e^{-x}\,dx = \Big[-3e^{-x}\Big]_{-1}^1 = -3e^{-1} + 3e = 3e - \frac{3}{e} \approx 7{,}05$,

c) $\int_{-2}^3 (e^x - e^{-x})\,dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_{-2}^3 = (e^3 + e^{-3}) - (e^{-2} + e^2)$

$= e^3 - e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \approx 12{,}61$,

d) $\int_0^1 (e^{-x} + x)\,dx = \Big[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} \approx 1{,}13$,

e) $\int_{-1}^0 (e^x - x - 1)\,dx = \Big[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\Big]_{-1}^0 = 1 - (e^{-1} - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \approx 0{,}13$,

f) $\int_0^1 (e^x - 1)^2\,dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1)\,dx = \Big[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x\Big]_0^1$

$= (\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2} \approx 0{,}76$,

S. 86, Aufgabe 12:

a) $\int_0^1 ke^x\,dx = e \iff \Big[ke^x\Big]_0^1 = e \iff ke - k = e \iff k = \frac{e}{e-1} \approx 1{,}58$

b) $\int_0^1 (e^x + kx)\,dx = 2 \iff \Big[e^x + \frac{k}{2}x^2\Big]_0^1 = 2$

$\iff e + \frac{k}{2} - 1 = 2 \iff k = 2(3-e) \approx 0{,}56$

c) $\int_0^k e^x\,dx = e \iff e^k - 1 = e \iff k = \ln(e+1) \approx 1{,}31$

d) $\int_0^2 ke^{kx}\,dx = e - 1 \iff \Big[e^{kx}\Big]_0^2 = e - 1 \iff e^{2k} - 1 = e - 1$

$\iff e^{2k} = e \iff 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$

11) **S. 95, Aufgabe 8:**

a) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1} = 3x^{-1} - 2x^{-2} + (x-1)^{-1}$,

$F(x) = 3\ln|x| + 2x^{-1} + \ln|x-1| = 3\ln|x| + \dfrac{2}{x} + \ln|x-1|$,

b) $f(x) = \dfrac{1-x-x^2-x^4}{2x^2} = \dfrac{1}{2}(x^{-2} - x^{-1} - 1 - x^2)$,

$F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(-x^{-1} - \ln|x| - x - \dfrac{1}{3}x^3) = -\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\ln|x| - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}x^3$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{3(x-4)} + \dfrac{1}{2(x+3)}$, $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln|x-4| + \dfrac{1}{2}\ln|x+3|$,

d) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{3}{3x-1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}x+1}$, $F(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2\ln|\dfrac{1}{2}x+1|$,

Anmerkung: Auch $F_2(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2\ln|x+2|$ ist eine Stammfunktion von f. Wie erklären Sie den scheinbaren Widerspruch?

e) $f(x) = \dfrac{-3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 3}{x^2} = -3x + \dfrac{1}{2} - 5x^{-1} - 3x^{-2}$,

$F(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 5\ln|x| + \dfrac{3}{x}$,

f) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}$, $F(x) = 2\ln|x| - 3\ln|x+1|$,

g) $f(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x+2}$, $F(x) = 2\ln|x-1| - 3\ln|x+2|$,

h) $f(x) = \dfrac{x-4}{x-5} = 1 + \dfrac{1}{x-5}$ (notfalls Polynomdivision!),

$F(x) = x + \ln|x-5|$,

i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} = 1 + \dfrac{2}{2x-1}$, $F(x) = x + \ln|2x-1|$.

Das in den Beispielen h), i) angewendete Verfahren lässt sich auf alle rationalen Funktionen anwenden, bei denen der Nenner linear ist: Man führt zunächst Polynomdivision durch; als Ergebnis erhält man eine ganzrationale Funktion $g(x)$ + eine rationale Funktion der Form $\dfrac{c}{ax+b}$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion der letzteren ist $F(x) = \dfrac{c}{a}\cdot\ln|ax+b|$.

12) **S. 93, Aufgabe 10:**

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-6} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-2}^{-6} = \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3$,

b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1$,

c) $\displaystyle\int_{0,5}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{0,5}^{2} = \ln 2 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2$,

d) $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5,$

e/f) Das zu berechnende Integral $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ ist wegen des Pols von $\dfrac{1}{x}$ nur definiert, wenn $a, b > 0$ oder $a, b < 0$, also a, b gleiches Vorzeichen haben. Dann ist $\frac{b}{a}$ positiv und es gilt:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{|b|}{|a|} = \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \ln\frac{b}{a}\,.$$

Man erhält also in e) und f) dasselbe Ergebnis:

$$\boxed{\text{Haben } a, b \text{ gleiches Vorzeichen, so gilt:} \quad \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}\,.}$$

Man kann diese allgemeine Formel natürlich auch zur Berechnung der vorangehenden Aufgaben a)–d) benutzen.

Übungen (4)

1) a) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - x^4$ und der x-Achse in den Grenzen von $a = -2$ bis $b = 3$.
   b) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^5 - 3x^4$ und der x-Achse in den Grenzen von -3 bis $+3$.
2) Bestimmen Sie die Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse *eingeschlossen* wird:
   a) $f(x) = x^3 - x^5$,
   b) $f(x) = x^4 - 4x^2$,
   c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$.
3) Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse: Lehrbuch S. 61, Nr. 3
4) Flächeninhalt zwischen zwei Graphen: Lehrbuch S. 61, Nr. 4
   (Tip zur Nullstellenberechnung von f): Substitution $z = \sqrt{x}$.)
5) Lehrbuch S. 61, Nr. 5
6) Lehrbuch S. 61, Nr. 8
7) Es sei $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.
   a) Der Graph von f schließt mit der Geraden durch die beiden Tiefpunkte ein Flächenstück ein. Wie groß ist der Flächeninhalt?
   b) Wie groß ist die Fläche, die der Graph von f mit der Tangente durch den Hochpunkt einschließt?

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Wir bestimmen zunächst die Bereiche zwischen a und b, in denen f sein Vorzeichen nicht ändert. Dazu berechnen wir die Nullstellen mit VZW in diesem Bereich.

$$x^3 - x^4 = 0 \iff x^3(1-x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 1\,.$$

Beides sind Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, da von ungerader Ordnung.
Das Intervall $[a,b] = [-2,+3]$ wird durch die beiden Nullstellen 0 und 1 in drei Teilintervalle $[-2{,}0]$, $[0{,}1]$, $[1{,}3]$ zerlegt, in denen f sein Vorzeichen nicht ändert. Wir berechnen für alle drei Intervalle die Integrale:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{-2}^{0} = 0 - \big(\frac{16}{4} - \frac{-32}{5}\big) = -\frac{52}{5} = -10{,}4\,,$$
$$\int_{0}^{1} (x^3 - x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,,$$
$$\int_{1}^{3} (x^3 - x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{1}^{3} = \big(\frac{81}{4} - \frac{243}{5}\big) - \frac{1}{20} = -\frac{568}{20} = -\frac{142}{5} = -28{,}4\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher

$$A = \frac{52}{5} + \frac{1}{20} + \frac{142}{5} = 10{,}4 + 0{,}05 + 28{,}4 = 38{,}85$$

b) Wieder berechnen wir die Nullstellen mit VZW:

$$x^5 - 3x^4 = 0 \iff x^4(x-3) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 3\,.$$

Die Nullstellen sind 0 (ohne VZW) und +3 (mit VZW). Beide Nullstellen liegen im Intervall $[a,b] = [-3,+3]$, aber da 3 am Rand des betrachteten Intervalls liegt, findet im Intervall kein VZW statt. Es genügt also in diesem Fall, das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{-3}^{3} (x^5 - 3x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5\Big]_{-3}^{3} = \big(\frac{3^6}{6} - \frac{3^6}{5}\big) - \big(\frac{3^6}{6} - \frac{-3^6}{5}\big) = -2\cdot\frac{3^6}{5} = -291{,}6\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = 291{,}6$.

2) a) Wir bestimmen die Nullstellen von

$$f(x) = x^3 - x^5 = x^3(1-x^2) = x^3(1+x)(1-x)\,.$$

Die beiden 'äußersten' Nullstellen sind $a = -1$ und $b = +1$, die einzige weitere Nullstelle *mit* VZW ist 0. Wir berechnen also

$$\int_{0}^{1} (x^3 - x^5)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

Wegen der Punktsymmetrie des Integranden ergibt das Integral $\int_{-1}^{0} f$ den negativen Wert $-1/12$. Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$A = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\,.$$

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2)$ hat die Nullstellen -2, 0 und $+2$. Die beiden äußersten sind -2 und $+2$, bei der dritten liegt kein VZW vor, daher berechnen wir $\int_{-2}^{2} f$. Wegen der Achsensymmetrie von f gilt

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx = 2 \cdot \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = 2 \cdot (\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = \dfrac{128}{15}$.
c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x^2(x-2)(x-3)$ hat die Nullstellen 0, 2 und 3. Die äußersten sind 0 und 3, bei der dritten dazwischen findet ein VZW statt. Daher berechnen wir

$$\int_0^2 f = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3\Big]_0^2 = \frac{32}{5} - 20 + 16 = \frac{12}{5}\,,$$
$$\int_2^3 f = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3\Big]_2^3 = \Big(\frac{3^5}{5} - \frac{5 \cdot 3^4}{4} + 2 \cdot 3^3\Big) - \frac{12}{5} = \frac{27}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{21}{20}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist daher

$$A = \frac{12}{5} + \frac{21}{20} = \frac{69}{20} = 3{,}45\,.$$

3) a) Die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ bestimmt man durch Substitution $z = x^2$:

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \iff (z-4)(z-1) = 0 \iff z = 4 \;\vee\; z = 1\,.$$

Die Lösung der Gleichung $x^2 = z$ ergibt für f die vier Nullstellen ± 1, ± 2. An allen Stellen findet ein VZW statt. Wir integrieren von Nullstelle zu Nullstelle. Da f achsensymmetrisch ist, genügt es, die folgenden Integrale zu berechnen:

$$\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 = \frac{38}{15}\,,$$
$$\int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big]_1^2 = \Big(\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8\Big) - \frac{38}{15} = -\frac{22}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist dann das Doppelte (wegen der Symmetrie) der *Beträge* dieser Integralwerte, also

$$A = 2 \cdot (\frac{38}{15} + \frac{22}{15}) = 8\,.$$

Ergebnisse zu b) und c):
b) Nullstellen: 0 doppelt und 1 sowie 2 einfach. Fläche $A = \frac{7}{60} + \frac{23}{60} = \frac{1}{2}$.

c) Graph ist punktsymmetrisch, Nullstellen sind 0 und ± 2. Die Fläche beträgt $A = 2 \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$.

4) a) Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - x^2 - (4x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$. Dies ist genau die Funktion f aus der vorangehenden Aufgabe a) (S. 61, Nr. 3a). Nun sind die Schnittstellen von f und g gerade die Nullstellen von h und die Flächenstücke zwischen den Graphen von f und g sind genauso groß wie die Flächenstücke zwischen dem Graphen von h und der x-Achse. Deren Gesamtflächeninhalt wurde bereits in der vorangehenden Aufgabe zu $A = 8$ bestimmt.
c) Hier ergibt sich ebenfalls $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 + x^3 - 3x + 2 - (x^3 + 5x^2 - 3x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$ und damit dasselbe Ergebnis wie unter a).
b) Als erstes bestimmen wir die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$. Diese hat bei 0 eine doppelte Nullstelle. Eine weitere Nullstelle von h ist $x = 1$ und Polynomdivison ergibt $h(x) = x^2(x-1)(x^2-4) = x^2(x-1)(x+2)(x-2)$. Die äußersten Nullstellen von h sind -2 und $+2$; dazwischen liegt nur ein VZW vor, und zwar bei $+1$. (0 ist doppelte Nullstelle, dort also kein VZW.)
Zur Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse müssen wir also zwei Integrale bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} h(x)\,dx &= \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{-2}^{1} \\
&= (\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}) - (\frac{32}{3} + \frac{32}{5} - 16 - \frac{32}{3}) \\
&= \frac{3}{10} - (-\frac{48}{5}) = \frac{99}{10} \\
\int_{1}^{2} h(x)\,dx &= \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{1}^{2} \\
&= (\frac{32}{3} - \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}) \\
&= -\frac{16}{15} - \frac{3}{10} = -\frac{41}{30}\,.
\end{aligned}$$

Da die Funktion h in den beiden Integrationsbereichen ihr Vorzeichen nicht ändert, sind die Beträge der Integrale gleich den Flächeninhalten der entsprechenden Flächenstücke und die gesuchte Gesamtfläche ist

$$A = \frac{99}{10} + \frac{41}{30} = \frac{169}{15}\,.$$

Diese zwischen dem Graphen von h und der x-Achse eingeschlossene Fläche ist genauso groß wie die gesuchte Fläche, die zwischen den beiden Graphen von f und g eingeschlossen ist.
d) Wieder berechnen wir als erstes die Differenzfunktion $h(x) = x^4 - x^3 + x - 1$ und deren Linearfaktorzerlegung. Erste Nullstellen liegen bei $x = \pm 1$ und Polynomdivision ergibt $h(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$. Da der Faktor $x^2 - x + 1$ keine Nullstellen besitzt, hat h nur die beiden Nullstellen ± 1.
Wir berechnen also das Integral $\int_{-1}^{1} h$ und beachten die symmetrischen Grenzen. Dies ergibt

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - x^3 + x - 1)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 - 1)\,dx = 2 \cdot (\frac{1}{5} - 1) = -\frac{8}{5}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $A = \frac{8}{5}$.

e) Hier ist wegen des Pols von f bei 0 Vorsicht angebracht. Der Pol darf in keinem der nachfolgenden Integrationsintervalle liegen!

Wir beginnen wie üblich. Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = \frac{4}{x^2} - (-x^2+5) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2}\,.$$

Deren Nullstellen bestimmen wir mittels Substitution:

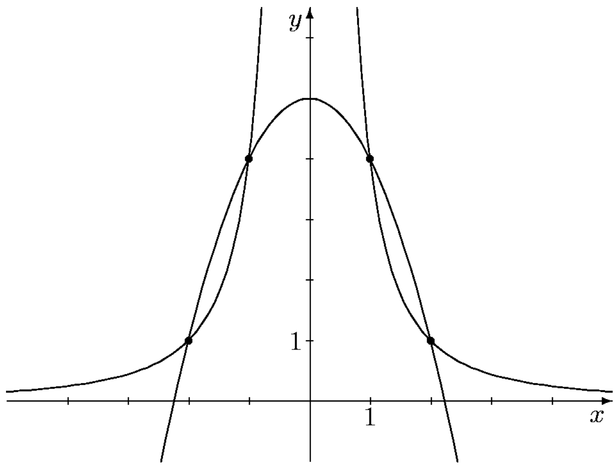
$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff z^2 - 5z + 4 = 0 \;\wedge\; z = x^2 \\ &\iff (z-4)(z-1) = 0 \;\wedge\; z = x^2 \\ &\iff x^2 = 4 \;\vee\; x^2 = 1 \iff x = \pm 2 \;\vee\; x = \pm 1 \end{aligned}$$

Dies sind 4 verschiedene Nullstellen einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, also alle mit Vorzeichenwechsel. Die Integrationsintervalle sind daher $[-2,-1]$ und $[1{,}2]$. Das Integrationsintervall $[-1{,}1]$ entfällt, da darin der Pol 0 von f und h liegt! Wegen der Achsensymmetrie von h braucht nur ein Integral berechnet zu werden:

$$\int_1^2 h(x)\,dx = \int_1^2 (4x^{-2} + x^2 - 5)\,dx = \Big[-4x^{-1} + \frac{1}{3}x^3 - 5x\Big]_1^2 = -\frac{2}{3}\,.$$

Die beiden Graphen schließen zwei kongruente Flächenstücke vom Inhalt $\frac{2}{3}$ miteinander ein. Der Gesamtflächeninhalt ist $A = \frac{4}{3}$.

Die nachstehende Skizze beider Graphen (begründen Sie kurz den Verlauf) zeigt die Problematik des Pols von f: Im Bereich zwischen den Schnittstellen ± 1 umschließen die Graphen von f und g kein Flächenstück.



f) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$, während g nur für positive x definiert ist. Der gemeinsame Definitionsbereich beider Funktionen ist also das Intervall $]0,\infty[$. Über diesem Definitionsbereich gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \iff -x\sqrt{x} + 7\sqrt{x} - 6 = 0 \iff z = \sqrt{x} \wedge -z^3 + 7z - 6 = 0 \;\; (*)$$

Die kubische Gleichung $z^3-7z+6=0$ hat eine Nullstelle bei $z=1$. Polynomdivision ergibt $z^3-7z+6=(z-1)(z^2+z-6)$. Den quadratischen Faktor zerlegt man nach Vieta in $z^2+z-6=(z-2)(z+3)$ und erhält somit die folgende Faktorisierung $z^3-7z+6=(z-1)(z-2)(z+3)$. Also

$$\begin{aligned}
(*) \iff\ & z=\sqrt{x} \ \wedge \ (z-1)(z-2)(z+3)=0 \\
\iff\ & z=\sqrt{x} \ \wedge \ \big(z=1 \ \vee \ z=2 \ \vee \ z=-3\big) \\
\iff\ & \sqrt{x}=1 \ \vee \ \sqrt{x}=2 \\
\iff\ & x=1 \ \vee \ x=4\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen also folgendes Integral, das hier positiv ausfällt und daher zugleich den gesuchten Flächeninhalt angibt:

$$\int_1^4 (-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}-2x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x-4x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4$$
$$= \big(-\frac{8}{3}+\frac{28}{3}-8\big)-\big(-\frac{1}{6}+\frac{7}{3}-4\big)=\frac{1}{2}$$

5) Da die Flächen zwischen zwei Graphen genauso groß sind, wie die Flächenstücke zwischen der Differenzfunktion und der x-Achse, untersuchen wir nur letztere. Wir faktorisieren die Differenzfunktion durch Ausklammern und mit dem Satz des Vieta:

$$f(x)-g(x)=3x^3-18x^2+24x=3x(x^2-6x+8)=3x(x-2)(x-4)\,.$$

Damit liegen 3 Nullstellen 0, 2, 4 vor, jeweils mit Vorzeichenwechsel. Also schließt der Graph der Differenzfunktion zwei Flächenstücke mit der x-Achse ein; eines liegt ober-, eines unterhalb der x-Achse. Um nun zu zeigen, dass beide gleich groß sind, berechnen wir das Gesamtintegral von 0 bis 4 und zeigen, dass dieses den Wert 0 hat:

$$\int_0^4 (3x^3-18x^2+24x)\,dx = \Big[\frac{3}{4}x^4-6x^3+12x^2\Big]_0^4 = 3\cdot 4^3-6\cdot 4^3+12\cdot 4^2=0$$

6) Da die Punkte auf der Parabel liegen sollen, gilt $y_1=(-1)^2=1$ und $y_2=4$. Der Sekantenanstieg ist damit $m=\frac{4-1}{2-(-1)}=1$. Die Sekantengleichung daher $y=x+b$, wobei wir das b bestimmen, indem wir einen der Punkte in die Sekantengleichung einsetzen: $4=2+b \iff b=2$. Damit ist die Sekante Graph der Funktion $g(x)=x+2$.
Gesucht ist nun der Inhalt des von den Graphen von $f(x)=x^2$ und $g(x)=x+2$ eingeschlossenen Flächenstücks. Die Schnittstellen beider Graphen (aus Gradgründen höchstens zwei) sind bereits durch die beiden Punkte bekannt: -1 und 2. Wir berechnen also das Integral der Differenzfunktion in diesen Grenzen:

$$\int_{-1}^2 (x^2-x-2)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-1}^2=-\frac{9}{2}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also 4,5. (Das negative Vorzeichen des Integrals zeigt, dass zwischen den beiden Schnittpunkten die Parabel *unter* der Sekante verläuft.)

7) Der Graph von f ist achsensymmetrisch. Wir bestimmen zunächst die Tiefpunkte. $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$ hat die Nullstellen 0 sowie $\pm\sqrt{2}$, alle einfach, alle mit VZW, also alle Extremstellen von f. Da der führende Koeffizient von f positiv ist, sind $\pm\sqrt{2}$ Minimumstellen und 0 eine Maximumstelle. Die Extrempunkte sind also

$$T_1 = (-\sqrt{2}\,, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}\,, -1)\,, \quad T_2 = (\sqrt{2}\,, -1) \quad \text{und} \quad H = (0\,, 3)\,.$$

a) Die Gerade durch die Tiefpunkte ist eine Parallele zur x-Achse. Sie ist Graph der Funktion $g(x) = -1$. $\pm\sqrt{2}$ sind die einzigen Schnittstellen dieser beiden Graphen ($f(x) = g(x) \iff x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \iff (x^2 - 2)^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$). Da der Graph achsensymmetrisch ist, berechnen wir nur

$$\int_0^{\sqrt{2}} (f-g) = \int_0^{\sqrt{2}} (x^4 - 4x^2 + 4)\, dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot(\frac{4}{5} - \frac{8}{3} + 4) = \frac{32}{15}\cdot\sqrt{2}$$

und verdoppeln diesen Wert. Der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \dfrac{64\sqrt{2}}{15}$.

b) Der einzige Hochpunkt ist $H = (0, 3)$; die Tangente hat den Anstieg 0, so dass sie Funktionsgraph von $g(x) = 3$ ist. Die Schnittstellen von f und g sind

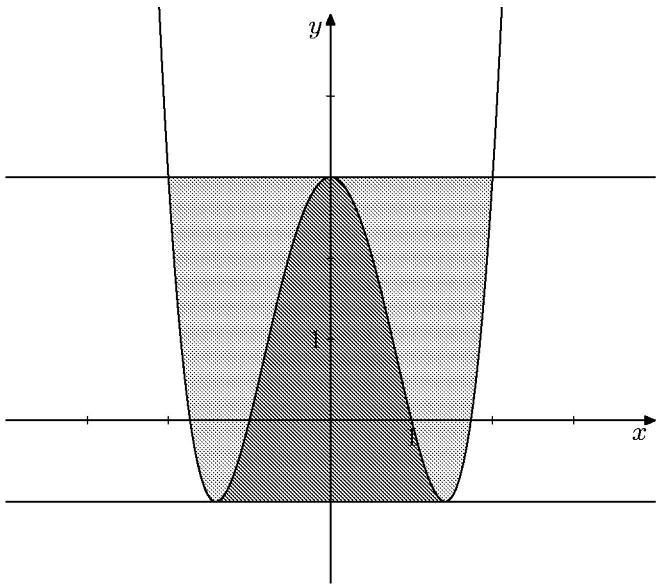
$$f(x) = g(x) \iff 0 = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) \iff x = 0 \;\vee\; x = \pm 2\,.$$

Da $f - g$ bei 0 eine doppelte Nullstelle hat, also kein VZW vorliegt, berechnen wir nur

$$\int_{-2}^{2} (f - g) = 2 \cdot \int_0^2 (x^4 - 4x^2)\, dx = 2 \cdot \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = 2 \cdot \big(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\big) = -\frac{128}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist nun $A = \dfrac{128}{15}$.

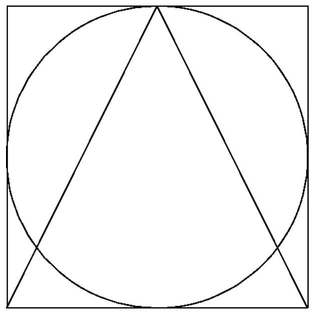
Nachfolgend eine Skizze des Graphen und der Flächenstücke. Beachten Sie, dass zur Berechnung der Flächeninhalte keine detaillierte Untersuchung des Funktionsgraphen notwendig war, aber zur Veranschaulichung ist eine grobe Skizze immer nützlich.



Übungen (5)

Rotationsvolumina:

1) Lehrbuch S. 63, Nr. 18–23
2) Auf dem Grabstein des Archimedes soll sich das nebenstehende Diagramm befunden haben. Es stellt den Querschnitt durch drei Rotationskörper dar.
   a) Um welche Rotationskörper handelt es sich?
   b) Leiten Sie mit Hilfe der Integralrechnung allgemeine Volumenformeln für diese Rotationskörper her.
   c) In welchem Verhältnis stehen die Volumina der drei Rotationskörper aus nebenstehender Skizze zueinander?



Bogenlängen:

3) Berechnen Sie die Bogenlängen der Funktionsgraphen zu folgenden Funktionstermen $f(x)$ über dem angegebenen Intervall $[a,b]$:
   a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \ln(\sqrt{x})$, $a = 4$, $b = 9$.
   b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$, $a = 4$, $b = 9$.
   c) $f(x) = \frac{x^4+3}{6x}$, $a = 1$, $b = 2$.

Partielle Integration:

4) Lehrbuch S. 146 oben(!), Aufgabe 2
5) a) Machen Sie sich an den Beispielen der vorangehenden Aufgabe klar, dass man folgende Integraltypen mittels partieller Integration berechnen kann. Dabei sei p eine beliebige *ganzrationale* Funktion.

$$\int_a^b p(x)e^x\,dx : \quad \text{Partielle Integration mit } u'(x) = e^x\,,\ v(x) = p(x)\,,$$

$$\int_a^b p(x)\ln(x)\,dx : \quad \text{Partielle Integration mit } u'(x) = p(x)\,,\ v(x) = \ln(x)\,,$$

   Beurteilen Sie den unterschiedlichen Rechenaufwand in den beiden Fällen.
   b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $\ln(x)$, indem Sie oben $p(x) = 1$ wählen.
6) Berechnen Sie auf der Basis der oben gefundenen Stammfunktion von $\ln(x)$ die Integrale $\int_a^b \ln^2$ und $\int_a^b \ln^3$.

Integration durch Substitution:

7) Lehrbuch S. 144/145, Nr. 2, 6
8) Lehrbuch S. 146, Nr. 1 a)–c), g)–l)
9) Lehrbuch S. 147, Nr. 7, 10

Übungen (5) — Lösungen

1) Ergebnisse:

18. Funktionsterm $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, Rotationsvolumen $V = \frac{448}{15}\pi$.

19. Schnittstellen: $a = 0$, $b = \frac{5}{2}$,

Man muss die Rotationsvolumina für beide Randkurven berechnen und substrahieren. Der Betrag der Differenz ist dann das gesuchte Rotationsvolumen.

Rotationsvolumina: $V_1 = \frac{1385}{24}\pi$, $V_2 = \frac{2885}{24}\pi$,

Die Differenz ist dann das gesuchte Volumen: $V = \frac{125}{2}\pi$.

20. a) Parabelgleichung $y = \frac{1}{20}x^2$,

b) Umkehrrelation $x = \frac{1}{20}y^2$ (damit die x-Achse Drehachse wird),

Randfunktion $f(x) = \sqrt{20x}$, Volumen (in m^3): $V = 640\pi \approx 2010{,}6$.

21. Volumen $V = \frac{75}{4}\pi$.

22. a) Schnittstellen $a = 0$, $b = 4$, Fläche $A = \frac{16}{3}$.

b) (Siehe 19.!) $V_1 = \frac{64}{5}\pi$, $V_2 = 32\pi$, $V = \frac{96}{5}\pi$.

23. Anwendung der Formel ergibt

$$V = \pi\Big[r^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{r-h}^{r} = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - r^2(r-h) + \frac{1}{3}(r-h)^3\right),$$

woraus nach geduldigem Ausmultiplizieren und abschließendem Ausklammern von h^2 die behauptete Formel folgt.

2) a) Die einzige Symmetrieachse der Querschnitte ist die senkrechte Mittellinie. Durch Rotation entstehen eine Kugel (der Radius sei r), ein Zylinder und ein Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe $h = 2r$.
b) siehe Unterricht.
c) Das Volumenverhältnis dieser Körper beträgt 1 : 2 : 3 für Kegel : Kugel : Zylinder, denn:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3\,, \quad V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3\,, \quad V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3\,.$$

3) Ergebnisse:
a) $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$, $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$, Bogenlänge $l = \ln(\frac{3}{2}) + \frac{65}{4} \approx 16{,}66$.
b) $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, Bogenlänge $l = \frac{22}{3}$.
c) $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$, $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$, Bogenlänge $l = \frac{17}{12}$.

4) Ergebnisse der Aufgabe 2 auf S. 146, oben(!):
a) -2π b) $\pi^2 - 4$ c) $\pi \cdot (\pi^2 - 6)$

d) $\frac{62}{5}$ e) -2π f) 1,

g) $e-2\approx 0{,}71828$, h) $6-2e\approx 0{,}56$, i) $2\ln(2)-\dfrac{3}{4}\approx 0{,}64$,

j) $\dfrac{8}{3}\ln(2)-\dfrac{7}{9}\approx 1{,}098$.

5) a) Mit den angegebenen Setzungen ergibt partielle Integration im ersten Fall

$$\int_a^b p(x)e^x\,dx = \big[p'(x)e^x\big]_a^b - \int_a^b p'(x)e^x\,dx\,.$$

Das letzte Integral ist wieder von demselben Typ, jedoch ist der ganzrationale Faktor nun $p'(x)$ und damit um einen Grad kleiner als $p(x)$. Man kann nun denselben Prozess wiederholen, und zwar solange, bis der Grad 0 ist (und damit der ganzrationale Faktor eine Konstante). Das entstehende Integral $\int_a^b c\cdot e^x\,dx$ ist dann unmittelbar berechnenbar.

Im zweiten Fall erhält man durch partielle Integration

$$\int_a^b p(x)\ln(x)\,dx = \big[P(x)\ln(x)\big]_a^b - \int_a^b P(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Dabei sei P eine (ganzrationale) Stammfunktion von p, und zwar ohne absolutes Glied. Damit ist $P(x)$ durch x teilbar und folglich der Integrand $P(x)\cdot\frac{1}{x}$ im letzten Integral selbst eine *ganzrationale* Funktion, so dass dieses Integral problemlos berechnet werden kann.

Man bemerkt, dass im zweiten Fall eine einmalige Anwendung der partiellen Integration unmittelbar zum Ergebnis führt, während im ersten Fall die partielle Integration mehrfach angewendet werden muss (so oft wie der Grad von p angibt).

b) Hier ist $p(x) = 1$ und man wählt $P(x) = x$. Dann erhält man nach obigem Schema

$$\int_a^b 1\cdot\ln(x)\,dx = \big[x\ln(x)\big]_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \big[x\ln(x)\big]_a^b - \big[x\big]_a^b = \big[x\ln(x)-x\big]_a^b\,.$$

Der so gefundene Funktionsterm $x\ln(x)-x$ ist damit eine Stammfunktion für $\ln(x)$ (was man durch Ableiten überprüfen kann).

6) Wir benutzen den in der vorangehenden Aufgabe ermittelten Stammfunktionsterm $x(\ln x-1)$ für $\ln x$ und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{\ln(x)}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx &= \big[x(\ln x-1)\cdot\ln x\big]_a^b - \int_a^b x(\ln x-1)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&= \big[x(\ln^2 x-\ln x)\big]_a^b - \int_a^b(\ln x-1)\,dx\\
&= \big[x(\ln^2 x-\ln x)\big]_a^b - \big[x(\ln x-1)-x\big]_a^b\\
&= \big[x(\ln^2 x-2\ln x+2)\big]_a^b
\end{aligned}$$

und unter Verwendung dieses Resultats

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \ln^2(x)\cdot\ln(x)\,dx\\
&= \big[x(\ln^2 x-2\ln x+2)\cdot\ln x\big]_a^b - \int_a^b(\ln^2 x-2\ln x+2)\,dx\\
&= \big[x(\ln^3 x-2\ln^2 x+2\ln x)\big]_a^b - \big[x(\ln^2 x-2\ln x+2)-2x(\ln x-1)+2x\big]_a^b
\end{aligned}$$

$$= \big[x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)\big]_a^b$$

Damit ist $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$ ein Stammfunktionsterm für $\ln^2 x$ und $x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$ einer für $\ln^3 x$. (Die Überprüfung dieser Resultate ist eine gute Ableitungsübung (Produkt-, Kettenregel).)

7) S. 144, Nr. 2.:

a) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und somit $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_0^4 x(x^2+1)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 u(x)^2 \cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(4)} z^2\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}z^3\Big]_1^{17} = \frac{2456}{3}\,.$$

b) Wähle $u(x) = 2x^3 - 1$, also $u'(x) = 6x^2$ und $x^2 = \frac{1}{6}u'(x)$. Daher

$$\int_{-1}^2 x^2(2x^3-1)dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^2 u(x)\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_{u(-1)}^{u(2)} z\,dz = \frac{1}{6}\Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_{-3}^{15} = 18\,.$$

c) Wähle $u(x) = 2x^2 + 3x - 1$, also $u'(x) = 4x + 3$. Daher

$$\int_0^1 (4x+3)(2x^2+3x-1)^3 dx = \int_0^1 u(x)^3 \cdot u'(x)\,dx \int_{u(0)}^{u(1)} z^3\,dz = \Big[\frac{1}{4}z^4\Big]_{-1}^{4} = \frac{255}{4}\,.$$

d) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_{-1}^{-2} \frac{5x}{x^2+1}\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{-2} \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{u(-1)}^{u(-2)} \frac{1}{z}\,dz$$
$$= \frac{5}{2}\Big[\ln(|z|)\Big]_2^5 = \frac{5}{2}(\ln(5) - \ln(2)) = \frac{5}{2}\ln(\frac{5}{2})\,.$$

e) Wähle $u(x) = 4x^2 - 1$. Integralwert: $\dfrac{3}{8}(\ln(7) - \ln(3))$.

f) Wähle $u(x) = x^2 - x + 1$. Integralwert: $\ln(13) - \ln(3)$.

g) Wähle $u(x) = x^2 + 1$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u(x)}\cdot u'(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(4)} \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big]_2^{17} = \frac{17}{3}\sqrt{17} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$

h) Wähle $u(x) = 2x^2 + 4$. Integralwert: $\sqrt{6} - \dfrac{4}{3}$.

i) Wähle $u(x) = x^2 + 1$. Integralwert: $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

j) Wähle $u(x) = 3x^2 + 5$, also $u'(x) = 6x$ und $x = \frac{1}{6}u'(x)$. Daher

$$\int_1^2 \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{u(x)^4}\cdot u'(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_{u(1)}^{u(2)} z^{-4}\,dz = \frac{1}{6}\Big[-\frac{1}{3}z^{-3}\Big]_8^{17} = \frac{489}{5030912}\,.$$

In den abschließenden beiden Aufgaben k) und l) werden zwei *Typen* von Integralen behandelt, die man generell mittels Substitution berechnen kann. Ich schreibe hier $u(x)$ statt $f(x)$, um an unsere Notation der Substitutionsregel anzuschließen.
k) Ein Beispiel für diesen Typ war Aufgabenteil b) (bis auf einen zusätzlichen Faktor).

$$\int_a^b u(x) \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} z\,dz = \Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \frac{1}{2}(u(b)^2 - u(a)^2)\,.$$

l) Dies ist ein äußerst wichtiger Integraltyp. Beispiele dafür waren d) – f). Man nennt dies die *logarithmische* Integration, denn es gilt (sofern das Integral definiert ist, d. h. sofern u zwischen a und b keine Nullstelle hat):

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int_a^b \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{1}{z}\,dz = \Big[\ln|z|\Big]_{u(a)}^{u(b)}$$
$$= \ln|u(b)| - \ln|u(a)| = \ln\frac{|u(b)|}{|u(a)|} = \ln\Big|\frac{u(b)}{u(a)}\Big| = \ln\frac{u(b)}{u(a)}\,.$$

Man beachte bei der letzten Beziehung, dass $u(b)$ und $u(a)$ dasselbe Vorzeichen haben (sonst hätte die stetige Funktion u zwischen a und b eine Nullstelle) und folglich $\frac{u(b)}{u(a)}$ positiv ist.
S. 145, Nr. 6.:
a) Wir setzen $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$ und $x = \frac{1}{2}u'(x)$. Daher

$$\int_a^b xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b e^{u(x)} \cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(a)}^{u(b)} e^z\,dz = \frac{1}{2}\Big[e^z\Big]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2}(e^{b^2} - e^{a^2})\,.$$

b) Wir zerlegen das Integral und wenden auf den ersten Summanden die Substitutionsregel mit $u(x) = 3x^2$ an:

$$\int_a^b (xe^{3x^2} + 2x)\,dx = \int_a^b xe^{3x^2}\,dx + \int_a^b 2xdx = \frac{1}{6}\int_a^b e^{u(x)} \cdot u'(x)\,dx + (b^2 - a^2)$$
$$= \frac{1}{6}\Big[e^z\Big]_{u(a)}^{u(b)} + (b^2 - a^2) = \frac{1}{6}(e^{3b^2} - e^{3a^2}) + (b^2 - a^2)\,.$$

c) Hier hat man es lediglich mit linearer Substitution $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$ zu tun:

$$\int_a^b e^{2x+1}\,dx = \Big[\frac{1}{2}e^{2x+1}\Big]_a^b = \frac{1}{2}(e^{2b+1} - e^{2a+1})\,.$$

d) Man wählt $u(x) = x^2$ und erhält als Integralwert: $\dfrac{1}{4}(e^{2b^2} - e^{2a^2})$.
e) Mit $u(x) = \ln(x)$, also $u'(x) = \frac{1}{x}$ ist dieses Integral vom Typ der vorangehenden Aufgabe 2.k):

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 u(x) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(1)}^{u(2)} z\,dz$$
$$= \Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln^2(2)\,.$$

f) Setzt man hier $u(x) = x^2$, so erhält man

$$\int_1^2 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(2)} \ln(z)\,dz\,.$$

Man muss dann entweder eine früher berechnete Stammfunktion von ln benutzen, oder diese erneut mittes partieller Integration berechnen. Man erhält so als Integralwert

$$\int_1^2 x\ln(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\Big[z\ln(z) - z\Big]_1^4 = 4\ln(2) - \frac{3}{2}\,.$$

Man kann das Integral aber auch unter Verwendung der Gesetzmäßigkeiten für den Logarithmus ($\ln(x^2) = 2\ln(x)$ für $x > 0$!) vereinfachen und direkt partielle Integration anwenden (vgl. Aufgabe 5a)):

$$\int_1^2 x\ln(x^2) = 2\int_1^2 x\ln(x) = 2\Big[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x)\Big]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 4\ln(2) - \int_1^2 x\,dx = 4\ln(2) - \frac{3}{2}\,.$$

8) S. 146, Nr. 1:
a) Substitution $u(x) = x^2$, also $u'(x) = 2x$, ergibt $f(x) = e^{u(x)}\cdot u'(x)$. Nach der Substitutionsregel muss man eine Stammfunktion für e^z bestimmen und in diese $u(x)$ einsetzen. Man erhält so $F(x) = e^{x^2}$ als eine Stammfunktion von f.
b) Substitution $u(x) = x^3$, also $u'(x) = 3x^2$ und somit $x^2 = \frac{1}{3}u'(x)$. Damit wird $f(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{u(x)}\cdot u'(x)$. Wieder ist nur eine Stammfunktion für e^z zu bestimmen. Man erhält so $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{x^3}$ als einen Stammfunktionsterm für $f(x)$.
c) Substitution $u(x) = -x^3$; eine Stammfunktion ist $F(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-x^3}$.
g) Substitution $u(x) = x^2-1$; damit ist $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)$ und man benötigt eine Stammfunktion für $\frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Diese ist durch $z^{+\frac{1}{2}}\cdot 2 = 2\sqrt{z}$ gegeben. Setzt man für z nun $u(x)$ ein, so erhält man schließlich $\sqrt{x^2-1}$ als gesuchte Stammfunktion.

h) Substitution $u(x) = x^3 - 1$; eine Stammfunktion ist $-\dfrac{1}{3(x^3-1)}$.
i) Substitution $u(x) = x^2 + x$; eine Stammfunktion ist $F(x) = \sqrt{x^2+x}$.
j) Substitution $u(x) = x^2 + 1$; eine Stammfunktion ist $F(x) = -\dfrac{1}{4(x^2+1)^2}$.
k) Substitution $u(x) = \ln(x)$. Dies ergibt $u'(x) = \frac{1}{x}$ und damit hat $f(x)$ die Form

$$f(x) = \frac{1}{\ln^3 x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{u(x)^3}\cdot u'(x)\,.$$

Gemäß Substitutionsregel muss man nun eine Stammfunktion für $\frac{1}{z^3} = z^{-3}$ bestimmen (etwa $-\frac{1}{2}z^{-2}$) und in diese $u(x)$ einsetzen. Man erhält so $F(x) = -\frac{1}{2\ln^2 x}$ als Stammfunktion für $f(x)$.

l) Diese Funktion ist höchstens für $x > 0$ definiert (ln ist nur dort definiert!), also gilt $\sqrt{x^2} = x$ und damit ist die hier gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} \,.$$

Wegen des Wurzelterms im Nenner ist f nur definiert für $\ln(x) > 0$, d. h. $x > 1$. Die Bestimmung einer Stammfunktion verläuft nun wie in k), nur dass der Exponent 3 durch $\frac{1}{2}$ ersetzt ist. Man erhält als Stammfunktion $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)}$.

9) S. 147, Nr. 7:

a) Es ist

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} \,.$$

b) Berechnung der Extremstellen von f:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -2\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \,.$$

Damit sind ± 1 die einzigen Nullstellen von f', beide mit VZW, also Extremstellen von f. Da f keine Definitionslücken hat, ist das zu berechnende Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ wohldefiniert.

Zur Bestimmung einer Stammfunktion benutzen wir die Zerlegung von a). Für den zweiten Summanden kann man Substitution mit $u(x) = x^2 + 1$ verwenden. Dann gilt

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)} \,.$$

Man erhält also ein logarithmisches Integral (vgl. Aufgabe 8), S. 144 Nr. 2 k)). Eine Stammfunktion ist dann $\ln(u(x))$. Insgesamt erhält man als Stammfunktion von $f(x)$:

$$F(x) = x - \ln(x^2 + 1) \,.$$

Das Integral ist dann

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = 2 \,.$$

S. 147, Nr. 10:

a) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sie ist punktsymmetrisch: $f(-x) = -f(x)$, und hat bei 0 die einzige Nullstelle. Dort liegt ein VZW vor.

Wir berechnen die Ableitung mittels Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2} + 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2}(1 - x^2) \,.$$
$$f''(x) = (-2x) \cdot 5e^{-\frac{1}{2}x^2} + (1 - x^2) \cdot 5e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2} x(x^2 - 3) \,.$$

Damit hat f' die einzigen Nullstellen bei ± 1, beide mit VZW, also beide Extremstellen von f.

f'' hat drei einfache Nullstellen, nämlich 0 und $\pm\sqrt{3}$, ebenfalls mit VZW, so dass

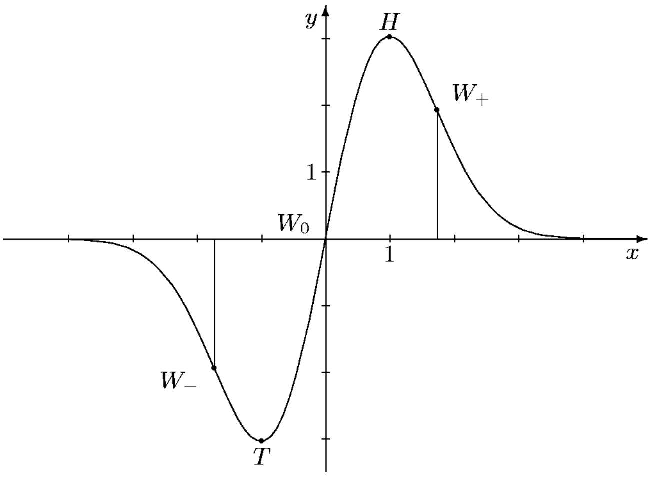
hier Wendestellen von f liegen.
Da f' schließlich negativ ist (der e-Faktor ist immer positiv, $1-x^2$ hingegen schließlich negativ), muss die Funktion f schließlich fallen. Der letzte Extrempunkt ist daher ein Hochpunkt. Aus Symmetriegründen ist die andere Extremstelle bei -1 ein Tiefpunkt:

$$H = (1\,, f(1)) = (1\,, \frac{5}{\sqrt{e}})\,,\; T = (-1\,,\, -\frac{5}{\sqrt{e}})\,.$$

Die Wendepunkte sind

$$W_0 = (0{,}0)\,, \quad W_\pm = (\pm\sqrt{3}\,,\, \pm\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}})\,.$$

Skizze:



b) Wegen der Symmetrie genügt es ein Integral zu berechnen. Wir benutzen dazu die Substitutionsregel (mit $u(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und $u'(x) = -x$):

$$\int_0^{\sqrt{3}} f = -5\int_0^{\sqrt{3}} e^{u(x)} \cdot u'(x)\,dx = -5\int_{u(0)}^{u(\sqrt{3})} e^z\,dz = -5\Big[e^z\Big]_0^{-\frac{3}{2}} = 5(1-\frac{1}{\sqrt{e^3}})\,.$$

c) Genauso berechnet man

$$\int_0^k f = 5(1-e^{-\frac{1}{2}k^2})$$

und ermittelt als Grenzwert (mit den Grenzwertsätzen sowie der Tatsache $e^z \to 0$ für $z \to -\infty$):

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k f = 5\cdot(1-0) = 5\,.$$

Man kann diesen Grenzwert deuten als den Flächeninhalt des *unbegrenzten* Flächenstücks zwischen dem Graphen und der positiven x-Achse. Dieses Flächenstück hat zwar eine unbegrenzte Ausdehnung aber einen endlichen Flächeninhalt.